Matemáticas

Geometría

Segundo semestre

Unidad 3. Trigonometría y circunferencia

Clave

05141208/06141208

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Presentación

Una vez que has concluido el estudio de las unidades 1 y 2, en esta unidad podrás encontrar un tema completamente nuevo y vital para las matemáticas, se trata de la trigonometría. Aunque tomamos algunos aspectos de la geometría con coordenadas para apoyar las demostraciones de las identidades trigonométricas que aquí se deducen, se introducen los conceptos de función seno, coseno y tangente, mientras que las funciones cotangente, secante y cosecante las podrás abordar con mayor detalle en otras asignaturas, pero el papel que juega la trigonometría en la geometría es fundamental para los cálculos, por ejemplo, del área de un polígono de tres o más lados. Sólo con los ángulos de un polígono puedes saber, haciendo uso de la trigonometría, su área. Demostramos algunas de las identidades para que observes y estudies el proceso de demostración de una identidad trigonométrica.

La segunda sección de esta unidad está dividida en dos partes. En la primera estudiarás un tratamiento sobre la relación que guardan los ángulos con la circunferencia y las distintas propiedades que se pueden dar a partir de estas relaciones. En la segunda parte estudiarás las propiedades básicas de las rectas y segmentos relacionados con una circunferencia, el radio, el diámetro, la cuerda, la recta secante y la recta tangente.

En esta unidad definiremos lo que es una función trigonométrica y la relacionaremos en una primera parte con el triángulo rectángulo y el eje cartesiano para una mejor comprensión en términos actuales. Posteriormente abordaremos las identidades trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria dentro del eje coordenado. Con esto desarrollaremos las demostraciones que dan sustento a las identidades.

También es importante que pongas especial cuidado en los detalles de las demostraciones ya que se hacen uso de propiedades, definiciones y teoremas vistos en las unidades anteriores. Por ello es vital que tu atención se mantenga durante el desarrollo de una demostración para que la comprendas y seas capaz de replicarla con todo detalle.

Recuerda que el objetivo de esta unidad didáctica, parte de proporcionarte el conocimiento básico de la geometría euclidiana, te aporta elementos en el desarrollo de tu razonamiento para que puedas alcanzar el perfil deseado al concluir tu carrera.

Competencia específica

Utilizar las definiciones de la trigonometría y la circunferencia para resolver problemas geométricos en el plano, mediante el uso de sus propiedades y teoremas.

Logros

- Comprende las definiciones de trigonometría y circunferencia.
- Resuelve diversos problemas que impliquen el uso de las identidades trigonométricas.
- Identifica y emplea las propiedades de la circunferencia en la solución de ejercicios.
- Resuelve diversos problemas que impliquen el uso de las identidades trigonométricas y propiedades de la circunferencia.

3. Trigonometría y Circunferencia

3.1. Trigonometría

En la trigonometría la definición de ángulo se retoma y la magnitud angular se determina por la amplitud de la abertura de los lados del ángulo.

Para comprender mejor lo anterior: sean dos rectas R_1 y R_2 tales que se cortan en un punto O, que llamaremos origen, tomamos dos segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ en las rectas R_1 y R_2 respectivamente, tales que formen el ángulo $\sphericalangle AOB$. Si la recta R_1 es horizontal y se fija en esta posición, entonces denominaremos al segmento $\overline{OA}$ lado fijo del ángulo $\sphericalangle AOB$ y la

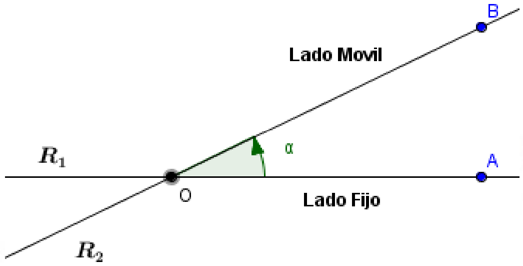

Figura 1. Representación del Ángulo

magnitud de este ángulo se determinará por la amplitud de abertura del segmento $\overline{OB}$, que definiremos como la rotación del segmento $\overline{OB}$. Al segmento $\overline{OB}$ lo llamaremos lado móvil del ángulo $\sphericalangle AOB$.

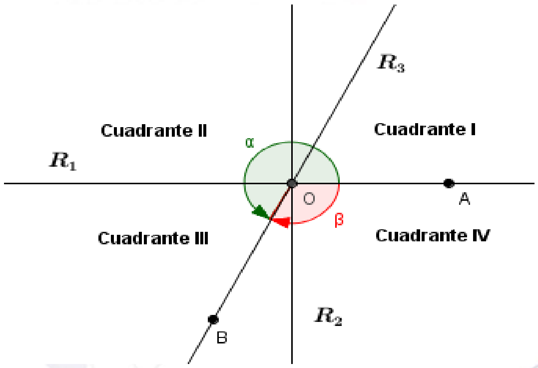

Figura 2. intersección de tres rectas

Ahora, tomemos tres rectas R_1, R_2 y R_3, tales que $R_1 \perp R_2$, y donde, R_1 es horizontal y R_2 es vertical, y $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{O\}$, donde el punto O es el origen. Las rectas R_1 y R_2 se fijan en el plano P. La recta R_3 se fija solamente al punto O; su abertura depende de la amplitud de rotación del ángulo que forme con la recta R_1.

Se define una función $x: R_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x(O) = 0$. Además, por los postulados de orden, si $A \in R_1$ es tal que $AO \leq$, esto es que A esta a la izquierda de O, entonces $x(\overline{AO}) = -x$; es decir, x toma valores negativos. Ahora, si $OA \leq$, lo que implica que A está a la derecha de O, entonces $x(\overline{OA}) = x$; esto es que x es positiva. Del mismo modo se define una función $y: R_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

Ejemplo. Como se pueden observar los ángulos α, β, γ y δ toman distintos valores angulares; los tres primeros son valores positivos y el valor de δ es el único negativo.

