MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

PRIMER SEMESTRE

UNIDAD 1.
LÓGICA PROPOSICIONAL

CLAVE

05141103/06141103

UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

Contenido

Presentación de la unidad	3
Competencia Específica	3
Logros	3
1.1 Proposiciones	4
1.1.1. Notación de proposiciones	6
1.2 Conectivos lógicos	7
1.3. Operaciones proposicionales	8
1.3.1. Tablas de verdad	9
1.3.2 Negación	10
1.3.3. Conjunción	11
1.3.4. Disyunción exclusiva e inclusiva	12
1.3.5. Condicional o implicación	16
1.3.6. Condición suficiente y necesaria	17
1.3.7 Bicondicional o doble implicación	19
1.4. Lenguaje formal	23
1.5. Tautologías o contradicciones	26
1.6. Cuantificadores	27
1.7. Reglas de inferencia	28
Cierre de la unidad	48
Recursos didácticos	48
Fuentes de consulta	49

Presentación de la unidad

Esta unidad te aportará conocimientos necesarios para relacionar diferentes tipos de proposiciones, estableciendo criterios para demostrar su valor de verdad mediante el uso de premisas y reglas de inferencia adecuadas.

De tal manera que podrás desarrollar tu capacidad para expresar soluciones de la vida cotidiana y profesional en un lenguaje proposicional.

A través del estudio de esta unidad, adquirirás conocimiento en el uso del razonamiento matemático al momento de resolver problemas operativos, así como la intuición en el manejo de información. Todo esto a través de premisas, las cuales permite concluir ciertos problemas partiendo de un método deductivo que es el inicio y parte central de la lógica. Refiriéndonos de esta manera a de todos los razonamientos, y en un sentido estricto, al estudio del razonamiento deductivo. Este tipo de razonamiento se basa en la lógica proposicional, la cual utiliza proposiciones que se pueden unir utilizando conectivos lógicos para formar un argumento que se determina por medio de un valor de verdad.

Competencia Específica

Analizar proposiciones simples y compuestas empleando las operaciones proposicionales para expresarlas en un lenguaje lógico.

Logros

- Demostrar las oraciones declarativas y las proposiciones simples y compuestas.
- Utilizar conectivos lógicos para escribir una proposición que simbolice una afirmación.
- Analizar proposiciones que surgen de situaciones de la vida cotidiana empleando las operaciones proposicionales para expresarlas en un lenguaje lógico.
- Resolver ejercicios en los que los empleen las reglas de inferencia aprendidas.
- Emplear las reglas de inferencia y tablas de verdad para determinar las operaciones proposicionales.

1.1 Proposiciones

La necesidad del arte del razonamiento

Cuando uno de sus oyentes dijo, “convénceme de que la lógica es útil”, él respondió:

“¿Debo demostrarlo?”

“Sí”

“Entonces, ¿no debo usar un argumento demostrativo?”

Y cuando el otro se mostró de acuerdo, él dijo, “¿cómo sabrás que no te impongo simplemente la conclusión?” Y, puesto que su interlocutor no tuvo respuesta, le dijo: “¿ves como tú mismo aceptas que la lógica es necesaria?, sin ella no podrías aprender siquiera si es o no necesaria”.

Discursos de Epicteto

En tu vida cotidiana usas la lógica para razonar diferentes situaciones que pueden ser personales, colectivas, de una empresa u organización. Por ejemplo, ¿cuál es la mejor manera para realizar un resumen?, ¿cómo prepararte para un examen?, ¿qué cantidad de alimentos debes comprar para que el dinero te rinda más?, ¿cómo obtener mayores ingresos de una empresa?, ¿cómo aumentar el número de clientes en un negocio? Día a día adquieres experiencia y con base en ella, tomas decisiones. Tus errores los puedes tomar como aprendizaje para no repetirlos, pruebas si una estrategia te funciona o no y sacas conclusiones a partir de las circunstancias dadas. Estas circunstancias las puedes ver como proposiciones, las cuales son oraciones de las que sólo puedes afirmar si son verdaderas o falsas.

Se llaman proposiciones a las oraciones aseverativas, las fórmulas y los enunciados bien definidos. Mientras que las opiniones, suposiciones, proverbios, refranes, oraciones interrogativas, exclamativas e imperativas no lo son.

Definición de proposición: es una sentencia declarativa que puede ser verdadera o falsa.

Valor de verdad: Se le denomina a la veracidad o falsedad de una proposición y se representa como V o F respectivamente.

En lógica se utilizan dos clases de proposiciones que se conocen como atómicas y moleculares, las primeras también se pueden llamar simples y las segundas compuestas.

Definición de proposición simple o atómica: es una sola oración declarativa, no se puede separar en dos proposiciones.

Definición de proposición compuesta o molecular: está formada por una o varias proposiciones atómicas mediante un término de enlace. Pueden separarse y descomponerse en proposiciones más simples y su valor de verdad depende de los valores de las proposiciones que la forman.

Ejemplos de proposiciones simples:

Curso el segundo semestre de la UnADM.
Llevo la asignatura de Cálculo diferencial.

Con estas proposiciones simples puedes formar una proposición compuesta, para ello se utiliza el término de enlace "y".

Ejemplo:
Curso el segundo semestre de la UnADM y llevo la asignatura de Cálculo diferencial.

El término de enlace "y" se utiliza para unir dos proposiciones y se le conoce como conjunción.

Para formar proposiciones compuestas, existen otros términos de enlace que se utilizan para unir simples, por ejemplo: o, si, …, entonces, si y sólo sí.

Ejemplo:
Prefieres ir al cine o al teatro.

A esta unión de proposiciones, se le conoce como **disyunción**. Más adelante, verás en qué momento se pueden cumplir las dos proposiciones al mismo tiempo y en qué momento se cumple sólo una.

Ejemplo:
Si tienes 18 años, entonces puedes tramitar tu credencial de elector.

A esta unión de proposiciones, por medio del término de enlace "si,…, entonces", se le conoce como **condicional**. Es decir, que a partir de una condición puede suceder algo.

Ejemplo:
Voy a la fiesta si y sólo si me acompaña Jorge.

Esta unión de proposiciones, dónde se utiliza el término de enlace "sí y sólo si", se le conoce como **bicondicional**, porque se deben cumplir dos condiciones al mismo tiempo. En el ejemplo, las dos condiciones se pueden separar así:
Voy a la fiesta si me acompaña Jorge y si me acompaña Jorge voy a la fiesta.

Por último, el término de enlace "no" permite formar una proposición compuesta.
Ejemplo: no voy a ir a la playa.
Cuando utilizas un término de enlace formas proposiciones compuestas.

