



Matemáticas

Geometría

Segundo semestre

Unidad 2. Triángulos

Clave

05141208/06141208

Universidad Abierta y a Distancia de México





Unidad.2 Triángulos

Índice

Presentación	4
Competencia específica	5
Logros	5
Unidad 2. Triángulos	6
2.1. Ángulos y triángulos	6
2.1.1. Más sobre ángulos	7
2.1.2. Propiedades angulares de los triángulos	15
2.2. Propiedades del triángulo	27
2.2.1. Congruencia de triángulos.....	27
2.2.2. Criterios de congruencia.....	29
Cierre de la unidad	39
Recursos didácticos	40
Fuentes de consulta.....	41

Figura 3. Orientación angular positiva y negativa	7
Figura 4. Ángulos adyacentes y suplementarios.....	9
Figura 5. Recta horizontal	9
Figura 6. Rectas, ángulos correspondientes	11
Figura 7. Ángulos externos.....	12
Figura 8. Representación de ángulos.....	13
Figura 9. Ángulos paralelos suplementarios	14
Figura 10. Representación gráfica	14
Figura 11. Polígono de tres lados.....	15
Figura 12. Mediana	16
Figura 13. Ortocentro.....	16
Figura 14. Bisectriz	16
Figura 15. Mediatriz.....	17
Figura 16. Ángulos internos	17
Figura 17. Ángulos exteriores e interiores.....	18
Figura 18. ángulos exteriores.....	19
Figura 19. triángulo rectángulo.....	21
Figura 20. Bisectriz	22



Unidad.2 Triángulos

Figura 21. Incentro del Triángulo.....	23
Figura 22. Bisectrices de ángulos interiores y exteriores	25
Figura 23. Lados homólogos y ángulos homólogos	28
Figura 24. Paralelogramo	28
Figura 25. Criterio de lado- lado- lado	30
Figura 26. Triángulo a partir del vértice C.....	31
Figura 27. Demostración ángulos congruentes	32
Figura 28. Congruencia (Lado -Ángulo - Lado).....	33
Figura 29. Congruencia de dos triángulo	35
Figura 30. triángulos ABC y DEF	35
Figura 31. Triángulo CAB y FDE	36
Figura 32. Triángulo isósceles	37



Presentación

En la unidad anterior definimos al triángulo como un polígono de tres lados, formalmente se pueden dar diferentes formas de definir el concepto de triángulo. Pero se eligió esta línea porque lo primero que notamos de un triángulo son sus lados, por ello es más natural presentar una definición en función de sus lados que otra. Independientemente del aspecto formal de la definición de triángulo, los usos que tienen en la práctica el triángulo son muy variados, los ejemplos más recurrentes están en las formas triangulares de las cuales disponen los arquitectos para diseñar una estructura. Los ingenieros dan buen uso de este objeto geométrico con la intención de desarrollar y crear todo tipo de objetos de uso cotidiano y en muchas de las aplicaciones que implementan, los fundamentos de las propiedades de los triángulos están presentes.

Anteriormente aprendiste los principios básicos que vamos a usar en el transcurso de esta asignatura. Ahora podrás observar con mayor detalle los procesos deductivos que se implementan en las matemáticas.

Dentro de esta unidad se abordarán temas que harán uso de los postulados y definiciones que se determinaron en la unidad pasada, deberás poner especial atención sobre los detalles de las demostraciones de los teoremas, lemas y corolarios que se presentan aquí, porque las actividades programadas incluyen algunas demostraciones.

Antes de abordar las propiedades más importantes de esta unidad referente a los criterios de congruencia de triángulos, los cuales se toman en la sección 2.2, veremos algunas propiedades más sobre ángulos que se relacionan con las vistas en la unidad anterior y que tienen como eje principal el paralelismo y la perpendicularidad entre ángulos. Esto nos permite comprender más lo que llamamos ángulos internos y externos de un triángulo; lo que nos prepara el terreno para avanzar hacia los criterios de congruencia de triángulos.



Unidad.2 Triángulos

En pocas palabras, los triángulos dan la base general para el estudio y la construcción de los objetos geométricos más fundamentales. Por ello en esta unidad retomaremos las propiedades vistas en la unidad 1 y las aplicaremos en ésta para descubrir las principales y más importantes propiedades que guardan los triángulos.

Competencia específica

Utilizar las definiciones y teoremas del triángulo para resolver problemas de propiedades triangulares, utilizando el concepto de congruencia de triángulos.

Logros

- Aplica las propiedades de los triángulos.
- Resuelve problemas que impliquen el uso de las definiciones y teoremas de ángulos para diversos triángulos.
- Resuelve problemas que impliquen el uso de criterios de congruencia en triángulos.



Unidad 2. Triángulos

En la unidad anterior definimos los aspectos básicos de ángulos y triángulos. En esta unidad utilizaremos estas definiciones para desarrollar nuevas proposiciones que nos permitan deducir los criterios sobre congruencias de triángulos, el cual es el tema principal de esta unidad.

Primero definiremos algo más sobre ángulos, como ángulos paralelos y perpendiculares, esto nos permitirá definir posteriormente nociones como la bisectriz y el incentro o la mediatriz y el circuncentro, entre otros.

Hecho esto, podrás adentrarte en la formalización de los criterios de congruencia de triángulos. Iniciaremos demostrando el criterio de Lado-Lado-Lado, porque nos parece que cuando identificas dos triángulos, casi de forma natural el cerebro compara ambos por medio de los lados, si parecen tener la misma longitud los lados de ambos triángulos, entonces suponemos que son iguales, de esta forma al demostrar este criterio pasamos a los criterios de Lado-Ángulo-Lado y Ángulo-Lado-Ángulo, y con eso concluimos la unidad.

2.1. Ángulos y triángulos

Vamos a recordar algunas propiedades de los ángulos en esta sección y descubriremos nuevas que nos permitirán entender mejor todo lo que tenemos por delante en cuanto a los triángulos se refiere.

Es importante destacar que las propiedades de los ángulos que veremos en esta sección se derivan de las propiedades que ya discutimos en la unidad anterior, por ello es de suma importancia que se ponga especial atención en la forma en la cual se derivan las propiedades angulares en esta parte del texto, porque éstas mismas darán sustento a otras propiedades que se mostrarán y están relacionadas directamente con las propiedades de los triángulos.



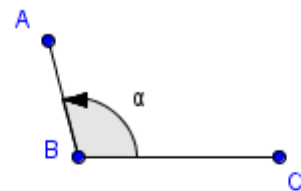
Unidad.2 Triángulos

A estas alturas, ya habrás comprendido que la geometría es una estructura matemática, en la cual se dan postulados y propiedades con las cuales se derivan más propiedades, que luego servirán para dar apoyo a otras áreas de las matemáticas puras y aplicadas. Entonces, estás frente a una herramienta que te dará la posibilidad de desarrollar tus habilidades como matemático, para aplicarlas a lo largo de esta asignatura y otras tantas.

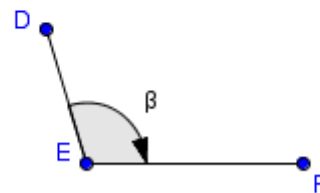
2.1.1. Más sobre ángulos

Los ángulos, como te pudiste dar cuenta, se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj, algunos lo llaman sentido anti-horario. Para dar un aspecto formal a las medidas angulares vamos a definir la orientación de los ángulos.

Definición 2.1 Llamaremos orientación angular positiva a un ángulo que tiene sentido contrario a las manecillas del reloj. Por otro lado, se denominará orientación angular negativa a un ángulo que tiene el mismo sentido de las manecillas del reloj.



Orientación Angular Positiva



Orientación Angular Negativa

Figura 1. Orientación angular positiva y negativa

Nota: Si el ángulo se escribe $\sphericalangle CBA$ siguiendo la figura, entonces este ángulo tiene orientación angular positiva, si se denota $\sphericalangle ABC$ entonces se dice que el ángulo tiene orientación angular negativa.



Unidad.2 Triángulos

Con esta definición podemos proponer nuevas propiedades para los ángulos que tienen que ver con la operación de ángulos. Entonces si tenemos a un ángulo $\sphericalangle ABC$ como ya se definió en el capítulo anterior, llamamos a este ángulo α , tal que se escribe $\sphericalangle ABC = \alpha$. De igual forma la medida de un ángulo se escribe $m(\alpha)$: por ejemplo; si el ángulo mide 45 grados entonces, $m(\alpha) = 45^\circ$.

Podemos dar ahora nombre a las operaciones angulares.

- Sean dos ángulos α y β , a la suma $m(\alpha) + m(\beta)$ se le denomina la adición angular.
- Sean dos ángulos α y β , a la resta $m(\alpha) - m(\beta)$ se le denomina la diferencia angular.
- Sean dos ángulos α y β , al producto $m(\alpha) \times m(\beta)$ se le denomina el producto angular.
- Sean dos ángulos α y β , al cociente $m(\alpha) \div m(\beta)$ se le denomina el cociente angular.

Las operaciones son las usuales entre números reales.

Si recuerdas, definimos lo que es un ángulo recto, ángulos suplementarios y bisectrices ¿cómo se combinan estas definiciones para crear una nueva propiedad? Veamos entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.1 Sean dos ángulos adyacentes y suplementarios α y β , las bisectrices de ambos ángulos forman un ángulo recto.

Demostración. Como en todas las demostraciones, primero debemos identificar las hipótesis del teorema:

Hipótesis.