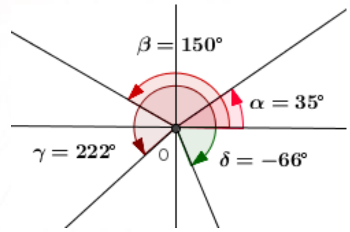

Figura 3. Gráfica de rectas

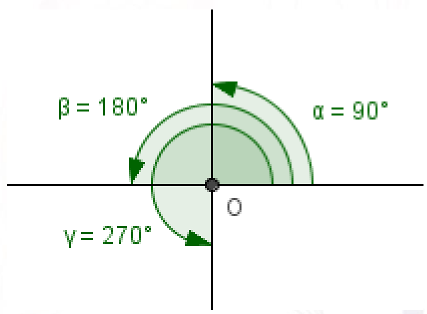

Figura 4. Valores angulares

Del eje coordenado que acabamos de definir, los valores angulares que toma cada uno de los cuadrantes se denominan valores angulares de los cuadrantes. La parte positiva del eje de las abscisas tiene medida angular de 0º; la parte positiva del eje de las ordenadas tiene un valor angular de 90º; la parte negativa del eje de las abscisas tiene un ángulo con medida de 180º y la parte negativa del eje de las ordenadas tiene un valor angular de 270º.

$y(O) = 0.$ Por los postulados de orden, si $B \in R_2$ es tal que $BO \leq$, esto es que B está por abajo de O, entonces $y(\overline{BO}) = -y;$ es decir, y toma valores negativos. Ahora, si $OB \leq$, lo que implica que B está por arriba de O, entonces $y(\overline{OB}) = y;$ esto es que y es positiva. Así las rectas R_1 y R_2 forman lo que conocemos como eje coordenado, donde la recta R_1 es el **eje de las abscisas** y la recta R_2 es el **eje de las ordenadas**.

Los ángulos $\sphericalangle AOB = \alpha$ y $\sphericalangle BOA = \beta$ tienen orientaciones opuestas; α tiene orientación positiva y β tiene orientación negativa.

Para definir lo que vamos a llamar funciones trigonométricas, primero debemos tomar un triángulo rectángulo ΔABC, tal que $m(\overline{AB}) = a$, $m(\overline{AC}) = b$ y $m(\overline{BC}) = c$; tales que por definición a, b y c son números en la recta real.

Sea un triángulo rectángulo ΔABC y sea el conjunto de los ángulos $H = \{\alpha | 0° \leq \alpha \leq 360°\}$ tal que la función seno se define como sigue: Sean a, b y c en $\mathbb{R}$ tales que $a, c \neq 0$, entonces el $sen: H \rightarrow \mathbb{R}$, está dado por la regla de correspondencia $sen(\alpha) = \frac{b}{c}$. La función coseno $cos: H \rightarrow \mathbb{R}$ se define como $\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$. Por otra parte, la función tangente se define como $tan: H = \{\alpha \in \mathbb{R}: \alpha \neq (90 + n180); n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ y su regla de correspondencia es $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$.

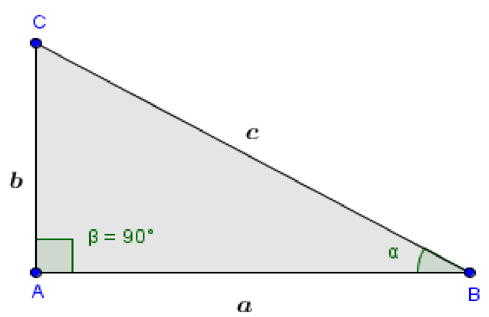

Figura 5. Triángulos rectángulos

Lo anterior sirve como introducción a la siguiente subsección en la cual definiremos otras propiedades de estas funciones.

3.1.1. Seno, coseno y tangente

Como observaste en la sección anterior, ya hemos determinado los valores para el seno, el coseno y la tangente; y como te habrás percatado, la relación que guardan estas funciones trigonométricas con el triángulo rectángulo se deriva de las mismas propiedades que el triángulo rectángulo tiene. Entonces, para un ángulo α dentro del triángulo rectángulo distinto de $90°$, el seno como lo definimos es $sen(\alpha) = \frac{b}{c}$, pero si observamos, a, b y c son las medidas de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo, donde $a, c \neq 0$; y no son -como se puede pensar- los lados del triángulo en sí. Debemos de guardar esta diferencia porque para aspectos formales, estamos trabajando con funciones bien definidas, por ello es importante darnos cuenta que para poder hacer un cociente es necesario disponer de dos números reales tales que se puedan operar de esta forma.

Ahora, regularmente se definen los lados del triángulo rectángulo en función del ángulo α, tales que se nombra hipotenusa al lado del triángulo que tiene una inclinación distinta a 0º, 90º ó 180º, y además este lado es opuesto al ángulo de 90º que determina nuestro triángulo como rectángulo. Los otros dos lados son denominados cateto[1] opuesto, recibe este nombre dado que es el lado opuesto al ángulo α, y el lado del triángulo, que es al mismo tiempo lado del ángulo α, tiene por nombre cateto adyacente. Entonces, el cateto adyacente tendrá una longitud equivalente a a, la longitud del cateto opuesto será de b y la hipotenusa tendrá una longitud igual a c.

Retomando las definiciones que dimos para el seno, coseno y la tangente podemos observar lo siguiente enfocando nuestra atención en el eje coordenado definido en la sección anterior y al trazar un triángulo rectángulo ΔOAB, tal que la $m(\overline{AO}) = -x$ y la $m(\overline{OA}) = x$; del mismo modo $m(\overline{OB_1}) = m(\overline{AB}) = y$; además $m(\overline{B_1O}) = m(\overline{BA}) = -y$. El valor de c se toma como la longitud del lado $\overline{OB}$ tal que es siempre positivo. Entonces:

[1] El término cateto se deriva de las palabras *cathetus* en latin y *κάθετος* en griego, que significa perpendicular, haciendo referencia a los lados perpendiculares del triángulo rectángulo.

Triángulo rectángulo en el primer cuadrante.