1.1.1. Notación de proposiciones

Los símbolos que se usan en la lógica para representar proposiciones son letras minúsculas, tales como: $p, q, r, s, t, u, v, w, x, y$ y z. Por ejemplo:

p: 3 es número primo
q: 9 es divisible por 3

Simbolizar las proposiciones te permite operar con ellas, más adelante podrás constatar lo útil que es representarlas por medio de letras.

1.2 Conectivos lógicos

Los conectivos lógicos enlazan proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas. Los términos que te permiten formar nuevas proposiciones son: y, o, si, …, entonces, por mencionar algunos. Más adelante, profundizarás en los diferentes términos de enlace para crear operaciones proposicionales.

Definición de conectivos lógicos

Las proposiciones pueden modificarse o combinarse utilizando conectivos lógicos, de esta manera se obtienen proposiciones compuestas. Los conectivos lógicos que vas a usar son la negación "no" que se representa por el símbolo (¬), la conjunción "y" (∧), la disyunción inclusiva "o" (∨), la disyunción exclusiva "o" ($\underline{\vee}$), la implicación "si, …, entonces" (→) y la doble implicación "sí y sólo sí" (↔).

Ejemplo:

Sean p y q las proposiciones atómicas, con ellas puedes formar las proposiciones que se muestran a continuación, por medio de los diferentes conectivos lógicos.

p: 3 es divisor de 9

q: 9 es múltiplo de 3

¬p: 3 no es divisor de 9

p ∧ q: 3 es divisor de 9 y 9 es múltiplo de 3

p ∨ q: 3 es divisor de 9 o 9 es múltiplo de 3

p → q: si 3 es divisor de 9 entonces 9 es múltiplo de 3

1.3. Operaciones proposicionales

Las operaciones proposicionales se obtienen al combinar proposiciones simples que sirven para expresar afirmaciones más complejas, para ello, se hace uso de los conectivos lógicos. Dichas fórmulas las podemos denotar por A, B, C, ….

Por ejemplo, sean las proposiciones p y q.
p: 150 es un número par
q: 300 es múltiplo de 10

150 es un número par y 300 es múltiplo de 10
Las fórmulas u operaciones proposicionales que podemos formar son:

$$A = p \wedge q, \qquad B = \neg (p \wedge q)$$

Como puedes observar en el ejemplo, las operaciones proposicionales se forman combinando la negación, la conjunción, la disyunción exclusiva e inclusiva, la condicional o implicación y la bicondicional o doble implicación. Para poder operar con ellas, primero se definirá qué es una tabla de verdad para determinar en qué casos son verdaderas dichas fórmulas.

Para evaluar una fórmula u operación proposicional debes tomar en cuenta la fuerza de los términos de enlace. Primero debes encontrar el valor de verdad en el orden en que aparecen en las siguientes líneas.

$$\leftrightarrow$$
$$\rightarrow$$
$$\vee$$
$$\wedge$$
$$\neg$$

El bicondicional es más fuerte que todas las demás, por lo que es la primero que debes hacer, la condicional le sigue y debes determinar los valores de verdad de ésta, el tercer lugar lo ocupa la disyunción, el cuarto lugar la conjunción y por último, la negación.

En las fórmulas u operaciones proposicionales, la fuerza de los términos de enlace puede ser alterada por el uso de paréntesis, dejando fuera del paréntesis el término que se desea que sea el más fuerte.

Ejemplo:

- $p \wedge q \rightarrow r$ es una proposición condicional que con paréntesis, $p \wedge (q \rightarrow r)$, se transforma en una conjunción.
- $\neg p \vee r$ representa una disyunción, pero $\neg (p \vee r)$ con paréntesis, es una negación.

El primer paso que haces para saber cuál es el valor de verdad de una proposición, es distinguir cuál es el término de enlace dominante. Por ejemplo: $\neg (p \wedge q) \rightarrow p \vee s$ es una proposición condicional en donde el antecedente es una negación y el consecuente una disyunción. Para saber el valor de verdad de esta proposición, cuando p, q y s son todos falsos, primero debes conocer el valor de su antecedente y el de su consecuente; como el antecedente es la negación de una conjunción, primero se debe evaluar la conjunción y luego negarla. En la siguiente tabla se representa esto:

p	q	s	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$	$p \vee s$	$\neg (p \wedge q) \rightarrow p \vee s$
F	F	F	F	V	F	F

Esta tabla se simplifica si haces la evaluación justo debajo de cada uno de los términos de enlace, ahí se anota el valor resultante de la proposición.

1.3.1. Tablas de verdad

Para analizar los valores de verdad de las proposiciones se colocarán todas las posibilidades de verdad o falsedad en forma de una tabla.

Definición de tablas de verdad:
Todos los conectivos lógicos que se utilizan para proposiciones moleculares pueden colocarse en una tabla, a la que se denomina tabla de verdad. Ésta te permite saber si una proposición molecular es cierta o falsa, si conoces los valores de verdad de las proposiciones que la forman.

Además, las tablas de verdad se emplean en la lógica proposicional para indicar las diferentes interpretaciones de una operación proposicional y el resultado de las mismas.

1.3.2 Negación

Sea p una proposición, la notación con la que se representa la negación de p es ¬p. La negación se aplica a una proposición para cambiar el valor de verdad, si p es verdadera ¬p es falsa y si ¬p es falsa entonces p es verdadera.

p	¬p
V	F
F	V

Ejemplo:
Moisés obtuvo 10 de promedio.

Este enunciado es una proposición ya que podemos decir si es falso o verdadero.
La proposición que le corresponde al enunciado es:
p: Moisés obtuvo 10 de promedio.
Y su negación estará dada por:
¬p: Moisés no obtuvo 10 de promedio.
La tabla correspondiente a p y ⌐p es la siguiente:

p	¬p
V	F
F	V

p será verdadera cuando Moisés obtenga un 10 de promedio y falsa en el caso contrario. Por su parte, ¬p será verdadera cuando Moisés obtenga un promedio distinto a 10 (5, 6, 7, 8 y 9).

1.3.3. Conjunción

La conjunción (∧) es un conectivo que permite formar proposiciones compuestas a partir de dos o más proposiciones: $(p \wedge q)$. Para que la conjunción sea verdadera se debe de cumplir que cada una de ellas sea verdadera y viceversa. Si uno de los términos de la conjunción es falso, es suficiente para que la conjunción sea falsa.

Si en el lenguaje natural identificas los términos**: y, pero, no obstante,** y **sin embargo,** puedes usar la conjunción para formar una proposición molecular.

La tabla de verdad para la conjunción viene dada por:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción es verdadera cuando los dos valores de verdad de las proposiciones son verdaderos, para los demás casos es falsa.

Ejemplo:
Pedro dice que su maestra es guapa y muy inteligente.

Analiza lo que dijo Pedro para establecer si es un mentiroso o si es honesto.
Primero observa que este enunciado está formado por dos proposiciones, las cuales son las siguientes:

p: La maestra es guapa.
q: La maestra es muy inteligente.