Unidad.2 Triángulos

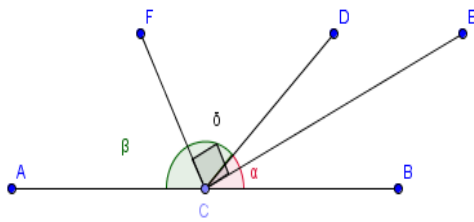


Figura 2. Ángulos adyacentes y suplementarios

1. Los ángulos α y β son adyacentes y suplementarios.
2. Ambos ángulos tienen bisectrices.

Tesis.

Lo que se desea demostrar entonces es que el ángulo que forman las bisectrices de los ángulos α y β forman un ángulo recto δ .

Desarrollo de la Demostración.

Por hipótesis sabemos que si α y β son suplementarios, entonces $\alpha + \beta = 180^\circ$, (tomemos así la suma de dos ángulos, como lo hicimos en la unidad anterior). La bisectriz del ángulo α divide a éste en dos ángulos congruentes, por la definición de bisectriz de un ángulo. Sean a_1 y a_2 los ángulos de la bisectriz α , tales que $a_1 + a_2 = \alpha$. Para el ángulo β sean b_1 y b_2 los ángulos de la bisectriz en β , se sigue que $b_1 + b_2 = \beta$. También sabemos que

$\alpha + \beta = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = 2(90^\circ)$; además, se tiene que $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$, tal que $2a_1 + 2b_2 = 2(90)$. Ahora, tomemos a los ángulos a_2 y b_1 como ángulos adyacentes tales que $a_2 + b_1 = \delta$, entonces $2a_1 + 2b_2 = 2\delta$. Así, igualemos las sumas y $2(90^\circ) = 2\delta$, dividimos entre 2 de forma que $90^\circ = \delta$. Por lo tanto, lo que deseábamos demostrar era que las bisectrices formaban un ángulo recto se cumple. Queda demostrado el teorema.

Tomemos una recta horizontal y otra R_1 que no sea paralela a ella, estas dos rectas, como sabemos, al no ser paralelas se cortarán en un punto A . De esta intersección se determinan cuatro ángulos; el ángulo por encima de la

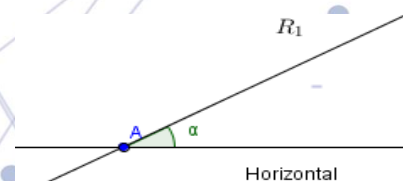


Figura 3. Recta horizontal



Unidad.2 Triángulos

horizontal que denotamos como α , como se muestra en la figura, cuya orientación es positiva.

A la medida de este ángulo la definimos como la inclinación de la recta R_1 .

Definición 2.2 Sea α el ángulo de inclinación de la recta R_1 , entonces:

- Si $\alpha = 0^\circ$ se determina que la inclinación de la recta es horizontal;
- Si $\alpha = 90^\circ$ se determina que la inclinación de la recta es vertical;
- Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ se determina que la inclinación de la recta es positiva;
- Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ se determina que la inclinación de la recta es negativa.

Las relaciones entre ángulos no siempre se dan entre aquellos que son adyacentes. Ya se mencionó que tenemos ángulos alternos, correspondientes y colaterales. Las formas en las cuales podemos usar estas propiedades nos darán la pauta para deducir otras. Por ejemplo, si observamos, como rectas paralelas donde una tercera las corte a las dos, los ángulos colaterales guardan una propiedad que definiremos como teorema.

Teorema 2.2 Sean tres rectas R_1, R_2 y R_3 , tales que $R_1 \parallel R_2$ y R_3 interseca a R_1 y R_2 . Si α y β son ángulos correspondientes, entonces $\alpha = \beta$.



Unidad.2 Triángulos

Demostración.

Hipótesis.

1. $R_1 \parallel R_2$,
2. $R_3 \cap R_1 \neq \emptyset$ y $R_3 \cap R_2 \neq \emptyset$,
3. Los ángulos α y β son correspondientes.

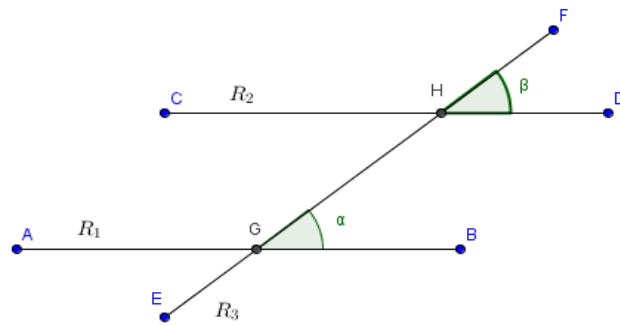


Figura 4. Rectas, ángulos correspondientes

Tesis.

$$\alpha = \beta$$

Desarrollo de la demostración.

La demostración la realizaremos por reducción al absurdo. Recuerda que en este método debemos negar la tesis y en consecuencia alguna de las hipótesis se debe contradecir, esto implicaría que negar la tesis no es correcto, por lo tanto se debe cumplir ésta.

Entonces, consideramos dos segmentos de recta \overline{AB} en R_1 y \overline{CD} en R_2 tales que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Sea otro segmento \overline{EF} que corta a los otros dos segmentos en los puntos G en \overline{AB} y H en \overline{CD} tales que se forman los ángulos correspondientes $\sphericalangle BGH = \alpha$ y $\sphericalangle DHF = \beta$ tales que $\alpha \neq \beta$, entonces tomamos el ángulo suplementario de α al cual denotamos por γ ; ahora tomamos el ángulo suplementario de β y lo escribimos como δ . Como podemos deducir que $\alpha + \gamma = 180^\circ$, del mismo modo $\beta + \delta = 180^\circ$. De esto se sigue que igualando sumas se tiene que $\beta + \delta = \alpha + \gamma$, como $\alpha \neq \beta$, entonces $\gamma \neq \delta$. Algo que se observa es que por construcción los segmentos de recta \overline{GH} y \overline{HF} están contenidos en el mismo segmento \overline{EF} lo que implica que ambos segmentos tienen el mismo ángulo de inclinación. Lo anterior determina que los segmentos \overline{BG} y \overline{DH} , que son los otros dos lados de los ángulos α y β respectivamente, que a su vez están contenidos en los segmentos \overline{AB} y \overline{CD} respectivamente no son paralelos, en



Unidad.2 Triángulos

consecuencia R_1 y R_2 no son rectas paralelas; esto contradice la hipótesis lo que nos lleva a concluir que nuestro supuesto es erróneo, por lo tanto $\alpha = \beta$. Queda con esto demostrado el teorema.

Este tipo de ángulos se los pueden definir como ángulos paralelos.

Dentro de este tipo de ángulos, se encuentran los ángulos alternos externos, donde dos rectas son paralelas. Así, se da el siguiente teorema.

Teorema 2.3 Sean tres rectas R_1 , R_2 y R_3 , tales que $R_1 \parallel R_2$ y R_3 interseca a R_1 y R_2 . Sean los ángulos α y β opuestos o alternos externos, entonces $\alpha = \beta$.

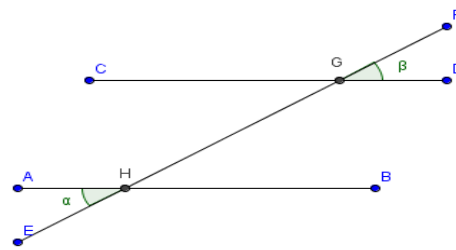


Figura 5. Ángulos externos

La demostración se deja como ejercicio de la actividad 2.

Nos podemos preguntar ahora qué ocurre con ángulos cuyos lados sean perpendiculares una vez que descubrimos algunas relaciones entre ángulos paralelos.

Definición 2.3 Sean dos ángulos α y β tales que sus lados son perpendiculares dos a dos, entonces se dice que ambos ángulos son perpendiculares; y si sus lados son paralelos dos a dos, entonces se dice que ambos ángulos son paralelos.



Unidad.2 Triángulos

Teorema 2.4 Sean α y β ángulos, entonces:

- a) son iguales si son perpendiculares y ambos son agudos u obtusos;
- b) son suplementarios si son paralelos y uno es agudo y otro obtuso.

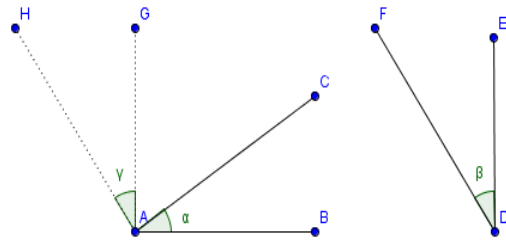


Figura 6. Representación de ángulos

Demostración.

Hipótesis.

1. α y β son ángulos,

Tesis.

- a) Si α y β son perpendiculares y miden menos de 90° o más de 90° , entonces son iguales;
- b) Si son paralelos y tales que uno mide menos de 90° y el otro mide más de 90° , entonces son suplementarios.

Desarrollo de la demostración.

- a) Supongamos que α y β miden menos de 90° , es decir son agudos, por demostrar que $\alpha = \beta$.

Entonces, tracemos un ángulo $\angle GAH = \gamma$ tal que $\beta \parallel \gamma$. Sabemos por los teoremas y las definiciones anteriores $\beta = \gamma$ al tener sus lados correspondientes paralelos; se sigue que, podemos definir al ángulo $\angle GAH = \gamma$. Por construcción se tiene que α y δ son ángulos complementarios; de igual forma δ y γ son complementarios, se sigue que $\alpha + \delta = 90^\circ$ y $\gamma + \delta = 90^\circ$, de esto podemos igualar ambas ecuaciones, tales que $\alpha + \delta = \gamma + \delta$ restamos de ambos lados de esta ecuación δ y tenemos que $\alpha = \gamma$ y recordando que $\beta = \gamma$ podemos concluir igualando estas dos ecuaciones que $\alpha = \beta$. Esto era lo que se quería demostrar.