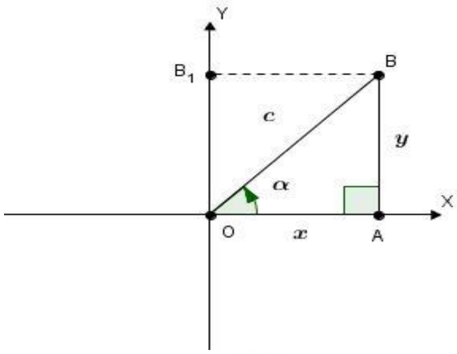

Figura 6. triángulo Rectángulo del primer cuadrante

1) $sen(\alpha) = \frac{y}{c}$ es positivo dado que y es positiva.

2) $\cos(\alpha) = \frac{x}{c}$ es positivo porque x es positiva.

3) $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$ es positiva porque x y y son positvas.

Triángulo rectángulo en el segundo cuadrante.

4) $sen(\alpha) = \frac{y}{c}$ es positivo dado que y es positiva.

5) $\cos(\alpha) = \frac{-x}{c}$ es negativo porque x es negativa.

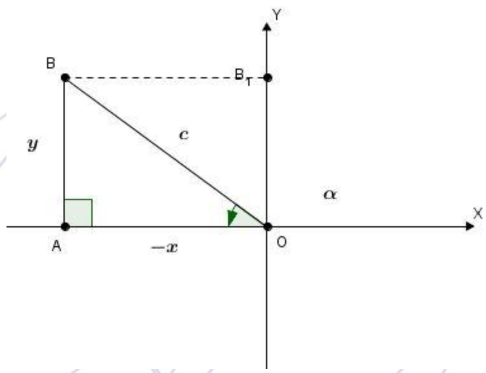

Figura 7. Triángulo rectángulo segundo cuadrante

6) $\tan(\alpha) = \frac{y}{-x}$ es negativa porque x es negativa y donde y es positiva.

Triángulo rectángulo en el tercer cuadrante.

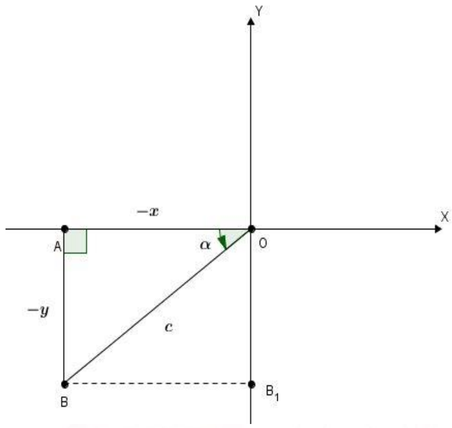

Figura 8. Triángulo rectángulo tercer cuadrante

7) $sen(\alpha) = \frac{-y}{c}$ es negativo dado que y es negativa.

8) $\cos(\alpha) = \frac{-x}{c}$ es negativo porque x es negativa.

9) $\tan(\alpha) = \frac{-y}{-x}$ es positiva porque x es negativa y también y es negativa.

Triángulo rectángulo en el cuarto cuadrante.

10) $sen(\alpha) = \frac{-y}{c}$ es negativo dado que y es negativa.

11) $\cos(\alpha) = \frac{x}{c}$ es positiva porque x es positiva.

12) $\tan(\alpha) = \frac{-y}{x}$ es negativa porque x es positiva, y donde y es negativa.

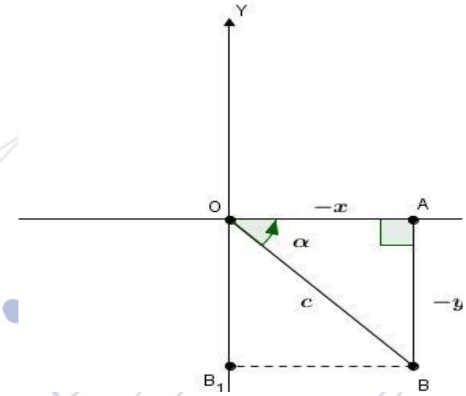

Figura 9. Triángulo rectángulo cuarto cuadrante

De lo anterior podemos dar la siguiente información:

Función trigonométrica	**Cuadrante I**	**Cuadrante II**	**Cuadrante III**	**Cuadrante IV**
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-

Tabla 1. Circunferencia trigonométrica

Los primeros estudios formales sobre las funciones trigonométricas se hicieron sobre la circunferencia, la cual denominaremos circunferencia trigonométrica. La presentación anterior es posterior a los estudios con la circunferencia, que da inicio con el triángulo rectángulo y varios siglos después, una vez que René Descartes definió el eje coordenado. Pero para nuestros fines es más fácil de entender las propiedades trigonométricas con este método que con el de la circunferencia trigonométrica, pero dado que nuestro estudio se trata sobre geometría, no podemos pasar por alto estos conceptos a partir de la circunferencia.

Recurrimos nuevamente a las definiciones dadas anteriormente tales que si tenemos una circunferencia C cuya longitud de su radio es 1, tal que $m(\overline{OB}) = c = 1$, esto significa que tenemos a la circunferencia unitaria. ¿Qué consecuencias tiene este supuesto? Lo primero que nos viene a la mente es que si $m(\overline{OA}) = x,\ m(\overline{AB}) = y$, entonces $\cos(\alpha) = \frac{x}{c} = \frac{x}{1} = x$; de forma análoga concluimos que $sen(\alpha) = y$. Para la tangente tenemos que $\{\alpha \in \mathbb{R}: \alpha \neq (90 + n180); n \in \mathbb{Z}\}$ en razón $tan(\alpha) = \frac{y}{x} = m(\overline{CD})$. Aquí en la circunferencia se

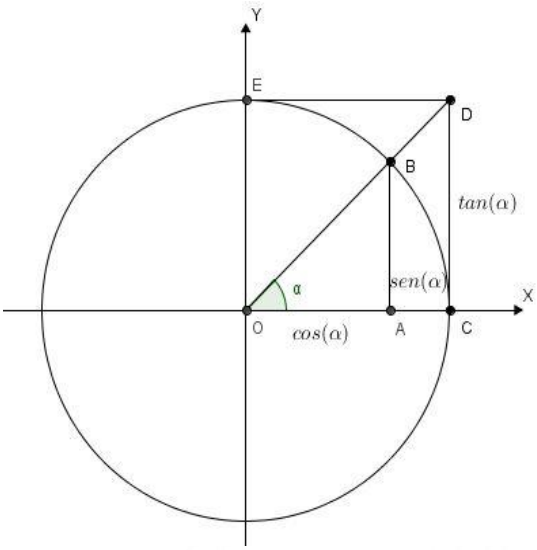

Figura 10. Circunferencia trigonométrica

puede observar con claridad por qué los valores máximos y mínimos que toman tanto el seno como el coseno son 1 y -1.