El conectivo lógico que une las proposiciones es la conjunción (∧). Analiza a continuación el valor de verdad, es decir, en qué momento es falso o verdadero.

Primeramente, piensa que p es verdadera, es decir, que la maestra es guapa, entonces, pueden pasar dos cosas:

- Que la maestra sea muy inteligente, con lo cual puedes decir que la conjunción es verdadera y, por lo tanto, Pedro es honesto.
- Que la maestra no sea muy inteligente, con lo que puedes decir que la conjunción es falsa, ya que la maestra es guapa y no es inteligente, por lo cual, Pedro mintió.

Por otra parte, supón que p es falsa, es decir, que la maestra no es guapa, entonces, puedes decir que Pedro miente porque en ambos casos una de las cosas que él aseguro es falsa, puesto que la maestra no es guapa, pero es muy inteligente.
La tabla de verdad correspondiente a la conjunción sería la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.3.4. Disyunción exclusiva e inclusiva

Existen dos tipos de disyunción las cuales se definen a continuación.

Disyunción inclusiva
Es aquella en la que puede ocurrir una de las proposiciones o ambas a la vez, y se denota por $p \vee q$.

Por ejemplo: la maestra es guapa o muy inteligente.

La tabla de verdad para la disyunción inclusiva es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observa que sólo es falso cuando los valores de verdad de las proposiciones son falsas.

Ejemplo:

Miguel usa camisa blanca o zapatos negros.

Demuestra el valor de verdad de este enunciado, para ello, establece cuándo se considera falso.

Primero representa el enunciado por medio de las siguientes proposiciones.

p: Miguel usa camisa blanca.

q: Miguel usa zapatos negros.

Ahora si ocurre p, es decir, si Miguel usa camisa blanca, entonces puede ocurrir que:

- q sea verdadera, es decir que Miguel usa zapatos negros, por lo que puedes decir que el enunciado es verdadero, ya que no hay ningún problema con el hecho que Miguel tenga zapatos negros y camisa blanca a la vez.
- q sea falsa, que por ejemplo, los zapatos de Miguel sean de otro color, en este caso, Miguel usa camisa blanca y esto no afecta el hecho que Miguel usa o no zapatos negros, por lo cual el enunciado es verdadero.

Si ocurre que p es falsa, es decir, que Miguel no usa camisa blanca, entonces puede ocurrir que:

- q sea verdadera, es decir que Miguel usa zapatos negros, este hecho permite que el enunciado sea verdadero, ya que usar zapatos negros no se ve afectado por no usar camisa blanca.

- q sea falso, es decir, que Miguel no usa zapatos negros afecta la veracidad del enunciado, ya que Miguel no usa camisa blanca, por esta razón la disyunción es falsa.

La tabla de verdad para el ejemplo es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción exclusiva

Es aquella que se presenta entre dos proposiciones que no pueden ocurrir simultáneamente, ya que de hacerlo, se presentaría una situación imposible, algo que no puede suceder; comúnmente se llama contradicción. Se denota $(p \vee q)$.

La tabla de verdad para la disyunción exclusiva es:

p	q	$p \vee q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	F

Observa que sólo es falso en el caso en que las dos proposiciones ocurren a la vez. Es decir, no pueden ocurrir al mismo tiempo, ni dejar de ocurrir las dos proposiciones.

Observa que en la tabla de valores de la disyunción exclusiva el valor de verdad es falso cuando las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad, para los demás casos son verdaderos, mientras que en la disyunción inclusiva los valores de verdad son falsos cuando los valores de las proposiciones son falsos.

Ejemplo:
La luz del baño está apagada o está encendida.
Separa el enunciado en proposiciones más simples:

p: La luz del baño está apagada.
q: La luz del baño está encendida.

Primero supón que p es verdadera, entonces, puede ocurrir que:

- q sea verdadera, lo cual significaría que la luz del baño está encendida, por lo cual la luz no está apagada, es decir, que no ocurre p, lo cual es falso ya que contradice la suposición que p es verdadera. Por lo tanto, el enunciado es falso.

- q sea falsa, es decir, que la luz del baño no está encendida, eso significa que está apagada, por lo cual la disyunción es verdadera ya que se comprueba p.

Ahora supón que p es falsa, entonces, puede ocurrir que:
- q sea verdadera, lo cual significaría que la luz del baño está encendida, si esto ocurre, entonces la luz de baño no debe estar apagada, lo cual es ¬p, por lo que la disyunción sería verdadera.
- q sea falsa, lo cual significa que la luz del baño no está encendida, es decir, que la luz del baño está apagada, esto significa que ocurre p, pero sabes de inicio que no ocurre p, por lo que la disyunción es falsa.

La tabla de verdad para el ejemplo es la siguiente:

p	q	$p \vee q$

V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.3.5. Condicional o implicación

Puedes conectar dos proposiciones p y q mediante el conectivo lógico al que se denomina condicional o implicación, y se denota por →. A p se le conoce como el antecedente y a q el consecuente. Los valores de verdad de la implicación o condicional $p \to q$ son todos verdaderos, excepto cuando p es verdadera y q es falsa.

La tabla de verdad de la implicación o condicional es:

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sólo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Ejemplo de la condicional o implicación:

Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos lados iguales.

p: un triángulo es isósceles
q: el triángulo tiene dos lados iguales

¿En qué momento es falso? Analiza todos los casos posibles:

Caso 1. Si p es verdadera y q es verdadera: es un triángulo isósceles y tiene dos lados iguales. El valor de verdad es verdadero, porque es cierto que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales.
Caso 2. Si p es verdadera y q es falsa: es un triángulo isósceles y no tiene dos lados iguales. El valor de verdad es falso, porque un triángulo isósceles tiene dos lados iguales.
Caso 3. Si p es falsa y q es verdadera: no es un triángulo isósceles y tiene dos lados iguales.
Caso 4. Si p es falsa y q es falsa: no es un triángulo isósceles y no tiene dos lados iguales.

Para el caso 3 y 4, no se dijo nada en caso de que no sea isósceles, por lo que no puedes decir que son falsos los valores de verdad. Por lo tanto, son verdaderos.

1.3.6. Condición suficiente y necesaria

Cuando tienes una condicional o implicación $p \rightarrow q$, p es una condición suficiente y q es una condición necesaria para p. En otras palabras, para que ocurra q es suficiente que ocurra p, y si ocurre p necesariamente ocurrirá q.

Si $p \rightarrow q$ es una implicación, entonces $q \rightarrow p$ es la recíproca, $\neg p \rightarrow \neg q$ es la inversa y $\neg q \rightarrow \neg p$ es la contrarrecíproca. Las tablas de verdad son:

Recíproca

p	q	$q \rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Inversa

p	q	$\neg p \rightarrow \neg q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Contrarrecíproca

p	q	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sólo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Los valores de verdad de la condicional o implicación $p \rightarrow q$ y de su contrarrecíproca $\neg q \rightarrow \neg p$ son los mismos para todos los valores p y q, es decir, son lógicamente equivalentes.