La demostración para el caso cuando α y β miden más de 90° es análogo y se deja como ejercicio para la actividad 2.



Unidad.2 Triángulos

b) Toca demostrar que si el ángulo α mide menos de 90° y β mide más de 90° , entonces ambos ángulos paralelos son suplementarios.

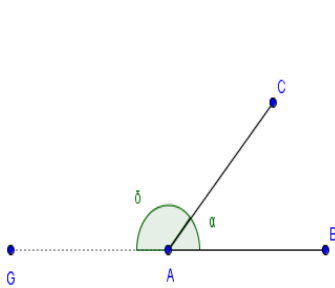


Figura 7. Ángulos paralelos suplementarios

Tracemos, como se observa en la figura, un ángulo $\sphericalangle CAG = \delta$ donde $\delta \parallel \beta$. Dado esto, deducimos que $\beta = \delta$; entonces por hipótesis se tiene que $\alpha \parallel \beta$ lo que implica que $\delta \parallel \alpha$. Tomemos nuevamente el supuesto de

que $\alpha + \delta \neq 180^\circ$, esto nos conduce a dos casos $\alpha < \delta$ ó $\delta < \alpha$, sólo se puede cumplir uno de los dos casos, pero en ambos, se da que los segmentos \overline{AB} y \overline{AG} no tienen la misma inclinación lo que implica que estos segmentos no son paralelos, luego se concluye que los ángulos α y δ no son paralelos, esto contradice la deducción hecha de que estos ángulos son paralelos. Esto nos permite concluir que $\alpha + \delta = 180^\circ$. Por lo tanto, α y δ son suplementarios. Queda entonces demostrado el teorema.

Ejemplo. Sean los segmentos de

rectas $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{FG}$. Si

$\overline{DE} \cap \overline{FG} = H$, calcular entonces las

medidas de los ángulos

$\sphericalangle GHE$, $\sphericalangle EHF$, $\sphericalangle FHD$ y $\sphericalangle DHG$.

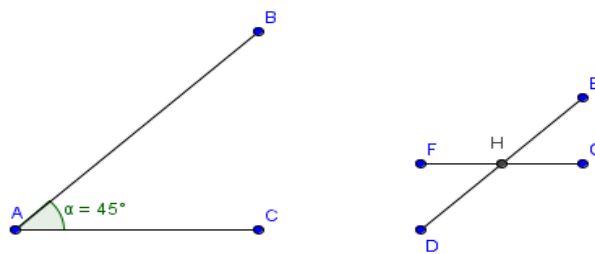


Figura 8. Representación gráfica

Solución.



Unidad.2 Triángulos

Por hipótesis $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, $\overline{AC} \parallel \overline{FG}$ y $\overline{DE} \cap \overline{FG} = H$. Esto implica que por los teoremas 2.3 y 2.4 a), los ángulos $\sphericalangle GHE$ y $\sphericalangle FHD$ son paralelos e iguales al ángulo $\sphericalangle CAB$. Por lo tanto, $m(\sphericalangle GHE) = 45^\circ = m(\sphericalangle FHD)$.

Del mismo modo, por los teoremas 2.3 y 2.4 b); los ángulos $\sphericalangle EHF$ y $\sphericalangle DHG$ son suplementarios al ángulo $\sphericalangle CAB$. Por lo tanto, $m(\sphericalangle EHF) = 135^\circ = m(\sphericalangle DHG)$.

Así es como se pueden usar los teoremas para resolver determinados problemas prácticos. Se deben tener en cuenta las hipótesis del enunciado principal, como en los teoremas, entonces se procede a verificar las cuestiones que se piden. En la actividad 2 se te pedirá que uses los teoremas como se muestra en este ejemplo, con el fin de que te vayas familiarizando con las cuestiones que determinan los teoremas y cuáles son sus conclusiones.

2.1.2. Propiedades angulares de los triángulos

Ahora podemos pasar a ver cómo las propiedades antes inferidas nos conducen a otras nuevas, las cuales se aplican a los triángulos.

Partimos del hecho dado de que un polígono de tres lados, definido como triángulo tiene tres vértices denotados como A , B y C . Los lados del triángulo serán los segmentos de recta \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{CB} ; denotaremos a estos segmentos como c , b y a respectivamente tales que $a + b + c = P$ donde P es el **perímetro** del triángulo.

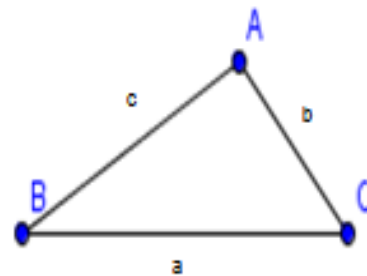


Figura 9. Polígono de tres lados



Unidad.2 Triángulos

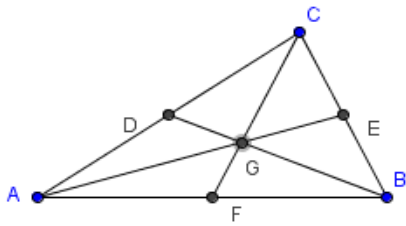


Figura 10. Mediana

Recordando que la mediana es la recta que corta el vértice de un triángulo y el punto central del lado opuesto al vértice, entonces dentro de un triángulo tenemos tres medianas, las cuales se intersecan en un punto que llamaremos baricentro

Ahora, cuando se toma la definición de altura, ésta es la recta que pasa por un vértice del triángulo y corta el lado opuesto al vértice en un ángulo recto. Tenemos entonces tres vértices y tres lados del triángulo de esta manera hay tres alturas. El punto en que se intersecan las tres alturas la denominamos ortocentro.

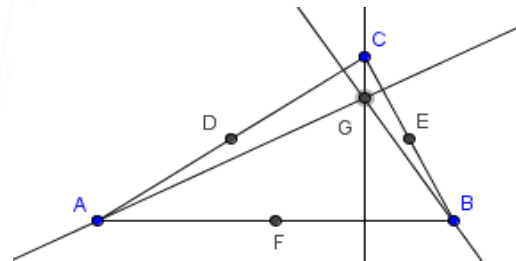


Figura 11. Ortocentro

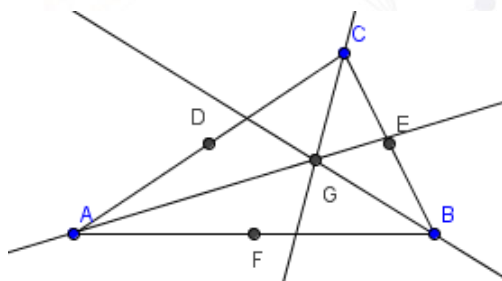


Figura 12. Bisectriz

Otro resultado que tiene que ver con las líneas que definimos en la unidad anterior tiene que ver con la bisectriz de un vértice. Una bisectriz es la recta que corta a un vértice en ángulos congruentes. Un triángulo tiene tres vértices, en consecuencia hay tres bisectrices que se intersecan en un punto que definiremos como incentro.



Unidad.2 Triángulos

Por último, la mediatriz es la recta que corta a uno de los lados del triángulo en ángulo recto en el punto central. Al tener tres lados, entonces se cuentan con tres mediatrices; el punto en el cual se intersecan las rectas es nombrado circuncentro.

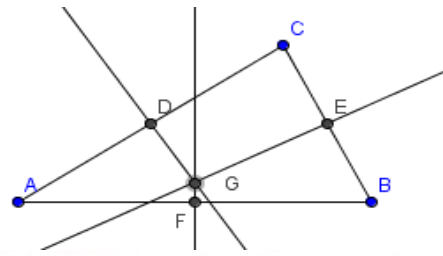


Figura 13. Mediatriz

Los vértices de un triángulo, como hemos visto, se miden en función de los ángulos que los determinan. Una de las cuestiones más conocidas es que la medida de los tres ángulos internos de un triángulo da un total de 180° , entonces podemos pensar en el siguiente teorema.

Teorema 2.5 Sea un triángulo ΔABC contenido en un plano P . Los ángulos internos de ΔABC suman 180° .

Demostración.

Hipótesis.

1. Los ángulos α, β , y η son interiores del triángulo ΔABC .

Tesis.

$$\alpha + \beta + \eta = 180^\circ$$

Desarrollo de la demostración.

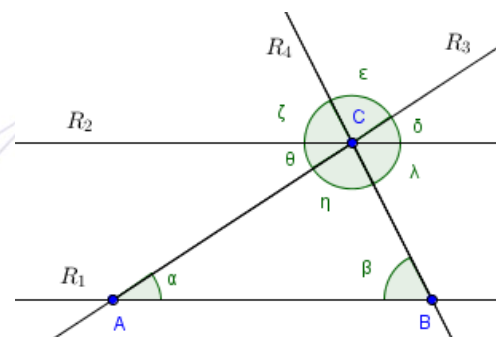


Figura 14. Ángulos internos



Unidad.2 Triángulos

Construcción auxiliar. Trazamos una recta R_2 , paralela a la recta R_1 que contiene al segmento \overline{AB} , tal que pase por el vértice C . Después trazamos también las rectas R_3 y R_4 que contienen a los segmentos \overline{AC} y \overline{BC} respectivamente. Entonces, por la construcción, se tiene al ángulo correspondiente de α como δ , y al ángulo correspondiente de β como ζ . Por el teorema 2.2 $\alpha = \delta$ y $\beta = \zeta$. Por otro lado, si ángulos opuestos son congruentes, esto implica que $\delta = \theta$, $\eta = \varepsilon$ y $\zeta = \lambda$, entonces se sigue que $\alpha = \theta$ y $\beta = \lambda$, lo cual implica que si $\theta + \eta + \lambda = 180^\circ$ tal que si sustituimos los valores de las últimas equivalencias en la suma, se tiene que $\alpha + \beta + \eta = 180^\circ$; esto era lo que se quería demostrar. Por lo tanto el teorema queda demostrado.