Si $\alpha = 0$, entonces $sen(\alpha) = 0$, $cos(\alpha) = 1$

y la $tan(\alpha) = 0°$. Cuando $\alpha = 90°$, entonces $sen(\alpha) = 1$, $cos(\alpha) = 0$ y la $tan(\alpha) = indefinida$. De igual forma, si $\alpha = 180°$, se tiene $sen(\alpha) = 0$, $cos(\alpha) = -1$ y la $tan(\alpha) = 0$; y por último, si $\alpha = 270°$, se sigue que $sen(\alpha) = -1$, $cos(\alpha) = 0$ y $tan(\alpha) = indefinida$.

Como es de observar, el cálculo de estas funciones se debe de tomar respecto a los valores de la amplitud del ángulo α, pero con la circunferencia unitaria y su relación con la amplitud de un ángulo, van de la mano. Si seguimos el eje coordenado que se encuentra dentro de la circunferencia, entonces si tomamos la longitud de la circunferencia que es la longitud del diámetro multiplicado por π, esto da un valor de $\pi D = \pi 2r$ si r es el radio de la circunferencia C. Entonces podemos observar que si $r = 1$ se sigue que $2\pi = \pi D$.

De esta forma se puede definir una función $f: [0°, 360°] \rightarrow [0, 2\pi]$, de tal forma que $f(0°) = 0$, $f(90°) = \frac{\pi}{2}$, $f(180°) = \pi$, $f(270°) = \frac{3}{2}\pi$ y $f(360°) = 2\pi$. Pero ¿quién es la función f? Esta función se define como la medida angular en radianes. Así tenemos una definición.

Definición 3.1 Sea la circunferencia C de radio $r = 1$, de donde se define a la función $f: [0°, 360°] \to [0, 2\pi]$ tal que $f(\alpha) = s$ tal que $s \in [0, 2\pi]$, donde $s = \frac{\alpha}{180}\pi$ es la medida angular en radianes.

Con esta relación podemos calcular la siguiente tabla:

Sea $\alpha = 30°$, entonces por esta relación $s = \frac{30}{180}\pi = \frac{\pi}{6}$. Si $\alpha = 45°$, entonces por esta relación $s = \frac{45}{180}\pi = \frac{\pi}{4}$; entonces:

s	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$270°$	$360°$
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\frac{\pi}{3}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π

Tabla 2. Medidas en Radianes

Con esto podemos pensar en cuáles otras propiedades podemos deducir de las funciones trigonométricas. En la siguiente sección trabajaremos con lo que vamos a conocer como identidades trigonométricas.

3.1.2. Aplicaciones del seno, coseno y tangente

De la circunferencia unitaria podemos denotar la ecuación que la define dentro del eje coordenado; entonces, denotamos a la circunferencia como el conjunto de puntos en el plano cartesiano $C = \{(x, y) |\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R};\ x^2 + y^2 = 1\}$, tal que, si $sen(\alpha) = y$ y $cos(\alpha) = x$, se sigue que $cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = 1$.

Dentro de esto, hasta el momento hemos tomado a ángulo α como un valor positivo, ¿Qué ocurre si α es negativo? Para responder este cuestionamiento debemos dar una definición.

Definición 3.2 Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$ y cuyo rango está determinado en $\mathbb{R}$. Se dice que f es una función par si para toda $x \in [a, b]$, $f(-x) = f(x)$; y f es impar si para toda $x \in (a, b)$, es tal que $f(-x) = -f(x)$.

Si el ángulo α está en el intervalo $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, entonces, si $\cos(\alpha) = x$ cuando $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ Ahora si $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ entonces $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) = (-90°, 0°) = (180°, 270°) = \left(\pi, 3\frac{\pi}{2}\right), \cos(-\alpha) = x$; por lo que $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Por lo tanto el coseno es una función par.

Para el seno tenemos un proceso semejante. Sea el ángulo α en el intervalo $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Así, cuando $sen(\alpha) = y$ si $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, entonces si $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\pi, 3\frac{\pi}{2}\right)$, se sigue $sen(-\alpha) = -y = -sen(\alpha)$, esto implica que la función seno es una función impar en el intervalo $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
La función tangente dentro del intervalo $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tiene como valor $tan(\alpha) = \frac{y}{x}$, siempre que $x \neq 0$ y $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Entonces, si $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\pi, 3\frac{\pi}{2}\right)$, tal que $tan(-\alpha) = \frac{-y}{-x} = \frac{sen(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\,tan(\alpha)$. Por lo tanto la función tangente es una función impar.

Ahora tomemos la circunferencia unitaria C con su centro en el origen del eje coordenado x, y. Entonces, sean dos ángulos $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$, tales que $\beta < \alpha$ tales que $0 < \alpha - \beta$. Así, los puntos $K = (x_1, y_1)$, $L = (x_2, y_2)$ y $J = (x_3, y_3)$ están en la circunferencia lo que implica que $K = (cos(\alpha),\ sen(\alpha)), L = (cos(\beta),\ sen(\beta))$ y $J = (cos(\alpha - \beta),\ sen(\alpha - \beta))$.