Retoma el ejemplo anterior:

Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos lados iguales.
p: un triángulo es isósceles.
q: el triángulo tiene dos lados iguales.

La tabla de verdad para la condicional o implicación y su contrarrecíproca tienen los mismos valores de verdad, observa las filas del mismo color en las siguientes tablas.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V

p	q	¬q	¬p	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V

F	F	V	F	F	V	V	V

1.3.7 Bicondicional o doble implicación

Una proposición bicondicional es verdadera si y sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Para denotar el bicondicional entre p y q se utiliza el símbolo $p \leftrightarrow q$ y se lee p si y sólo si q.

La tabla de valores para la bicondicional o doble implicación es:

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si las proposiciones tienen el mismo valor de verdad el resultado es verdadero y si los valores de verdad son diferentes el resultado es falso.

El bicondicional $p \leftrightarrow q$ puede expresarse como la proposición compuesta:
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

P	Q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Recuerda que en el condicional sólo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

La bicondicional o doble implicación es una proposición molecular, compuesta por dos proposiciones que pueden, a su vez, ser simples o compuestas. Es verdadera siempre que sus dos proposiciones tengan el mismo valor de verdad y es falsa en caso contrario.

Observa otro ejemplo en la asignatura de álgebra.

a es un número par si y sólo si $a = 2k$, para algún entero k

Analiza en casos la veracidad o falsedad de este enunciado, estableciendo las proposiciones que lo conforman de la siguiente manera:

p: a es un número par
q: $a = 2k$ para algún entero k

Supón que p es verdadera, es decir, que a es un número par, entonces:

- Si q es verdadera, entonces el enunciado es verdadero, ya que p y q son verdaderas.
- Si q es falsa, el enunciado será falso, ya que a es un número par y $a \neq 2k$ para cualquier k en los enteros, lo cual es imposible.

Ahora supón que p es falsa, es decir, que a es un número impar, entonces:

- Si q es verdadera, entonces, tendrás que $a = 2k$ para algún k en los enteros, es decir, que a es un número par, lo cual contradice la suposición y el enunciado es falso.
- Si q es falsa, entonces tendrás que $a \neq 2k$ para cualquier k, es decir, que k es un número impar, esto cumple con la suposición, por lo cual puedes concluir que en este caso el enunciado es verdadero.

A continuación, se muestra la tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F

F	V	F
F	F	V

Otra forma de representar los valores de V y F es utilizando 1 y 0 respectivamente, esta notación se llama **booleana**.

De esta manera, las tablas de los operadores lógicos quedarían de la siguiente manera:

p	¬p
1	0
0	1

Conjunción

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disyunción inclusiva

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disyunción exclusiva

p	q	p ⊻ q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Condicional o implicación

p	q	p → q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bicondicional o doble implicación

p	q	p ↔ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

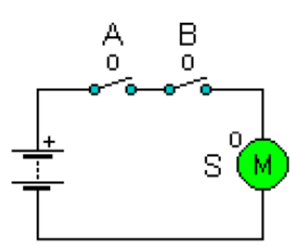
En la mayoría de los lenguajes de programación, el 0 y el 1 se traducen en *false* (falso) o *true* (verdadero) respectivamente.

¿Sabías qué?

La tabla de verdad

El objetivo de un sistema electrónico es producir un cierto resultado, al que se llama salida si se cumplen unas condiciones a las que se denominan entradas. Por ejemplo, a una máquina que funciona con un motor que puede ser peligroso, además del interruptor de encendido (A) se le añade otro interruptor de seguridad (B). El motor sólo debe arrancar cuando el interruptor está cerrado y el interruptor de seguridad también lo está. Este sería el esquema eléctrico de funcionamiento de la máquina.

Observa la tabla:



A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Si uno de los interruptores está cerrado (A = 1) y el otro también lo está (B = 1), entonces el motor se pondrá en marcha (S = 1). En caso de que A o B estén abiertos (valen 0), el motor seguirá apagado (S = 0).

A esta tabla, que muestra la relación entre el estado de las salidas y de las entradas de un sistema, se le llama tabla de la verdad.

Loureiro, M. (2011). *Lógica binaria*. España.

1.4. Lenguaje formal

Para cambiar expresiones, enunciados y argumentaciones del lenguaje natural al formal, se presenta la tabla siguiente, en la que se indica la operación proposicional que se va a utilizar de acuerdo con la expresión dada en lenguaje natural.

Conectivos lógicos	**Operación proposicional**	**Lenguaje natural**
Negación	¬p	No p No es cierto No es verdad que p Nunca p Es falso que p Es absurdo que p Carece de sentido que p es inconcebible que p no ocurre que p no es el caso que p es mentira que p es erróneo que p
Conjunción	p ^ q	p y q p aunque q p pero q p mas q p también q p sin embargo q

		p además q p del mismo modo q p al igual que q p así como q p no obstante q p tal como q p es compatible con q p incluso q p, q
Disyunción inclusiva	$p \vee q$	p o q p o también q quizás p quizás q p o también q p y/o q
Disyunción exclusiva	$p \veebar q$	o p o q o bien p o bien q p a menos que q a menos que q p salvo que q p a no ser que q p excepto que q
Implicación	$p \rightarrow q$	si p entonces q p implica q si p, q

		cuando p, q siempre que p, q cada vez que p, q q porque p con tal que p es obvio que q en caso que p tendrá sentido q en virtud que p es evidente q dado que p por eso q p es condición suficiente para que q q es condición necesaria para que p
Equivalencia	$p \leftrightarrow q$	p si y sólo si q p cuando y sólo cuando q p es equivalente a q p equivale a q p se define como q p es lo mismo que q p es idéntico a q p implica a q y q implica a p p es condición necesaria y suficiente para q

Ejemplos de cómo a partir del lenguaje natural puedes formalizar una operación lógica.

“Presta dinero a un enemigo y te lo ganarás; a un amigo y lo perderás”. *Benjamín Franklin*

Si lo divides en proposiciones simples:
p: presta dinero a un enemigo
q: te ganarás al enemigo
r: presta dinero a un amigo

s: perderás al amigo

En lenguaje lógico sería: $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$

"El que tiene suerte, encuentra en el yerno un hijo; el que no la tiene, pierde una hija". Epicteto

Las proposiciones simples son:
p: el que tiene suerte
q: encuentra en el yerno un hijo
r: pierde a una hija

En lenguaje lógico sería: $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$

1.5. Tautologías o contradicciones

Definición de tautología:
Se define como tautología a una fórmula proposicional A, que es válida si y sólo si es verdadera en todas sus interpretaciones.