Hasta el momento hemos trabajado sólo con los ángulos interiores, pero ¿qué ocurre con los ángulos exteriores y cómo se definen? En esta parte vamos a definir qué es un ángulo exterior de un triángulo y deduciremos algunas propiedades relacionadas con ellos.

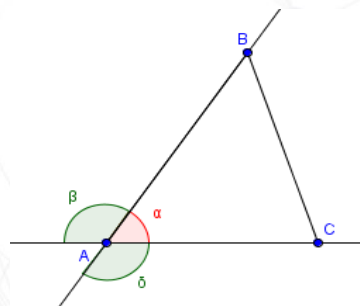


Figura 15. Ángulos exteriores e interiores

Definición 2.4 Sea un triángulo $\triangle ABC$. Sea el ángulo interior que se encuentra en el vértice A ; se llamará ángulo exterior del triángulo $\triangle ABC$ al ángulo suplementario de este ángulo interno que se encuentra sobre la recta que contiene al segmento \overline{AC} . También se llama ángulo exterior al ángulo suplementario del mismo ángulo interior sobre la recta que contiene al segmento \overline{AB} .



Unidad.2 Triángulos

Como puedes observar en la imagen, los ángulos β y δ al sumarlos con α se tiene $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$ y por otro lado $\alpha + \gamma = 180^\circ$, lo que nos lleva a concluir que $\gamma = \beta + \delta$,

Ahora, por cada vértice tenemos dos ángulos exteriores, dando un total de seis ángulos exteriores. Para nuestros fines usaremos solo tres de los seis, dado que las operaciones que se pueden realizar con esta propiedad son iguales para los seis ángulos exteriores o externos.

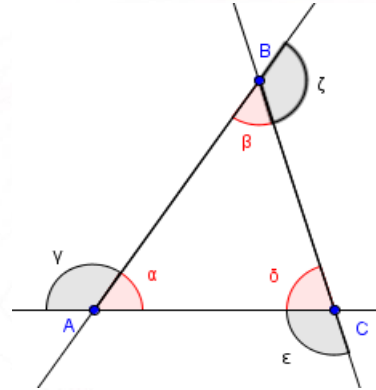


Figura 16. ángulos exteriores

En este caso, los ángulos γ , ζ y ε son los ángulos exteriores del triángulo $\triangle ABC$ con los cuales vamos a trabajar ahora. Una pregunta que surge sobre la medida de los ángulos externos es ¿cuál será la suma de las medidas de los ángulos externos? Veamos entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.6 La suma de los ángulos exteriores γ , ζ y ε de un triángulo $\triangle ABC$ es de 360° .

Demostración.

Hipótesis.

1. Los ángulos γ , ζ y ε son ángulos exteriores del triángulo $\triangle ABC$.

Tesis.

$\gamma + \zeta + \varepsilon = 360^\circ$.



Unidad.2 Triángulos

Desarrollo de la demostración.

Por la definición anterior, si los ángulos α, β y δ son ángulos internos del triángulo ΔABC . Entonces, dentro de los supuestos, si los ángulos γ, ζ y ε son ángulos externos de ΔABC lo que implica es que también son ángulos suplementarios de los ángulos α, β y δ respectivamente, entonces $\alpha + \gamma = 180^\circ$, $\beta + \zeta = 180^\circ$ y $\delta + \varepsilon = 180^\circ$. Ahora despejamos de estas tres ecuaciones α, β y δ de modo que nos quede $\gamma = 180^\circ - \alpha$, $\zeta = 180^\circ - \beta$ y $\varepsilon = 180^\circ - \delta$; sumamos γ, ζ y ε , tal que:

$$\gamma + \zeta + \varepsilon = (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \delta)$$

se aplican las reglas conmutativas y asociativas tales que esta ecuación queda

$$\gamma + \zeta + \varepsilon = (180^\circ + 180^\circ + 180^\circ) - (\alpha + \beta + \delta)$$

pero sabemos que $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$, entonces sustituimos y asociamos de forma que

$$\gamma + \zeta + \varepsilon = (180^\circ + 180^\circ) + (180^\circ - 180^\circ) = 360^\circ + 0$$

por lo tanto, se concluye que $\gamma + \zeta + \varepsilon = 360^\circ$, luego entonces se demuestra nuestra tesis.

Queda entonces demostrado el teorema.

Tomemos por un momento un caso particular.

Las igualdades entre triángulos se verán con detalle en la próxima sección, pero hay una condición que podemos explorar de momento y está relacionada con la igualdad entre dos triángulos rectángulos.

Lema 2.1 Dos triángulos rectángulos son iguales cuando sus hipotenusas tienen la misma longitud y que en cada triángulo se tenga un ángulo agudo con la misma medida respectivamente.

Demostración.



Unidad.2 Triángulos

Hipótesis.

1. Las hipotenusas tienen la misma longitud
2. Los dos triángulos al ser rectángulos tienen un ángulo recto
3. Los dos triángulos tienen un ángulo agudo con la misma medida respectivamente.

Tesis.

Los triángulos rectángulos son iguales.

Desarrollo de la demostración.

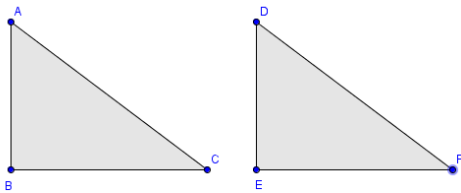


Figura 17. triángulo rectángulo

Sean dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ ambos son triángulos rectángulos; por hipótesis sus hipotenusas $\overline{AC} = \overline{DF}$; los ángulos $\sphericalangle CBA = \sphericalangle FED$ ya que ambos ángulos son rectos. También se concluye que por hipótesis se toman a los ángulos

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DFE$, por otro lado, sabemos que $\sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACB = 180^\circ$ y $\sphericalangle EFD + \sphericalangle EDF + \sphericalangle FED = 180^\circ$ igualando términos tenemos que

$$\sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACB = \sphericalangle EFD + \sphericalangle EDF + \sphericalangle FED.$$

de donde por la igualdad que se da entre dos pares de los ángulos nos deja con que $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DFE$. Esto implica que los tres ángulos del triángulo $\triangle ABC$ son congruentes a $\triangle DEF$, además de tener las hipotenusas iguales.

Falta ver que los segmentos de los triángulos $\overline{AB} = \overline{DE}$ y $\overline{BC} = \overline{EF}$. Supongamos que $\overline{AB} \neq \overline{DE}$ esto implica inmediatamente que $\overline{BC} \neq \overline{EF}$, porque se tiene que los puntos A, C, D y F en el plano que los contiene están fijos dado que estos puntos contienen las hipotenusas de sus respectivos triángulos rectángulos. Por hipótesis los vértices B y E tienen ángulos rectos,



Unidad.2 Triángulos

además los ángulos $\sphericalangle CBA = \sphericalangle FED$ también por hipótesis, luego se implica que $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FED$ en consecuencia estos ángulos son paralelos. Pero si $\overline{AB} \neq \overline{DE}$ se sigue que el punto B o el punto E estén en sitios en el plano que los contiene tal que la inclinación de los segmentos \overline{AB} y \overline{DE} no sean iguales lo que implicaría que los ángulos $\sphericalangle CAB$ y $\sphericalangle FED$ no sean paralelos, luego entonces $\sphericalangle CBA \neq \sphericalangle FED$ lo que implica es que uno de estos ángulos no es recto, pero esto contradice nuestra hipótesis inicial, por lo tanto los segmentos $\overline{AB} = \overline{DE}$ y $\overline{BC} = \overline{EF}$. por lo tanto $\triangle ABC = \triangle DEF$. Queda entonces demostrado en lema.

Teorema 2.7 Sea un ángulo α con vértice en un punto A del plano P , y sea D cualquier punto de la recta que biseca al ángulo (la bisectriz). Entonces las distancias que hay entre el punto D y los lados del ángulo α son iguales.

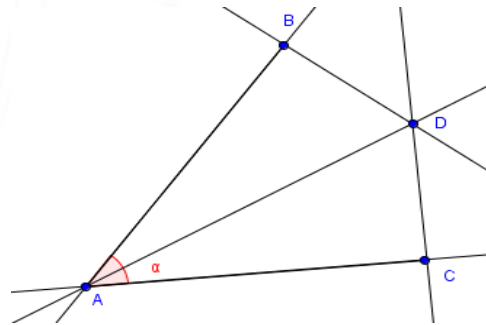


Figura 18. Bisectriz

Demostración.

Hipótesis.

1. La recta que pasa por el segmento \overline{AD} es la bisectriz del ángulo α .

Tesis.

Las distancias del punto D a los lados del ángulo α son equivalentes.

Desarrollo de la demostración.