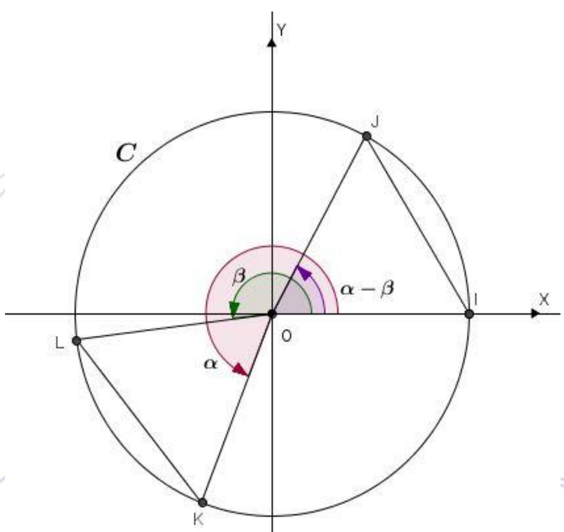

Figura 11. Círculo unitario

Se tiene que las cuerdas $\overline{IJ}$ y $\overline{KL}$ tienen la misma longitud, dado que los ángulos $\sphericalangle IOJ$

y $\sphericalangle LOM$ son congruentes debido a que $\beta + \sphericalangle LOK = \alpha$ y $\sphericalangle IOJ = \alpha - \beta$. Despejamos β de $\beta + \sphericalangle LOK = \alpha$ y nos queda $\sphericalangle LOK = \alpha - \beta$, por lo tanto $\sphericalangle LOK = \sphericalangle IOJ$ por lo tanto $m(\overline{IJ}) = m(\overline{KL})$.

En el eje coordenado la longitud de un segmento está definido como $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; entonces se cumple que $d(\overline{IJ}) = d(\overline{KL})$, se sigue que sutituyendo valores tenemos:

$$d\big((0,1), (x_3, y_3)\big) = d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

de donde:

$$d\big((0,1), (cos(\alpha - \beta), sen(\alpha - \beta))\big) = d((cos(\alpha), sen(\alpha)), (cos(\beta), sen(\beta)))$$

así, al sustituir sobre la raíz cuadrada estos valores, tenemos:

$$\sqrt{(cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (sen(\alpha - \beta) - 0)^2} = \sqrt{(cos(\beta) - cos(\alpha))^2 + (sen(\beta) - sen(\alpha))^2}$$

Se cancelan las raíces cuadradas por propiedades de los radicales, entonces:

$$(cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (sen(\alpha - \beta))^2 = (cos(\beta) - cos(\alpha))^2 + (sen(\beta) - sen(\alpha))^2$$

desarrollamos los cuadrados tales que:

$$\begin{aligned} &cos^2(\alpha - \beta) - 2cos(\alpha - \beta) + 1 + sen^2(\alpha - \beta) \\ &\qquad = cos^2(\beta) + sen^2(\beta) + (cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)) - 2\,cos(\alpha)cos(\beta) \\ &\qquad - 2\,sen(\alpha)sen(\beta) \end{aligned}$$

seguimos con las operaciones y

$$cos^2(\alpha-\beta)+sen^2(\alpha-\beta)-2cos(\alpha-\beta)+1$$
$$=1+1-2\,cos(\alpha)cos(\beta)-2\,sen(\alpha)sen(\beta)$$

Se reducen términos y obtenemos restando y dividiendo términos tales que

$$-2cos(\alpha-\beta)+1+1=1+1-2(\,cos(\alpha)cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta))$$

se tiene finalmente

$$cos(\alpha-\beta)=cos(\alpha)cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta)$$

Esto que acabamos de deducir, se define como un teorema, entonces:

Teorema 3.1 Sean dos ángulos $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$ cualesquiera, tales que si $\beta<\alpha$, entonces

$$cos(\alpha-\beta)=cos(\alpha)cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta).$$

Demostración

Con el desarrollo anterior, este teorema queda demostrado.

El siguiente teorema describe otra identidad trigonométrica.

Teorema 3.2 Sean dos ángulos $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$ cualesquiera, tales que si $\beta<\alpha$, entonces

$$cos(\alpha+\beta)=cos(\alpha)cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta).$$

Demostración

Vamos a usar el teorema anterior para la demostración de ésta.

Hipótesis

1. $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$;

2. $\beta < \alpha$.

3. Estos ángulos se definen de la circunferencia unitaria C dentro del eje coordenado x, y.

Tesis

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta).$$

Desarrollo de la demostración

Sea $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha - (-\beta))$, luego entonces por el teorema anterior

$$cos(\alpha + \beta) = cos\big(\alpha - (-\beta)\big) = cos(\alpha)cos(-\beta) + sen(\alpha)sen(-\beta)$$

dado que el coseno es una función par y el seno una función impar, entonces se sigue

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta);$$

Por lo tanto, el teorema queda demostrado.

Su pongamos por un momento que $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ donde estamos sobre la circunferencia unitaria C sobre el plano cartesiano; entonces si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se sigue que:

Teorema 3.3 Sean $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tales que $cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = sen(\beta)$.

Demostración

Hipótesis

1. $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

2. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Tesis

$cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = sen(\beta)$.

Desarrollo de la demostración

Sea $cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \; cos\left(\frac{\pi}{2}\right) cos(\beta) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) sen(\beta) = 0 \cdot cos(\beta) + 1 \cdot sen(\beta) = sen(\beta)$.

Por lo tanto $cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = sen(\beta)$. Queda demostrado el teorema.

Teorema 3.4 Sean $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tales que $sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos(\beta)$.

Demostración

Hipótesis

1. $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

2. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Tesis

$sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos(\beta)$.

Desarrollo de la demostración

Sea $sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \; cos\left(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \beta)\right) = cos(\beta)$ por el teorema anterior. Por lo tanto $sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos(\beta)$. Queda demostrado el teorema.

Teorema 3.5 Sean dos ángulos $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ cualesquiera, tales que si $\beta < \alpha$, entonces

$sen(\alpha+\beta)=cos(\alpha)sen(\beta)+sen(\alpha)cos(\beta)$.Sean dos ángulos $\alpha,\beta \in [0,2\pi)$ cualesquiera, tales que si $\beta<\alpha$, entonces

$$sen(\alpha+\beta)=cos(\alpha)sen(\beta)+sen(\alpha)cos(\beta).$$

Demostración

Hipótesis

1. $\alpha,\beta \in [0,2\pi)$.
2. $\beta<\alpha$.