Ejemplo::
Realiza la tabla de verdad de la siguiente proposición: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	(p ↔ q)	p → q	q → p	(p → q) ∧ (q → p)	(p ↔ q) ↔ (p → q) ∧ (q → p)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Definición de contradicción:

Una fórmula proposicional A es una contradicción si y sólo si es falsa en todas sus posibles interpretaciones. A una contradicción también se le conoce como inconsistente.

Ejemplo de contradicción:

Realiza la tabla de verdad de la siguiente proposición: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

p	q	p ↔ q	p →q	q → p	(p →q) ∧ (q → p)	¬ [(p →q) ∧ (q → p)]	(p ↔ q) ↔ ¬ [(p →q) ∧ (q → p)]
V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	F

Cuando trabajes el tema de reglas de inferencia, comprobarás si se trata de una tautología o una contradicción.

1.6. Cuantificadores

Los cuantificadores se utilizan para construir proposiciones a partir de funciones proposicionales, y esto se puede hacer a partir de una particularización o de una generalización.

Definición de función proposicional:

Una función proposicional p es una expresión descrita en función de algún parámetro x que satisface lo siguiente: cada vez que x se sustituye por una cadena de símbolos, p(x) se transforma en una proposición.

Ejemplo:

p(x) = “x es insecto”.

Es una función proposicional. La referencia a sustituir significa que puedes decir que p (hormiga) es verdadera, mientras que p (rana) es falsa.

$q(x) = \text{“}x - 2 \leq 7\text{”}$

También es una función proposicional. Observa que q(1) es verdadero porque al sustituir queda: $1 - 2 \leq 7,\ -1 \leq 7$. Pero q(10) es falsa porque al sustituir se tiene: $10 – 2 \leq 7, 8 \leq 7$, lo cual sabes que no es cierto.

Definición de cuantificador universal:

La proposición $\forall x\ p(x)$ se lee “para todo x p(x)”, y es verdadera siempre y cuando p(x) sea verdadera para cualquier cadena de símbolos que se sustituyen en x.

Definición de cuantificador existencial:

La proposición $\exists x\ p(x)$, que se lee “existe x, tal que p(x)”, es verdadera cuando se puede encontrar por lo menos una cadena de símbolos que hace p(x) verdadero.

Retoma el ejemplo anterior, p(x) = “x es insecto”. Analiza si se cumple que $\exists x\ p(x)$. Tienes por lo menos un x que hace a p(x) verdadera. Por ejemplo x = avispa, cumple que p (avispa) es verdadera. De esta manera puedes decir que $\exists x\ p(x)$ es verdadera.

1.7. Reglas de inferencia

Cuando se habla de inferencias se refiere a obtener conclusiones a partir de premisas.

Si las conclusiones se desprenden de las premisas, es decir, si las premisas forman un buen fundamento de la conclusión, de manera que afirmar la verdad de las premisas garantiza la afirmación que también la conclusión es verdadera, entonces el razonamiento es correcto. En caso contrario es incorrecto.

Definición de inferencia: es una operación lógica que consiste en obtener la verdad de una proposición, conocida como conclusión, a partir de la verdad de una o más proposiciones llamadas premisas.

También se puede llamar **argumentación** al proceso de inferencia, a una misma proposición le pueden corresponder varios enunciados que significan lo mismo, por lo que varias inferencias pueden corresponder a un mismo argumento.

Reglas de inferencia

Las reglas de inferencia usan dos tipos de elementos, los datos (hechos o evidencia) y el conocimiento (el conjunto de reglas almacenadas en una base de ideas), para obtener nuevas conclusiones o hechos. Las conclusiones pueden clasificarse en dos tipos: simples o compuestas. Las primeras son las que resultan de una regla, mientras que las segundas, resultan de más de una. Para obtener conclusiones, puedes utilizar diferentes tipos de reglas, las cuales verás más adelante.

En la presente sección desarrollarás las reglas de inferencias más utilizadas para obtener la tautología de un sistema de premisas.

***Modus ponens* (Razonamiento directo)**

Esta regla de inferencia se utiliza para obtener una conclusión de la forma entonces q, a partir de un sistema de premisas, las cuales son de la forma si p entonces q, y p, su representación simbólica es:

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

Para ejemplificar la regla *Modus ponens*, utiliza el siguiente enunciado:

Si compro un automóvil, entonces pagaré tenencia.

p: Comprar un automóvil.
q: Pagar tenencia.

Utiliza el sistema de premisas para verlo más claro, de la siguiente manera:

Premisa 1: Si compro un automóvil, entonces pagaré tenencia.

Premisa 2: Compro un automóvil.

Conclusión: Pagaré tenencia.

A esta forma de representar las proposiciones se le conoce como sistema de premisas, ya que éstas se agrupan respetando la jerarquía que exija la(s) regla(s) de inferencia que se va a utilizar.

La representación simbólica del *Modus ponens* es:

Premisa 1: $p \rightarrow q$

Premisa 2: p

$\therefore \quad q$

Se representan las premisas y la conclusión del *Modus ponens* mediante operaciones lógicas de la siguiente manera:

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

Con esto, puedes obtener el valor de verdad de la regla de inferencia *Modus ponens*, la cual se presenta a continuación:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

En la tabla se puede apreciar claramente que es una tautología, por esa razón es válido utilizar esta regla de inferencia.

Modus tollens **(Razonamiento indirecto)**

Esta regla de inferencia se utiliza para obtener una conclusión de la forma entonces ¬p a partir de un sistema de premisas de la forma si p, entonces q, y no q.

Se representa simbólicamente de la siguiente manera:

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$$

Observa que la conclusión a la que se llega utilizando la regla *Modus tollens* es la negación de una premisa, mientras que en el *Modus ponens* es a una premisa que no está negada. Por esta razón *Modus tollens* es conocida como una regla de inferencia que utiliza un método de razonamiento indirecto, mientras que en el *Modus ponens* es directo.

Para ejemplificar esta regla de inferencia utiliza el siguiente enunciado:

Si tomé mi desayuno tengo energía.

Las proposiciones que conforman el enunciado son:

p: Tomé mi desayuno.
q: Tengo energía.

A continuación, se representa mediante el sistema de premisas:

Premisa 1: Si tomé mi desayuno tengo energía.

Premisa 2: No tengo energía.

Conclusión: No tomé mi desayuno.

La representación simbólica del *Modus tollens* es:

Premisa 1: $p \rightarrow q$

Premisa 2: $\neg q$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\neg p$$

El significado que tiene este sistema de premisas en lenguaje común, basándose en el enunciado que se propone es:

Si tomé mi desayuno tengo energía. No tengo energía, por lo que no tomé mi desayuno.