Unidad.2 Triángulos

Por hipótesis, sea el ángulo $\sphericalangle CAB = \alpha$ el cual es bisecado por la recta que contiene el segmento \overline{AD} ; por otro lado, las rectas perpendiculares a los lados del ángulo α que se intersecan en el punto D forman los segmentos \overline{DB} y \overline{DC} ; por demostrar que $\overline{DB} = \overline{DC}$.

En este caso tenemos dos triángulos rectángulos $\triangle ADC$ y $\triangle ADB$, de donde los ángulos $\sphericalangle CAD$ y $\sphericalangle DAB$ tienen medidas equivalentes dado que la recta que contiene al segmento \overline{AD} es la bisectriz del ángulo α y éste mismo segmento es la hipotenusa de ambos triángulos y por el lema anterior se deduce que $\triangle ADC = \triangle ADB$. De esto se concluye que los segmentos $\overline{DB} = \overline{DC}$. Que era lo que se debía demostrar. Por lo tanto el teorema queda demostrado.

A partir de las bisectrices de un triángulo podemos, dados los resultados anteriores, determinar el siguiente teorema.

Teorema 2.8 El incentro de un triángulo equidista de sus lados.

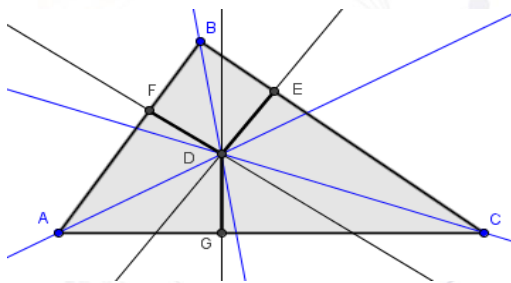


Figura 19. Incentro del Triángulo

Demostración.

Sea un triángulo $\triangle ABC$. Sea el punto D el incentro del triángulo (el punto de intersección de las bisectrices). Los segmentos \overline{DE} , \overline{DF} y \overline{DG} son perpendiculares a los lados del triángulo.

Hipótesis.

1. El punto D es el incentro del triángulo $\triangle ABC$.
2. Los segmentos \overline{DE} , \overline{DF} y \overline{DG} son perpendiculares a los lados del triángulo.

Tesis.



Unidad.2 Triángulos

Los segmentos \overline{DE} , \overline{DF} y \overline{DG} son equidistantes.

Desarrollo de la demostración.

El punto D al ser el incentro del triángulo $\triangle ABC$, implica está contenido en cada una de las bisectrices del triángulo, se deduce entonces que del ángulo que corresponde al vértice A los segmentos \overline{DF} y \overline{DG} son equidistantes por el teorema anterior. De forma análoga del vértice B los segmentos \overline{DE} y \overline{DF} son equidistantes; por lo tanto se implica que \overline{DE} , \overline{DF} y \overline{DG} son equidistantes. Queda demostrado el teorema.

Al observar las bisectrices de los ángulos interiores se derivan las propiedades vistas, pero no podemos preguntar qué ocurre con las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo. El siguiente teorema nos permite ver qué otras propiedades podemos extraer.

Teorema 2.9 La bisectriz de un ángulo interior se interseca con las bisectrices de los ángulos exteriores correspondientes de los dos otros dos vértices en un punto llamado incentro exterior que equidista de las rectas que contienen a los lados del triángulo.

Demostración.

Los teoremas cada vez van implicando cuestiones que se han deducido anteriormente; es decir, lo que se ha establecido como postulado, definición o propiedad mediante teoremas, lemas y corolarios. Este teorema es un ejemplo de ello.



Unidad.2 Triángulos

Veamos la imagen que se presenta aquí con detalle.

Podemos ver que del triángulo $\triangle ABC$ se deducen varias cosas, sólo si tomamos las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores.

Observa que las líneas rectas en negro son las que contienen a los lados del triángulo.

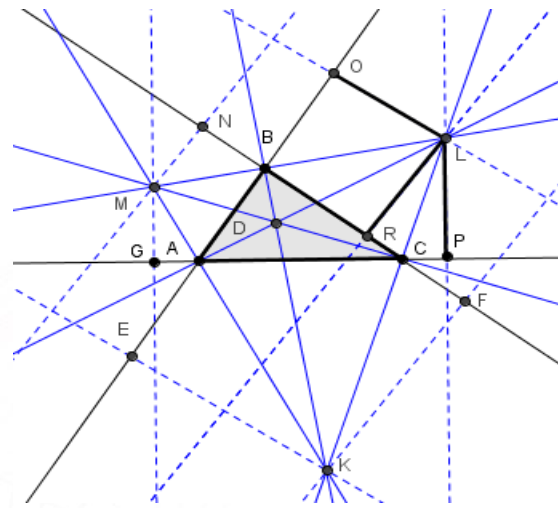


Figura 20. Bisectrices de ángulos interiores y exteriores

El triángulo $\triangle ABC$ está remarcado. Las rectas en azul son las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores.

Toma la bisectriz que corta al ángulo interno cuyo vértice es el punto A y pasa por los puntos D y L donde uno es el incentro interior y el otro es un incentro exterior respectivamente. Las rectas azules punteadas son las rectas perpendiculares a las rectas que contienen a los lados del triángulo y pasan por los incentros. El punto L es el incentro exterior que corresponde a la intersección de las bisectrices del ángulo interior con vértice en A y las bisectrices de los ángulos exteriores correspondientes a los vértices B y C donde los segmentos \overline{LO} , \overline{LR} y \overline{LP} son perpendiculares a las rectas que contienen a los lados del triángulo. Por demostrar que estos tres segmentos son equivalentes, esto implicará que las distancias del punto L a las rectas de los lados del triángulo son equidistantes.

Hipótesis.

1. La recta que pasa por los puntos A , D y L es la bisectriz del ángulo $\sphericalangle PAO$. Que es a su vez paralelo al ángulo interior $\sphericalangle CAB$ del triángulo $\triangle ABC$.
2. La recta que pasa por los puntos M , B y L es la bisectriz del ángulo $\sphericalangle CBO$. Que es el ángulo externo cuyo vértice es B del triángulo $\triangle ABC$.



Unidad.2 Triángulos

3. La recta que pasa por los puntos K , C y L es la bisectriz del ángulo $\sphericalangle PCB$. Que es el ángulo externo cuyo vértice es C del triángulo $\triangle ABC$.

Tesis.

Los segmentos \overline{LO} , \overline{LR} y \overline{LP} son congruentes, entonces las distancias del punto L a las rectas que contienen a los lados del triángulo $\triangle ABC$ son iguales.

Desarrollo de la demostración.

Tomemos el ángulo $\sphericalangle PAO$ y la bisectriz de este ángulo contiene un punto L por el cual los segmentos de recta \overline{LO} y \overline{LP} son perpendiculares a los lados del ángulo. Por el teorema 2.7 estos segmentos tienen la misma longitud.

Ahora sea el ángulo $\sphericalangle CBO$ y la bisectriz de este ángulo contiene un punto L por el cual los segmentos de recta \overline{LR} y \overline{LO} son perpendiculares a los lados del ángulo. Por el teorema 2.7 estos segmentos tienen la misma longitud.

Por último el ángulo $\sphericalangle PCB$ y la bisectriz de este ángulo contiene un punto L por el cual los segmentos de recta \overline{LR} y \overline{LP} son perpendiculares a los lados del ángulo. Por el teorema 2.7 estos segmentos tienen la misma longitud.

Luego entonces los segmentos \overline{LO} , \overline{LR} y \overline{LP} son congruentes, las distancias del punto L a las rectas que contienen a los lados del triángulo $\triangle ABC$ son iguales. Queda demostrado el teorema.

Una consecuencia que se puede extraer de este teorema se enuncia en el siguiente corolario.

Corolario 2.1 Las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo $\triangle ABC$ son las alturas del triángulo $\triangle KML$.



Unidad.2 Triángulos

Nota: El triángulo $\triangle KML$ está formado por las bisectrices exteriores del triángulo $\triangle ABC$.

Con esto damos paso a otras propiedades del triángulo que descubriremos en la siguiente sección.

2.2. Propiedades del triángulo

Algo que resulta relevante de los triángulos es cuando tenemos dos que se parecen, entonces nos viene a la mente inmediatamente de manera natural la equivalencia entre los lados de los triángulos. Pero hay otros aspectos de las propiedades que guardan los triángulos que nos permiten determinar si dos triángulos son equivalentes. Así, en esta sección precisaremos de condiciones que nos darán la posibilidad de someter a los triángulos a ciertos criterios, con los cuales se mostrará formalmente que dos triángulos son equivalentes.

2.2.1. Congruencia de triángulos

Para poder enunciar los criterios que nos permitirán afirmar que dos triángulos son equivalentes antes debemos entender que cuando dos triángulos son iguales, pensamos que sus ángulos y sus lados correspondientes deben ser iguales. Esto es verdad, porque cuando hablamos de objetos iguales entendemos que guardan características equivalentes entre ellos; del mismo modo ocurre con los triángulos. Si dos triángulos son iguales, entonces sus ángulos correspondientes deben de tener la misma medida angular y sus lados correspondientes deben tener la misma longitud.

Ahora, cuando hablamos de congruencias anteriormente decíamos que dos ángulos eran congruentes si sus medidas angulares eran equivalentes. También cuando se mencionó que dos segmentos de recta eran congruentes cuando sus longitudes tenían la misma medida.



Unidad.2 Triángulos

Definición 2.5 Se llaman triángulos congruentes a dos triángulos que tengan sus lados y ángulos correspondientes congruentes.