Tesis

$sen(\alpha+\beta)=cos(\alpha)sen(\beta)+sen(\alpha)cos(\beta)$.

Desarrollo de la demostración

Sea por el teorema 3.3 $sen(\alpha+\beta)= cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)$, tal que $sen(\alpha+\beta)= cos\left((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta\right)=cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)cos(\beta)+sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sen(\beta)$, por el teorema 3.1, se sigue por los teoremas 3.3 y 3.4:

$$sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)cos(\beta)+cos(\alpha)sen(\beta).$$

Queda demostrado este teorema.

Teorema 3.6 Sean dos ángulos$\{\alpha,\beta \in \mathbb{R}: \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2}+n\pi; n\in\mathbb{Z}\}$ cualesquiera, tales que si $\beta<\alpha$, entonces

$$sen(\alpha-\beta)=cos(\alpha)sen(\beta)-sen(\alpha)cos(\beta).$$

La demostración de este teorema se deja para que la desarrolles en la actividad 2.

Teorema 3.7 Sean dos ángulos $\left\{\alpha,\beta \in \mathbb{R}: \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2}+n\pi; n\in\mathbb{Z}\right\}$ cualesquiera, tales que si $\beta<\alpha$, entonces

$$tan(\alpha+\beta)=\frac{tan(\alpha)+tan(\beta)}{1-tan(\alpha)tan(\beta)}.$$

Demostración

Hipótesis

1. $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$.

2. $\beta<\alpha$.

Tesis

$tan(\alpha+\beta)=\frac{tan(\alpha)+tan(\beta)}{1-tan(\alpha)tan(\beta)}$.

Desarrollo de la demostración

Sea $tan(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}$, por los teoremas 3.5 y 3.2 se sigue

$$tan(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha)cos(\beta)+cos(\alpha)sen(\beta)}{cos(\alpha)cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}$$

multiplicamos por $\frac{\frac{1}{cos(\alpha)cos(\beta)}}{\frac{1}{cos(\alpha)cos(\beta)}}$ al término de la derecha de la equivalencia y obtenemos

$$tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{sen(\alpha)cos(\beta)}{cos(\alpha)cos(\beta)}+\frac{cos(\alpha)sen(\beta)}{cos(\alpha)cos(\beta)}}{\frac{cos(\alpha)cos(\beta)}{cos(\alpha)cos(\beta)}-\frac{sen(\alpha)sen(\beta)}{cos(\alpha)cos(\beta)}}$$

Reducimos términos tales que

$$tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}\cdot 1+\frac{sen(\beta)}{cos(\beta)}\cdot 1}{1-tan(\alpha)tan(\beta)}$$

por último

$$tan(\alpha+\beta)=\frac{tan(\alpha)+tan(\beta)}{1-tan(\alpha)tan(\beta)}.$$

Por lo tanto, queda demostrado el teorema.

Teorema 3.8 Sean dos ángulos $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ cualesquiera, tales que si $\beta < \alpha$, entonces

$$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan(\alpha) - tan(\beta)}{1 + tan(\alpha)tan(\beta)}.$$

El desarrollo de esta demostración la realizarás en la actividad 3.

Las identidades trigonométricas que acabamos de ver son sólo algunas, tendrás la oportunidad de ver otras en las siguientes actividades y resulta interesante saber que con esto podemos resolver problemas que en la unidad 4 abordaremos, y ver que hay otras opciones para resolver diversos problemas nos dará otra perspectiva sobre la utilidad que guarda la trigonometría para resolver problemas diversos. Otra cosa que habrás notado, es que sólo trabajamos con el seno, el coseno y la tangente. La cotangente, secante y cosecante se dejan para su desarrollo en otras asignaturas dado que la mayoría de las identidades trigonométricas con las que trabajarás tienen una estrecha relación con el seno, el coseno y la tangente.

Por otro lado, la circunferencia unitaria juega un gran papel para comprender de dónde salen los valores que muchas veces damos por sentados dado que hemos trabajado muchas veces con ellos, pero sin entender con claridad de dónde salen determinados resultados. Así, es momento de pasar a ver qué otras propiedades podemos determinar de la circunferencia y el círculo.

3.2. Propiedades de la circunferencia

Durante la unidad 1 se presentaron algunas propiedades de la circunferencia y el círculo, en esta sección retomaremos esas propiedades e iniciaremos recordando algunas que son básicas.

Un círculo es una figura plana que se encuentra en el interior de una curva cerrada cuyos puntos equidistan con un punto llamado centro del círculo.

Una circunferencia es el lugar geométrico de todos aquellos puntos en un plano que equidistan de otro llamado centro.

Un radio de la circunferencia es un segmento de línea que une el centro de la circunferencia y un punto sobre la circunferencia misma.

Todo segmento de recta que vaya del centro a la circunferencia será denominado radio; todos los radios son segmentos congruentes.

Un diámetro es un segmento de recta que corta a la circunferencia en dos puntos distintos (opuestos entre sí) y pasa a su vez por el centro de la circunferencia. Todos los segmentos llamados diámetros de una circunferencia dada son congruentes.

Un arco de una circunferencia es un subconjunto conexo de puntos que son parte de la circunferencia sin tomar por completo a todo el conjunto de puntos de la circunferencia. Un arco que abarque la mitad de la circunferencia de llamará semicircunferencia.

Un **cuadrante** de una circunferencia es la cuarta parte del círculo y la circunferencia determinado por diámetros perpendiculares entre sí. Regularmente se toman a estos diámetros uno horizontal y otro vertical.

Una **cuerda** es un segmento de recta cuyos puntos extremos están en la circunferencia.

Una **secante** es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos opuestos de ésta.

Una **tangente** es una recta que interseca a la circunferencia en un punto.