La tabla de verdad que representa el enunciado es la siguiente y en la última columna se encuentra su fórmula proposicional.

p	Q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

En la siguiente tabla se resumen las reglas de inferencia:

Regla de inferencia	Representación simbólica
Modus ponens	$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad} \\ q \end{array}$
Modus tollens	$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ \neg p \end{array}$
Doble negación	$\dfrac{\neg(\neg p)}{p}$
Regla de simplificación	$\dfrac{p \wedge q}{p}$ o $\dfrac{p \wedge q}{q}$
Regla de adjunción	$\dfrac{p}{p \wedge q}$ o $\dfrac{q}{p \wedge q}$
Ley del silogismo hipotético	$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ p \rightarrow r \end{array}$

Ley de adición	$\dfrac{p}{p \vee q}$ o $\dfrac{q}{p \vee q}$
Leyes de Morgan	$\dfrac{\neg(p \wedge q)}{\neg p \vee \neg q}$ $\dfrac{\neg(p \vee q)}{\neg p \wedge \neg q}$
Ley de simplificación disyuntiva	$p \vee q$ $p \to r$ $\underline{q \to r}$ r
Ley del silogismo disyuntivo	$p \to q$ $r \to s$ $\underline{p \vee r}$ $q \vee s$
Leyes conmutativas	$\dfrac{p \wedge q}{q \wedge p}$ $\dfrac{p \vee q}{q \vee p}$
Leyes de las proposiciones bicondicionales	a. $\dfrac{p \leftrightarrow q}{p \to q}$ b. $\dfrac{p \leftrightarrow q}{q \to p}$ c. $\dfrac{p \leftrightarrow q}{(p \to q) \wedge (q \to}$ d. $p \to q$ $\underline{q \to p}$ $p \leftrightarrow q$

Doble negación

La Doble negación consiste en negar doblemente alguna premisa, realiza un ejemplo para ver la consecuencia de esta regla. Sea el enunciado:

Omar es mexicano.

Como el enunciado está compuesto por una sola premisa, utiliza una sola literal para representarlo, esto es:

p: Omar es mexicano.

A partir de esta premisa puedes desarrollar el significado de ¬ (¬p)

<u>Premisa 1: No es cierto que Omar no es mexicano.</u>

Conclusión: Omar es mexicano.

El significado de ¬p sería negar la premisa 1, de lo cual resulta:

¬p: Omar no es mexicano.

Ahora obtén la segunda negación de p, la cual es:
¬ (¬p): No es cierto que Omar no es mexicano.

La representación simbólica de la doble negación es la siguiente:

Premisa 1: $\underline{\neg(\neg p)}$
∴ p

Esta última significa que es falso que Omar no sea mexicano, lo cual es que Omar tiene que ser mexicano, es decir, p. La tabla de verdad para este enunciado es:

p	¬p	$\neg(\neg p)$	$\neg(\neg p) \rightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

Como puedes observar en la tabla anterior, la premisa p tiene el mismo valor de verdad que ¬ (¬p), y su implicación arroja una tautología. De esta manera se comprueba la veracidad de la conclusión a la cual has llegado con el enunciado Omar es mexicano.

Esta regla de inferencia la utilizas de manera cotidiana en diversas situaciones de la vida y sin darte cuenta la empleas de manera errónea. Por ejemplo:

- ¿No quieres agua?
- ¿No tienes sueño?
- ¿No quieres comer?
- ¿No traes dinero?

Éstas son algunas de las preguntas que haces y te hacen regularmente. Para expresar que no es necesario su ofrecimiento contestas que no, la respuesta negativa a estas preguntas la vuelven una doble negación y por lo consiguiente su significado sería que aceptas el ofrecimiento. Es decir:

- ¿No tienes sueño?, no Significa: Si tengo sueño.
- ¿No has visto a Carlos?, no Significa: Si lo vi.
- ¿No estudiaste?, si Significa: No estudié.

Hay una gran variedad de estas preguntas, pero por convención personal las empleas erróneamente. Esto no afecta mucho dentro de la sociedad, pero dentro de las áreas de la ciencia es diferente, porque tomar como negativa una doble negación siempre te llevará a un resultado equivocado, por eso es que se enfatiza en esta regla, aunque aparenta ser muy sencilla, también es muy importante.

Regla de simplificación

La Regla de simplificación parte de una conjunción compuesta por dos proposiciones que son verdaderas, por esto se pueda simplificar o bien reducir a una u otra de las proposiciones que la componen. Se representa simbólicamente de la siguiente manera:

$$(p \wedge q) \rightarrow p \qquad \text{o} \qquad (p \wedge q) \rightarrow q$$

Es de suma importancia recordar que esta regla puede ser aplicada siempre que la conjunción este compuesta por proposiciones que sean verdaderas, ya que en caso contrario el resultado que se obtendrá será una contradicción, por ejemplo:

3 es mayor que 2 y 9 es mayor que 12

Es fácil notar que la conjunción es falsa ya que “9 no es mayor que 12”, sin embargo, si aplicas la Regla de simplificación obtienes las siguientes proposiciones:

p: 3 es mayor que 2
q: 9 es mayor que 12

Si ocurre que p es verdadero, significaría que el enunciado es cierto para todas las proposiciones que la componen y esto es una contradicción ya que q es falsa.

El ejemplo anterior muestra porque tienen que ser verdaderas las proposiciones que componen una conjunción para que se pueda aplicar la simplificación sobre ella.
Ve el siguiente ejemplo:

Carlos es hermano de Pedro y de José.

p: Carlos es hermano de Pedro.
q: Carlos es hermano de José.

Ya que tienes las proposiciones que componen el enunciado, lo representas mediante el sistema de premisas.

Premisa 1: Carlos es hermano de Pedro y José.
Conclusión: Carlos es hermano de Pedro.

La conclusión también puede ser Carlos es hermano de José, ya que ambas, tanto p como q, son verdaderas.

A continuación, se presenta la forma simbólica de la simplificación:
Premisa 1: $p \wedge q$
$\therefore$ p

En lenguaje natural el enunciado sería:

Carlos es hermano de Pedro y José, por lo que Carlos es hermano de José.

La tabla de verdad que corresponde a la regla de la simplificación es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Como el resultado es una tautología, entonces, la simplificación de la conjunción es verdadera.

Regla de adjunción

La adjunción parte de dos premisas que son verdaderas y se llega a la conclusión de una conjunción, la cual también es verdadera. De igual manera a la simplificación, las proposiciones que componen a la adjunción deben ser verdaderas, ya que de lo contrario el resultado de la conjunción es una contradicción. La representación simbólica de la adjunción es:

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$$

Desarrolla el siguiente ejemplo para que esta regla sea más fácil de comprender.

Sean:
p: Comemos a las cuatro.
q: Descansamos a las cuatro.

Representa estas premisas mediante el siguiente sistema:
Premisa 1: Comemos a las cuatro.
Premisa 2: Descansamos a las cuatro.