Así, si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes tenemos entonces que

$$\overline{AB} \cong \overline{DE} \text{ y } \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle FDE$$

$$\overline{BC} \cong \overline{EF} \text{ y } \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$$

$$\overline{CA} \cong \overline{FE} \text{ y } \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle FED$$

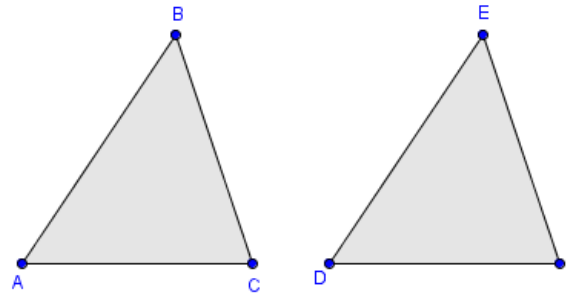


Figura 21. Lados homólogos y ángulos homólogos

Llamamos **lados homólogos** y **ángulos homólogos** de dos triángulos a los lados y ángulos congruentes de tales triángulos.

Podemos ver por ejemplo casos en los que se determina la congruencia de triángulos.

El primer caso que podemos presentar es el de un paralelogramo $\diamond ABCD$ que tiene como característica principal que sus lados opuestos por pares son paralelos y congruentes, y sus ángulos opuestos son congruentes. Si trazamos una diagonal dentro del paralelogramo del vértice A al vértice C se tiene entonces que al tomar ángulos alternos internos podemos deducir

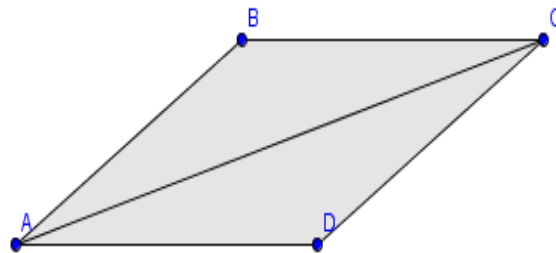


Figura 22. Paralelogramo



Unidad.2 Triángulos

que la congruencia de los ángulos $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ACD$ y $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BCA$. Los ángulos $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle CDA \cong \sphericalangle CDA$ al ser opuestos dentro del paralelogramo son congruentes. Los lados opuestos $\overline{AB}, \overline{DC}$ y $\overline{AD}, \overline{BC}$ son paralelos y congruentes respectivamente; la diagonal \overline{AC} la comparten los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$, pero como podemos concluir, los ángulos y los lados correspondientes de ambos triángulos son congruentes, por lo tanto son ángulos y lados homólogos de tal manera que implica que ambos triángulos son congruentes.

Para mostrar que dos triángulos son congruentes se tienen que observar varios casos y determinar la congruencia de los pares homólogos, eso es algo que se puede simplificar, y basta con mostrar ciertos criterios para demostrar que dos triángulos son congruentes, lo cual no implica que debamos renunciar a esta opción, lo que haremos será con ésta definir otras alternativas para probar la congruencia de triángulos.

2.2.2. Criterios de congruencia

En la sección anterior pudimos comprobar dos ejemplos de triángulos congruentes, tomando los tres casos sobre la congruencia de ángulos y lados congruentes, de esta manera el comprobar que dos triángulos son congruentes resulta poco práctico, esto no quiere decir que sea erróneo este tipo de pruebas. Algo que comúnmente los matemáticos buscan es métodos que faciliten su trabajo; así, tenemos un caso que nos puede ayudar a demostrar de manera formal la congruencia de triángulos.

Un paso natural para mostrar que dos triángulos son congruentes es observando los lados de dos triángulos, si los lados se ven del mismo tamaño en ambos casos, entonces podemos suponer su equivalencia. De esta manera, lo que nos resulta más intuitivo es determinar el siguiente criterio de congruencia.

Teorema 2.10 (Criterio de Lado-Lado-Lado)

Dos triángulos son congruentes si los tres lados de ambos triángulos son congruentes.



Unidad.2 Triángulos

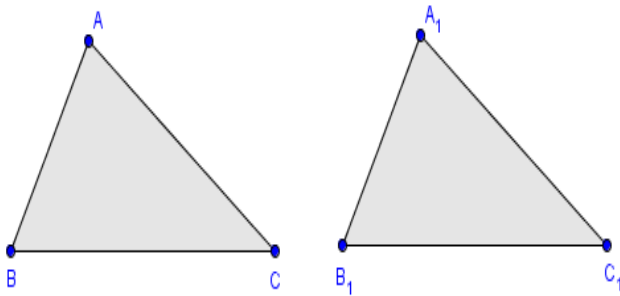


Figura 23. Criterio de lado- lado- lado

Demostración.

Sean dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A_1B_1C_1$ tales que:

Hipótesis.

1. $\overline{AB} \equiv \overline{A_1B_1}$.
2. $\overline{BC} \equiv \overline{B_1C_1}$.
3. $\overline{CA} \equiv \overline{C_1A_1}$.

Tesis.

$$\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1.$$

Desarrollo de la demostración.

Tomemos del triángulo $\triangle ABC$ el vértice B el cual forma al ángulo $\sphericalangle ABC$ y sus lados son \overline{AB} y \overline{BC} del triángulo $\triangle DEF$ se toma el vértice E que da lugar al ángulo $\sphericalangle DEF$ y sus lados son \overline{DE} y \overline{EF} tales que por hipótesis, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ y $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ por demostrar que $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$.

<p>Construyamos un triángulo a partir del vértice C, tal que prolongamos el segmento AC hasta un punto A_1 de manera que el segmento $\overline{A_1C} \equiv \overline{ED}$; se procede de forma análoga con el segmento $\overline{B_1C}$ tal que $\overline{B_1C} \equiv \overline{EF}$. Esto implica, por construcción que los ángulos $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A_1CB_1$ por ser opuestos por el vértice. De igual forma los segmentos $\overline{B_1A_1} \equiv \overline{AB}$ son congruentes y paralelos por</p>



Unidad.2 Triángulos

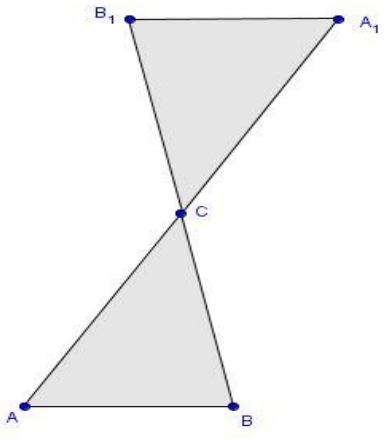
	<p>construcción. Los ángulos $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A_1B_1C$ por ser alternos internos. Y de forma análoga los ángulos $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CA_1B_1$. se concluye que los triángulos $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C$. Por Construcción $\Delta DEF \equiv \Delta A_1B_1C$. Por lo tanto, $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.</p>
---	--

Figura 24. Triángulo a partir del vértice C

Queda demostrado este teorema.

Revisa con detalle esta demostración. Anteriormente argumentamos que los casos que seguían se hacían de forma análoga. Lo que se trata de decir es que el proceso deductivo es idéntico y las implicaciones nos llevarán a algo semejante a la obtenida, con lo cual podemos concluir con la demostración. Lo importante aquí es que tengas claro que cuándo apliques esto, estés completamente seguro de que tu proceso deductivo es lógicamente correcto.

Después de presentar el primer criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL). Este criterio, que nos parece natural elegirlo como el primero, pero en diferentes textos de geometría se toma como postulado y en otros como teorema. En este caso partimos de la definición y demostramos que este criterio es válido dentro de la geometría, pero podemos ahora pensar en otras combinaciones de ángulos y lados para demostrar la congruencia de dos triángulos.

Si tomamos la combinación de Ángulo-Ángulo-Ángulo (AAA) e intentamos mostrar la congruencia de dos triángulos, esta combinación es poco adecuada, dado que podemos presentar un ejemplo donde hay dos triángulos con ángulos congruentes pero sus lados no son congruentes.



Unidad.2 Triángulos

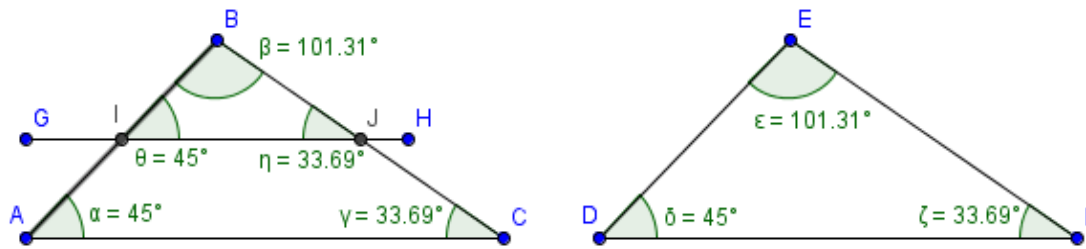


Figura 25. Demostración ángulos congruentes

En este caso los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes, y lo podemos probar. Parece entonces natural también pensar en AAA dado que los ángulos interiores de ambos triángulos son congruentes, y al ver sus lados, también son congruentes, entonces ambos triángulos son congruentes. Pero al ver el triángulo $\triangle IBJ$ es más pequeño que los otros dos triángulos, pero sus ángulos que son congruentes con los ángulos interiores de $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ respectivamente, nos deja entre ver que dada la definición de congruencia de triángulo que dimos el triángulo $\triangle IBJ$ no es congruente con $\triangle ABC$ y tampoco es congruente con $\triangle DEF$. Por lo tanto, con este ejemplo basta ver que no podemos dar un criterio AAA para probar que dos triángulos son congruentes.