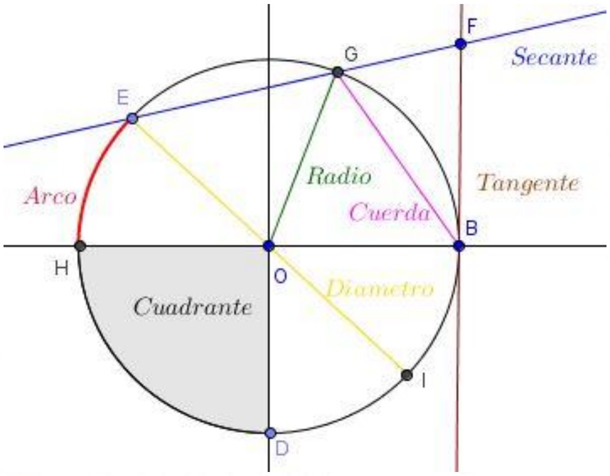

Figura 12. Recta tangente del círculo unitario

3.2.1. Ángulos y la circunferencia

Iniciaremos esta subsección dando una serie de definiciones.

Definición 3.3 Se denomina ángulo interior de la circunferencia a todo ángulo que tenga su vértice en algún punto dentro del círculo.

Definición 3.4 Se llama ángulo central de la circunferencia a todo ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia o del círculo.

Definición 3.5 Un ángulo inscrito es aquel ángulo cuyo vértice está en la circunferencia y cuyos lados sean cuerdas de la circunferencia.

Definición 3.6 Un ángulo semi inscrito es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia, uno de sus lados es un segmento de una recta tangente de la circunferencia y el otro lado es una cuerda de la circunferencia.

Definición 3.7 Se dice que un ángulo exterior es aquel ángulo que tiene su vértice en un punto externo al círculo y a la circunferencia, además dos de sus lados son secantes de la circunferencia o uno de sus lados es una secante y el otro es una tangente.

Definición 3.8 Sea cualquier ángulo exterior cuyos lados sean tangentes a una circunferencia; a este ángulo exterior lo denominaremos ángulo circunscrito de la circunferencia.

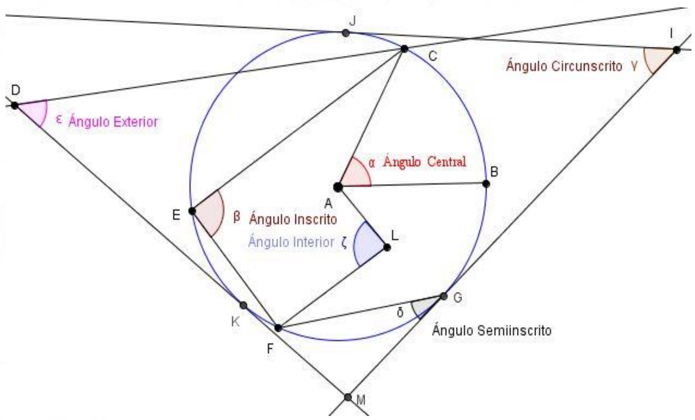

Figura 13. Ángulos circunscritos de la circunferencia

Definición 3.9 Para dar la medida de un arco de circunferencia se toma al grado, de forma análoga al grado de un ángulo y tal que $1° = \frac{1}{360}$.

Notación. El arco de una circunferencia se denotará por $\widehat{AB}$ para cualesquiera dos puntos A y B de la circunferencia.

Ahora podemos determinar la medida de cada uno de estos ángulos.

Postulado 3.1 Todo ángulo central de una circunferencia tiene su medida equivalente a la medida del arco determinado por los lados del ángulo central.

Teorema 3.9 La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia tiene la mitad del arco comprendido entre sus lados del ángulo.

Demostración. Sea un ángulo inscrito α en una circunferencia S, tal que tenemos tres casos.

Hipótesis

1. El ángulo α es inscrito.

Tesis

$\alpha = \frac{1}{2}\widehat{DC}$

Desarrollo de la demostración

Caso 1

Por el postulado 3.1 se tiene que el ángulo central $\sphericalangle DOC = \widehat{DC}$. Definamos al ángulo $\sphericalangle DOC = \delta$. Entonces, basta probar que $\alpha = \frac{1}{2}\delta$. Por construcción, se tiene que $\beta + \delta = 180°$ y por otro lado los ángulos α, β junto con γ son ángulos internos del triangulo ΔADO. Esto tiene como consecuencia que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, esto implica que $\beta + \delta = \alpha + \beta + \gamma$, luego se deduce que $\delta = \alpha + \gamma$. Como el segmento $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OD}}$ por ser radios de la circunferencia C, esto implica que el triángulo ΔADO es isósceles, por lo tanto el ángulo $\alpha = \gamma$ se sigue entonces $\delta = 2\alpha$,

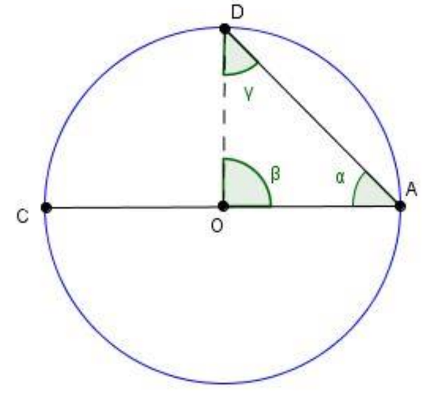

Figura 14. Caso 1

despejamos el 2 y se tiene a $\alpha = \frac{1}{2}\delta$. Por lo tanto, $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{DC}$.