Conclusión: Comemos a las cuatro y descansamos.

A continuación, se presenta la representación simbólica de la adjunción:

Premisa 1: p

Premisa 2: $\underline{\quad q \quad}$

$\therefore \quad p \wedge q$

El significado del enunciado es:

Comemos a las cuatro, descansamos a las cuatro, entonces comemos a las cuatro y descansamos.

Nota que p y q son verdaderas, entonces su disyunción también será verdadera, esto es posible gracias a la regla de adjunción.

Ley del silogismo hipotético

La Ley del silogismo hipotético se puede aplicar cuando se presentan dos implicaciones que están relacionadas entre sí, en el sentido que el antecedente de una de ellas es el consecuente de la otra.
La representación simbólica del silogismo hipotético es la siguiente:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{\quad q \rightarrow r \quad} \\ p \rightarrow r \end{array}$$

Es importante observar que hay dos premisas compuestas por una implicación, el resultado se reduce a analizar una sóla conclusión compuesta por una implicación simple.

En el siguiente ejemplo se muestra cómo se usa esta regla y la manera en que ayuda a resumir un conjunto de proposiciones con ciertas características en común.

Si compro un automóvil tendré que comprar gasolina, si voy a comprar gasolina entonces gastaré dinero.

Las siguientes proposiciones son las componentes del enunciado anterior:
p: Compro un automóvil.

q: Comprar gasolina.

r: Gastaré dinero.

El sistema de premisas que representa el enunciado es:

Premisa 1: Si compro un automóvil tendré que comprar gasolina.

Premisa 2: Si voy a comprar gasolina entonces gastaré dinero.

Conclusión: Si compro un automóvil entonces gastaré dinero.

Del sistema anterior se obtiene la siguiente representación simbólica:

Premisa 1: $p \rightarrow q$

Premisa 2: $q \rightarrow r$

$\therefore$ $p \rightarrow r$

A partir del sistema de premisas anterior puedes afirmar lo siguiente:

Si compro un automóvil tendré que comprar gasolina, si voy a comprar gasolina entonces gastaré dinero, por lo tanto, si compro un automóvil gastaré dinero.

La siguiente tabla representa el silogismo hipotético:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Como el resultado de la tabla es una tautología, entonces, la regla del silogismo hipotético se cumple.

Ley de la adición

Para que la Ley de la adición se verifique, se requiere que la proposición sobre la que se aplique sea verdadera, sin importar como sea la proposición que sea agregada. La regla de la adición simbólicamente se expresa de la siguiente manera:

$$p \rightarrow (p \vee q) \quad \text{o también como} \quad q \rightarrow (p \vee q)$$

La conclusión que se obtiene al utilizar la regla de la adición es una disyunción compuesta por dos proposiciones, las cuales pueden ser simples o compuestas. Como no se ha presentado algún ejemplo de proposiciones compuestas, has el siguiente:

Voy a estudiar y a obtener un diez.

Las proposiciones que componen el enunciado son:
p: Voy a estudiar.
q: Voy a obtener un diez.
Agrega la siguiente proposición:
r: Cenaré muy rico.

El sistema de premisas que utilizarás es el siguiente:

Premisa 1: Voy a estudiar y a obtener un diez.
Conclusión: Voy a estudiar y a obtener un diez, o cenaré muy rico.

A continuación, está la representación simbólica de las premisas para aplicar la Ley de la adición al enunciado propuesto.

Premisa 1: $p \wedge q$
$\therefore \quad (p \wedge q) \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$

En lenguaje natural, las premisas y conclusión del enunciado son:

Si voy a estudiar y a obtener un diez, luego, voy a estudiar y a obtener un diez o cenaré muy rico.

La siguiente tabla muestra los valores que toman las premisas del enunciado:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$(p \wedge q) \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V

Tal y como puedes apreciar en la tabla, la conclusión es una tautología, lo cual demuestra que es válida la Ley de la adición.

Leyes de Morgan

Las Leyes de Morgan están compuestas por dos reglas que se aplican a la conjunción y a la disyunción. Consisten en negar las proposiciones de la conjunción convirtiéndola en una disyunción y/o negar las proposiciones de la disyunción convirtiéndolas en una conjunción. Su representación simbólica es la siguiente:

$\neg (p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ y/o $\neg (p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Desarrolla un ejemplo de las Leyes de Morgan.

No es cierto que era su esposa y tenía tres hijos.

Las proposiciones que componen este enunciado son:

p: Era su esposa

q: Tenía tres hijos

El sistema de premisas que representa al enunciado es:

Premisa 1: No es cierto que era su esposa y tenía 3 hijos.

___

Conclusión: No es cierto que era su esposa o no es cierto que tenía tres hijos.

La representación simbólica de la Ley de Morgan es la siguiente.

Premisa 1: $\neg\,(p \wedge q)$

___

$\therefore$ $\neg p \vee \neg q$

El sistema de premisas y la conclusión significan:

No es cierto que era su esposa y tenía tres hijos, luego no era su esposa o no tenía tres hijos.

La tabla correspondiente a la Ley de Morgan es la siguiente:

p	q	p ∧ q	¬p	¬q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Como puedes observar, el resultado es una tautología, lo cual demuestra que la Ley de Morgan se verifica. Para verificar que se cumple con la negación de la disyunción, simplemente se cambian las conjunciones por disyunciones y viceversa en el enunciado que se desarrolló como ejemplo. La regla de inferencia de Morgan se conoce como Ley de Morgan porque también se verifica la regla:

$$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg (p \wedge q)$$

Ley de la simplificación disyuntiva

Esta regla de inferencia permite simplificar tres proposiciones compuestas a una proposición simple. Consiste en aplicar las proposiciones que componen una disyunción como antecedentes de dos implicaciones lógicas que tienen el mismo consecuente, con esto se obtiene una simple conclusión formada por el consecuente de las implicaciones. Su representación simbólica es:

$$((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$$

Un ejemplo de cómo se emplea esta regla se presenta a continuación:
Voy a nadar o voy a correr, y si voy a nadar hago ejercicio, y si voy a correr hago ejercicio.

Las proposiciones del enunciado anterior son:
p: Voy a nadar.
q: Voy a correr.
r: Hago ejercicio.

El sistema de premisas que lo representa es:

Premisa 1: Voy a nadar o voy a correr.
Premisa 2: Si voy a nadar hago ejercicio.
Premisa 3: Si voy a correr hago ejercicio.

Conclusión: Hago ejercicio.

La representación simbólica es la siguiente:

Premisa 1: $p \vee q$

Premisa 2: $p \rightarrow r$

Premisa 3: $q \rightarrow r$

____

$\therefore$ r

En lenguaje natural esta premisa es:

Si voy a nadar o voy a correr. Si voy a nadar hago ejercicio, y si voy a correr hago ejercicio, por lo tanto, hago ejercicio.