Observa con cuidado los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle IBJ$, te podrás dar cuenta que el punto en discordia aquí es el hecho de que los lados de ambos triángulos no son congruentes, entonces si nos enfocamos en el ángulo β ; que ambos triángulos comparten, entonces podemos proponer que si deseamos probar que dos triángulos son congruentes, entonces podemos tomar un ángulo de ambos triángulos y si es el caso que ambos son congruentes, entonces cada lado de uno de los ángulos, deberá ser congruente a uno de los lados del otro ángulo si se desea mostrar la congruencia que dos triángulos son congruentes. Entonces, se propone el siguiente criterio.



Unidad.2 Triángulos

Teorema 2.11 Criterio de congruencia (Lado-Ángulo- Lado)

Si dos triángulos tienen ángulos homólogos congruentes y además que los lados de cada ángulo son congruentes con los homólogos del otro ángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Demostración.

Sean dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tales que:

Hipótesis.

1. $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle FDE$
2. $\overline{AB} \equiv \overline{ED}$
3. $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$

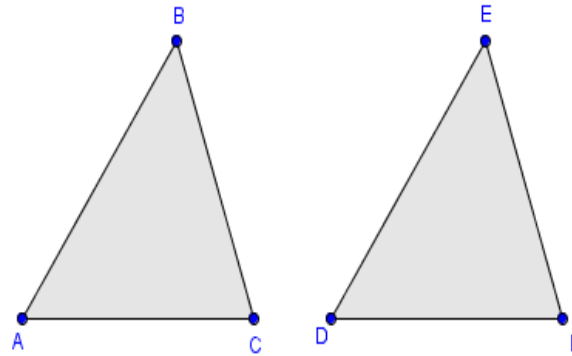


Figura 26. Congruencia (Lado -Ángulo - Lado)

Tesis.

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

Desarrollo de la demostración.

Por hipótesis tenemos que los segmentos $\overline{AB} \equiv \overline{ED}$ y $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$. Basta demostrar que los segmentos $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$; esto por el teorema anterior, el 2.10. Así, supongamos que $\overline{BC} \not\equiv \overline{EF}$ de esto se puede deducir que $m(\overline{BC}) \neq m(\overline{EF})$, y se sigue entonces que $m(\overline{BC}) < m(\overline{EF})$ ó $m(\overline{BC}) > m(\overline{EF})$, de donde si $m(\overline{BC}) < m(\overline{EF})$, se concluye que al tener estos segmentos \overline{BC} y \overline{EF} como ángulos opuestos a $\sphericalangle CAB$ y $\sphericalangle FDE$ entonces $m(\sphericalangle CAB) < m(\sphericalangle FDE)$ y



Unidad.2 Triángulos

$m(\sphericalangle CAB) \neq m(\sphericalangle FDE)$ de donde se concluye que $\sphericalangle CAB$ y $\sphericalangle FDE$ no son congruentes, pero esto es absurdo, dado que se contradice la hipótesis (1). Por lo tanto $\overline{BC} = \overline{EF}$ y por el teorema anterior se cumple el criterio de LLL, por lo tanto, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes. Queda entonces demostrado el teorema.

Al ver este criterio de congruencia de triángulos, de las seis relaciones posibles entre ángulos y segmentos de dos triángulos congruentes se toman sólo tres relaciones, y nos quedan tres relaciones que en apariencia se pueden dispensar, pero nada más lejano a la realidad ya que para demostrar estos criterios se hace uso de la definición de congruencia de triángulos.

El último criterio de congruencia toma estas tres relaciones que no se tocan en el anterior criterio y nos devela otra posibilidad de demostrar la congruencia de dos triángulos.

Corolario 2.2 Si un triángulo rectángulo tiene sus dos catetos congruentes a otros dos catetos de otro triángulo rectángulo, entonces ambos triángulos son rectángulos.

Demostración.

Hipótesis.

1. $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$.
2. $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$
3. $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle FDE$

Tesis.

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$



Unidad.2 Triángulos

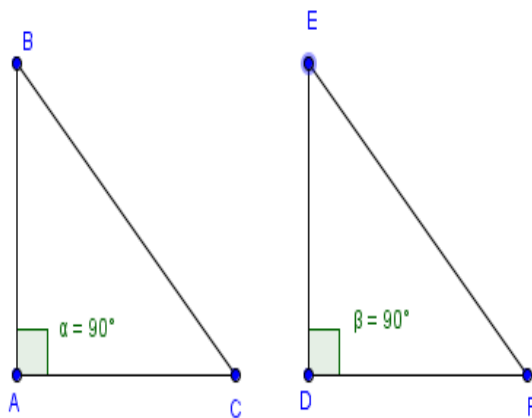


Figura 27. Congruencia de dos triángulo

Desarrollo de la demostración.

Por el teorema anterior, las hipótesis cumplen las condiciones del teorema.

Queda demostrado el corolario.

Teorema 2.12 Criterio de congruencia de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)

Si dos ángulos y el segmento comprendido entre ellos de un triángulo son congruentes a dos ángulos y el segmento entre ellos de otro triángulo, entonces ambos triángulos son congruentes.

Demostración.

Sean dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tales que:

Hipótesis.

1. $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle FDE$.
2. $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle EFD$.
3. $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$

Tesis.

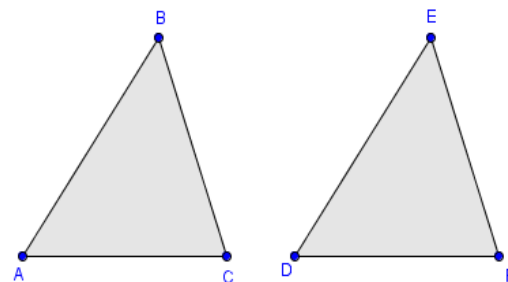


Figura 28. triángulos ABC y DEF



Unidad.2 Triángulos

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

Desarrollo de la demostración.

En este caso por hipótesis se tiene que $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle FDE$ y $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ por lo que basta con probar que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ debido a las condiciones del teorema anterior (criterio de congruencia de triángulos LAL), el 2.11. Con ello quedaría demostrado este teorema.

Observación: Como $\sphericalangle CAB + \sphericalangle BCA + \sphericalangle ABC = 180^\circ = \sphericalangle FDE + \sphericalangle EFD + \sphericalangle DEF$ por las hipótesis 1 y 2 se tiene que $\sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle FED$.

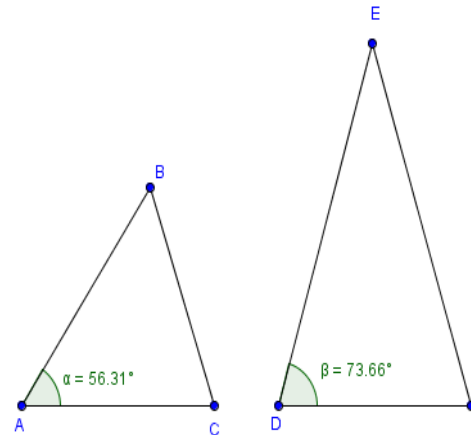


Figura 29. Triángulo CAB y FDE

Supongamos que $\overline{AB} \not\equiv \overline{DE}$ de donde se sigue que $m(\overline{AB}) \neq m(\overline{DE})$, luego entonces ocurre que $m(\overline{AB}) < m(\overline{DE})$ ó $m(\overline{AB}) > m(\overline{DE})$. Si es el caso que $m(\overline{AB}) < m(\overline{DE})$, entonces el vértice B podría estar en una posición por debajo del vértice E , lo que implicaría que el ángulo

$m(\sphericalangle CBA) > m(\sphericalangle FED)$ esto tendría como consecuencia que $m(\sphericalangle CBA) \neq m(\sphericalangle FED)$ por lo tanto, $\sphericalangle CBA$ y $\sphericalangle FED$ no son congruentes. Esto contradice la observación derivada de las hipótesis 1 y 2, lo cual es absurdo. Entonces, se concluye que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, de esto se sigue por el teorema 2.11 que se cumple el criterio de congruencia de triángulos LAL, por lo tanto $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. Queda demostrado el teorema.



Ejemplo

Afirmación. Todo triángulo isósceles tiene los ángulos de los vértices de la base congruentes.

Demostración.

Sea el $\triangle ABC$, un triángulo isósceles.

Hipótesis.

$$\overline{AB} \cong \overline{BC}.$$

Tesis.

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle BCA.$$

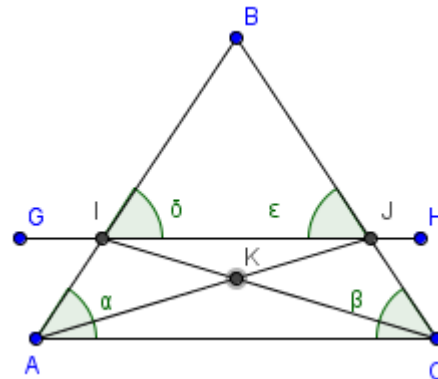


Figura 30. Triángulo isósceles

Desarrollo de la demostración.