La tabla de verdad de esta regla es:

p	q	r	$p \vee q$	^	$p \rightarrow r$	^	$q \rightarrow r$	$((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F	V	V

Resulta una tautología, por esto la simplificación disyuntiva puede ser usada como una regla de inferencia.

Ley del silogismo disyuntivo

El silogismo disyuntivo se compone de tres premisas, dos implicaciones y una disyunción, cuyos elementos son los antecedentes de las implicaciones y su conclusión consta de una disyunción formada por los consecuentes de dichas implicaciones. Lo que esta regla de inferencia demuestra es que al tener dos relaciones causa – efecto (implicación), se puede establecer una disyunción entre las causas y relacionarla de alguna manera con una disyunción de los efectos. La representación simbólica del silogismo disyuntivo está dada por:

$$((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (q \vee s)$$

El ejemplo que se presenta a continuación te permitirá entender mejor esta regla de inferencia.

Si entro al mar entonces me mojo, y si me quedo en la arena entonces me aburro y, entro al mar o me quedo en la arena.

Asignamos al enunciado las siguientes proposiciones:
p: Entro al mar.
q: Me mojo.
r: Me quedo en la arena.
s: Me aburro.

Las premisas que componen al enunciado anterior son:

Premisa 1: Si entro al mar entonces me mojo.
Premisa 2: Si me quedo en la arena entonces me aburro.
Premisa 3: Entro al mar o me quedo en la arena.

Conclusión: Me mojo o me aburro.

La representación del enunciado por medio de un sistema de premisas es:

Premisa 1: $p \rightarrow q$
Premisa 2: $r \rightarrow s$
Premisa 3: $p \vee r$
$\therefore$ $q \vee s$

El enunciado tiene el siguiente significado en lenguaje natural:

Si entro al mar entonces me mojo, y si me quedo en la arena entonces me aburro, y, entro al mar o me quedo en la arena, entonces, me mojo o me aburro.

La siguiente tabla de verdad muestra el valor que tiene la Ley del silogismo disyuntivo:

p	q	r	s	$p \to q$	^	$r \to s$	^	$p \vee r$	→	$q \vee s$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	F	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F

Como puedes observar en la tabla, la Ley del silogismo disyuntivo es una tautología, por lo tanto, es una regla de inferencia válida.

Leyes conmutativas

Las Leyes conmutativas son válidas para la conjunción y la disyunción. Sus representaciones simbólicas son las siguientes.

$p \wedge q \ \to \ q \wedge p$ $\qquad$ $p \vee q \ \to \ q \vee p$

Un ejemplo de Ley conmutativa es:

Tomaré cálculo y álgebra lineal.

Las proposiciones que componen este enunciado son:
p: Tomaré cálculo.
q: Tomaré álgebra lineal.

El sistema de premisas es el siguiente:
Premisa 1: Tomaré cálculo y álgebra lineal.
____
Conclusión: Tomaré álgebra lineal y cálculo.

Simbólicamente se representa de la siguiente manera:
Premisa 1: $p \wedge q$
____
$\therefore$ $q \wedge p$

La tabla de verdad en las Leyes conmutativas es exactamente igual tanto en las premisas como en la conclusión, por esta razón se omite su representación. La Ley conmutativa aplicada a la disyunción es similar a la aplicada en la conjunción, la única diferencia es que se sustituye el operador de conjunción por el de disyunción y la tabla de verdad es la equivalente a la disyunción entre dos proposiciones.

Ley de las proposiciones bicondicionales

Estas leyes ya las utilizaste en la sección de condicional, condición necesaria y suficiente y bicondicionalidad, por esta razón no las utilizarás en esta sección, sin embargo, puedes encontrarlas en la tabla de reglas de inferencias.

Como pudiste apreciar a lo largo de esta sección, las reglas de inferencia son la herramienta más indispensable que tienes hasta el momento para encontrar sentido a las diferentes proposiciones que se te presenten, tanto en la vida diaria como en las áreas de las ciencias. Es necesario mencionar que el propósito del uso de las reglas de inferencia es reducir de manera más adecuada un conjunto de premisas, objeto de estudio, para que sea posible encontrar de manera lógica y sencilla las conclusiones de dichas proposiciones.

Cierre de la unidad

Al finalizar esta unidad, habrás adquirir la capacidad para interpretar situaciones de la vida cotidiana en un lenguaje lógico por medio de proposiciones y conectivos lógicos, y de esta manera encontrar la veracidad o falsedad de dichas situaciones a través de la aplicación de las reglas de inferencia y las tablas de verdad.

Esta unidad te sirve como base para abordar la Unidad 2, ya que las demostraciones se realizan mediante un lenguaje simbólico y lógico que proviene de enunciados, los cuales de igual manera se deben clasificar en premisas.

De la misma manera, el conocimiento de la unidad 2 te llevará a la Unidad 3, en donde se estudiarán las operaciones de conjuntos, las cuales se realizan por medio de conectivos lógicos y cada conjunto debe ser interpretado de alguna manera como una premisa.

Recursos didácticos

Para finalizar, se recomiendan estas páginas que brindan información sobre todo lo que aprendiste en la unidad. Se trata de un tutorial de lógica, en él puedes apoyarte para reforzar los conocimientos obtenidos.

Matemáticas profe Alex. (30 de abril de 2021). Tablas de verdad – Lógica proposicional. [Archivo de Vídeo]. Youtube.https://www.youtube.com/watch?v=vKe0UKSpNQQ&list=PLeySRPnY35dHBYcVHPisjBCVHBa954rMZ

Y tres videos de inferencia lógica:

MathSalomon. (8 de enero de 2011). Inferencia Lógica – part 01. [Archivo de Vídeo]. YouTube. http://www.youtube.com/watch?v=ZPWexIDBig4

MathSalomon. (8 de enero de 2011). Inferencia Lógica – part 02. [Archivo de Vídeo]. YouTube. http://www.youtube.com/watch?v=_afMBdpxF2A

MathSalomon (9 d enero de 2011). Inferencia Lógica – part 03. [Archivo de Vídeo]. YouTube. http://www.youtube.com/watch?v=huY7WsQzMQo

Fuentes de consulta

Básica

- Kisbye, P. (2008). *Elementos de lógica y teoría de conjuntos.* Colombia. Disponible en https://fcen.uncuyo.edu.ar/upload/elementos-de-logica-y-teoria-de-conjuntos-kisbye-tiraboschi.pdf
- Suppes, P.; Hill, S. (1988). *Primer curso de lógica matemática.* Colombia: editorial Reverte.
- Villalobos, N. (2006). *Lógica proposicional.* Venezuela. Disponible en http://webatario.blogspot.com/2008/02/proposicin-lgica.html