Como construcción especial, trazamos un segmento \overline{GH} paralelo al segmento \overline{AC} que corte a los lados del triángulo \overline{AB} y \overline{BC} en los puntos I y J respectivamente tal que los segmentos $\overline{AI} \cong \overline{CJ}$. Posterior a esto se trazan los segmentos \overline{AJ} y \overline{CI} tales que se corten en un punto K . Fijemos nuestra atención en los triángulos $\triangle BAJ$ y $\triangle BCI$; de ambos triángulos podemos concluir que $\sphericalangle ABJ \cong \sphericalangle IBC$ por construcción. Ahora, por la hipótesis 1 se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, tal que $\overline{AI} + \overline{IB} = \overline{CJ} + \overline{JB}$; como $\overline{AI} \cong \overline{CJ}$ por construcción, entonces $\overline{IB} \cong \overline{JB}$.



Unidad.2 Triángulos

Hemos concluido que $\sphericalangle ABJ \equiv \sphericalangle IBC$ donde por hipótesis $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ y por deducción hemos concluido que $\overline{IB} \equiv \overline{JB}$. Lo que esto quiere decir es que los triángulos $\triangle ABJ \equiv \triangle IBC$ por el criterio de triángulos semejantes LAL.

De esto, podemos, usando la definición de congruencia de triángulos que los segmentos $\overline{AJ} \equiv \overline{CI}$. Por otro lado, por construcción tenemos que $\overline{AI} \equiv \overline{CJ}$ y por último, los triángulos $\triangle AIJ$ y $\triangle CJI$ comparten el segmento \overline{IJ} por lo que por el teorema 2.10, que determina el criterio de congruencia de triángulos LLL, los triángulos $\triangle AIJ \equiv \triangle CJI$. De esta congruencia triángulos y de la anterior podemos deducir que los ángulos $\sphericalangle BAJ \equiv \sphericalangle BCI$, debido a la definición de congruencia de triángulos. Pero debemos ver que $\sphericalangle CIJ \equiv \sphericalangle IJA$. Ahora, tomando en cuenta que los segmentos $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$, entonces por medio de los segmentos \overline{AJ} y \overline{CI} y recurriendo a los ángulos alternos internos, podemos ver que $\sphericalangle CIJ \equiv \sphericalangle ICA$ y $\sphericalangle IJA \equiv \sphericalangle CAJ$ se tiene entonces que $\sphericalangle ICA \equiv \sphericalangle CAJ$.

Por último, tenemos que

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle CAB) &= m(\sphericalangle CAJ) + m(\sphericalangle BAJ) \\ m(\sphericalangle BCA) &= m(\sphericalangle BCI) + m(\sphericalangle ICA); \end{aligned}$$

además

$$m(\sphericalangle CAJ) + m(\sphericalangle BAJ) = m(\sphericalangle BCI) + m(\sphericalangle ICA)$$

De esto se concluye que $m(\sphericalangle CAB) = m(\sphericalangle BCA)$ y por la definición de ángulos congruentes se tiene que $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle BCA$. Queda demostrada entonces la afirmación.

Como podrás ver, hicimos uso de diferentes métodos de demostración, esto lo puedes discutir con tu facilitador para que te explique con mayor detalle qué fue lo que se hizo paso a paso. Se sabe bien que pueden quedar lagunas dentro de la comprensión de una demostración, lo que recomendable es que intentes hacer por ti mismo cada demostración siguiendo las imágenes y las explicaciones, esto te dará una mejor comprensión del método usado. Recuerda que tenemos dos tipos de métodos principales dentro de la deducción lógica; la directa y la que



Unidad.2 Triángulos

implica reducir la tesis a su negación y con ello se busca encontrar algo que contradiga a una de las hipótesis.

Ten en mente que el objetivo no es que te aprendas de memoria las demostraciones, debes razonarlas, ya que en ese razonamiento obtendrás la habilidad de entender, y poder realizar una demostración de forma correcta, no te desesperes, este tipo de razonamiento no se hace de la noche a la mañana. Por ello cada actividad comprende una buena dosis de ejercicios que te permitirán ejercitar el razonamiento deductivo, que tanto necesita un matemático profesional.

Cierre de la unidad

Has concluido la segunda unidad de la unidad didáctica. A lo largo de ésta se abordaron las propiedades primarias de los triángulos; en las siguientes unidades retomaremos éstas para deducir nuevas propiedades, las cuales debes tener presentes porque con ellas podrás comprender el proceso que sigue en la siguiente unidad, en el cual utilizaremos estas bases para justificar cada una de las deducciones que hagamos en las siguientes unidades, por ello es importante que no las descuides para poder seguir adelante. Con lo anterior se te han dado las bases generales de la geometría de los triángulos. Vamos a la mitad, falta un tramo por andar, pero es importante que te hayas dado cuenta de que tener bien cimentadas las bases de cualquier materia te permitirá abordar los demás temas con una mayor confianza.

Recuerda recurrir al docente de esta unidad didáctica para resolver tus dudas, no dejes de preguntar, esto es parte de tu aprendizaje.

Las demostraciones que has visto hasta esta unidad son tan sólo unas cuantas de muchas que abordarás a lo largo de tu carrera dentro de las matemáticas. Es aconsejable que revises nuevamente la unidad en caso de que lo que se acaba de mencionar no te sea familiar, o no lo recuerdes; de no ser éste tu caso, has concluido la unidad, por lo que puedes ingresar a la



Unidad.2 Triángulos

Unidad 3, en la que se revisarán más propiedades sobre líneas rectas y como éstas se relacionan con las propiedades de la circunferencia; lo que te servirá para comprender el proceso de deducción de cual es uso en de estas propiedades dentro de la geometría de la circunferencia con lo cual, al finalizar esta unidad podrás encontrar cómo estas propiedades te aportan más sobre otros criterios que tomaremos para la semejanza y medición de áreas y volúmenes. Además de darte la habilidad de abordar los siguientes temas de esta asignatura y otras con las cuales ésta se relaciona, como el cálculo diferencial, el álgebra y la geometría analítica.

Recursos didácticos

Aquí podrás encontrar enlaces a páginas en internet cuyo contenido trata sobre geometría de forma muy visual, en donde las definiciones que se dan en esta unidad se visualizan y te dan una idea más clara de lo que es la geometría.

Todos estos recursos en línea tienen como principal objetivo apoyarte en el desarrollo de tu comprensión de las matemáticas, algunas en un nivel muy básico, otras lo hacen con más detalle, pero lo importante es darte las herramientas necesarias para que puedas comprender los fundamentos de las matemáticas.

Banfill, J. (2006). Geometría – Lecciones. AAA Math. Disponible en

<http://www.aamatematicas.com/geo.htm>

En esta liga podrás poner en práctica, mediante ejercicios interactivos y ejemplos, los temas que has estudiado en esta unidad.

Disfruta las matemáticas (2020), Geometría. Las matemáticas son divertidas. Disponible en

<http://www.disfrutalasmaticas.com/geometria/>

En esta liga encontrarás los postulados y propiedades de la geometría con un ejemplo ilustrativo.



Unidad.2 Triángulos

S.a. (S.f). Definiciones, términos de geometría. Salón hogar. Disponible en

<http://www.salonhogar.com/matemat/geometria/>

Este es un recurso aún en construcción, pero que de momento te proporciona los conceptos básicos como medio de consulta.

- Utah State University (2023). Geometría (grados 9 -12). Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales. Disponible en

http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_3.html

En esta liga encontrarás recursos interactivos que te invitan a construir con figuras geométricas formas y estructuras divertidas que ponen a prueba tus conocimientos de geometría.

- S.a. (S.f). Geometría. Superprof, Material didáctico. Disponible en

<http://www.vitutor.com/geometria.html>

Aquí puedes revisar los postulados, definiciones y teoremas de la geometría.

- FAUD (2020). Cuerpos geométricos, Geometría. Curso de ingreso 2020- FAUD. Disponible en

<https://www.uco.es/~ma1fegan/Comunes/recursos-matematicos/DESARROLLO-DE-CUERPOS-GEOMETRICOS.pdf>

Este es un recurso divertido que pone a prueba tus conocimientos sobre las propiedades de los cuerpos geométricos relacionando definiciones con las formas geométricas.

- Aula fácil (2024). Cursos gratis de Geometría. Aula fácil, cursos online gratuitos. Disponible en

<http://aulafacil.com/matematicas-basicas/geometria/curso/Temario.htm>

Este recurso está constituido en forma de lecciones, adecuado para revisar con más detenimiento tus conocimientos de geometría.

Fuentes de consulta

Básica

- Coxeter, H. S. M. (1971). *Fundamentos de geometría*. México: Limusa. ISBN 9681806417.



Unidad.2 Triángulos

- Euclides. (1956). *Euclid's Elements*. Nueva York: Dover. ISBN 0486600882.
- Geltner, P. B., & Peterson, D. J. (1998). *Geometría*. México: Thomson Editores. ISBN 978-968-7529-47-9.
- Golovina, L. I., & Yaglom, I. M. (1976). *Inducción en la geometría*. Moscú: Mir.
- Pogorelov, A. V. (1974). *Geometría elemental*. Moscú: Mir.
- Redon Gómez, A. (2000). *Geometría paso a paso*. México: Tébar. ISBN 978-84-95447-22-7.
- Shively, L. S. (1984). *Introducción a la geometría moderna*. México: Continental.

Complementarias

- Dubnov, Y. S. (1993). *Errores en las demostraciones geométricas*. Moscú: Mir. ISBN 978-84-80410-40-3.
- Fetisov, A. I. (1980). *Acerca de la demostración en geometría*. Moscú: Mir.
- Kostovski, A. N. (1984). *Construcciones geométricas mediante compás*. Moscú: Mir.
- Smogorzhevski, A. S. (1988). *La regla en construcciones geométricas*. Moscú: Mir.