Caso 2

El diámetro $\overline{AB}$ por construcción se encuentra entre los lados del ángulo α. Definamos al ángulo $\sphericalangle BAC = \gamma$ para este caso, entonces sabemos por el caso anterior que $\beta = \frac{1}{2}\widehat{BD}$ y $\gamma = \frac{1}{2}\widehat{BC}$. Ahora, por construcción se cumple que $\widehat{DC} = \widehat{BD} + \widehat{BC}$, también por construcción tenemos que $\alpha = \beta + \gamma$. Multiplicamos por $\frac{1}{2}$

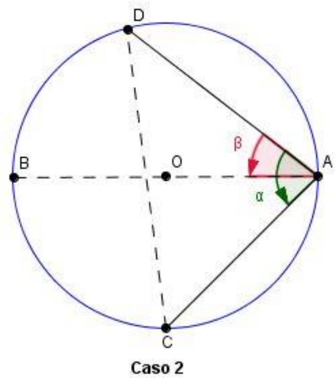

Figura 15. Caso 2

La ecuación $\widehat{DC} = \widehat{BD} + \widehat{BC}$ de donde $\frac{1}{2}\widehat{DC} = \frac{1}{2}\widehat{BD} + \frac{1}{2}\widehat{BC} = \beta + \gamma = \alpha$. Por lo tanto $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{DC}$.

Caso 3

Este caso se deja para que desarrolles la demostración en la actividad 3.

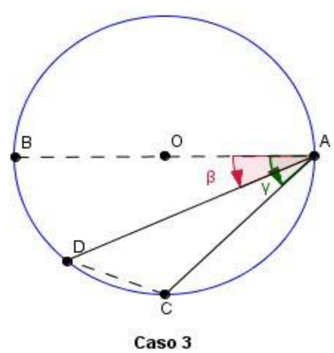

Figura 16. Caso 3

Definición 3.10 Se llama **arco** múltiple al arco que es el lugar geométrico de los vértices cuyos ángulos son inscritos en la misma circunferencia junto con el ángulo dado, tales que sus lados corten a los extremos del arco.

Teorema 3.10 La medida de un ángulo semi inscrito en una circunferencia es la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Demostración

Sean una circunferencia S y un ángulo $\sphericalangle ABC = \alpha$ semiinscrito.

Hipótesis

1. El ángulo α es semiinscrito en la circunferencia S.

Tesis

$\alpha = \frac{1}{2}\widehat{AB}$.

Desarrollo de la demostración

Dentro de la circunferencia trazamos una recta secante que sea paralela a la recta que contiene al segmento $\overline{BC}$que pase por A y corte a C en un punto E. De esta forma trazamos una semirecta $\overline{EB}$. Entonces se obtienen los ángulos $\sphericalangle AEB = \beta$, $\sphericalangle EBA = \delta$ y $\sphericalangle BAE = \varepsilon$. Sea un punto externo H a S sobre la semirecta $\overline{EB}$ tal que se forma el ángulo $\sphericalangle CBH = \gamma$. Con todo esto podemos ver que los ángulos internos del triángulo ΔABD son β, δ y ε, entonces $\beta + \delta + \varepsilon =$

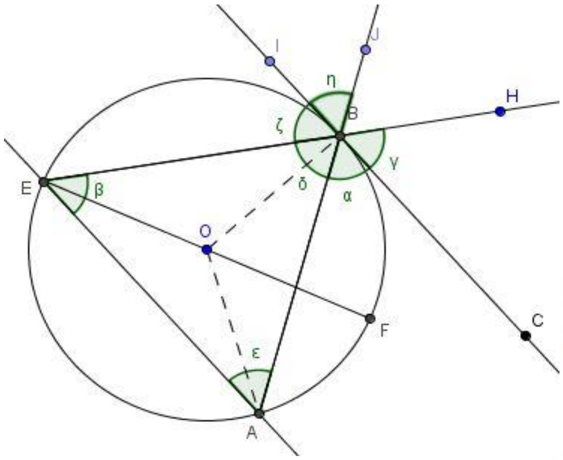

Figura 17. Ángulo semiinscrito en la circunferencia

180°. Por otro lado, por construcción tenemos que $\alpha + \gamma + \delta = 180°$. Los ángulos β y γ son congruentes, porque por construcción son ángulos correspondiente. Sea también el ángulo $\sphericalangle EBI = \zeta$, el cual es congruente con el ángulo γ dado que son opuestos y, por otro lado, los ángulos β y ζ son congruentes por ser ángulos alternos internos; los ángulos ε y α son congruentes por ser alternos internos de dos recta paralelas. Se tiene también por construcción que $\alpha + \delta + \zeta = 180°$. Por construcción, de igual forma, la recta es la bisectriz de los ángulos externos $\sphericalangle JBE$ y $\sphericalangle ABH$. Se sigue que $\sphericalangle ABH = \alpha + \gamma$ esto implica que $\alpha = \gamma$, por transitividad $\alpha = \beta$.

Ahora, por el teorema anterior caso 2, se cumple que $\beta = \frac{1}{2}\widehat{AB}$, por esto y lo anterior $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{AB}$. Queda demostrado el teorema.

Toca el turno para los ángulos externos a la circunferencia S.

Teorema 3.11 La medida de un ángulo exterior a una circunferencia es la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos de los lados del ángulo exterior.

Demostración

Sea el ángulo $\sphericalangle ACB = \alpha$ un ángulo exterior a la circunferencia S. Para el desarrollo de esta demostración, al igual que en el teorema 3.9, tendremos tres casos.

Hipótesis

1. α es un ángulo exterior a S.

Tesis

$\alpha = \frac{1}{2}\left(\widehat{BA} - \widehat{ED}\right)$, ó $\alpha = \frac{1}{2}\left(\widehat{CA} - \widehat{AD}\right)$, ó $\alpha = \frac{1}{2}\left(\widehat{CA} - \widehat{AC}\right)$; dependiendo del caso.

Advertencia. Los casos que se van a desarrollar son completamente análogos, en cuanto al resultado, la diferencia es el tipo de rectas que se tiene.

Desarrollo de la demostración

Caso 1

Por construcción el ángulo γ junto con el δ son suplementarios tales que $\gamma + \delta = 180°$. Del mismo modo los ángulos α, β y δ son ángulos internos del triángulo ΔBCE de donde $\alpha + \beta + \delta = 180°$. El ángulo γ es también externo por el vértice E, tal que $\gamma + \delta = \alpha + \beta + \delta$, de esto se sigue que $\gamma = \alpha + \beta$, luego entonces, $\alpha = \gamma - \beta$.

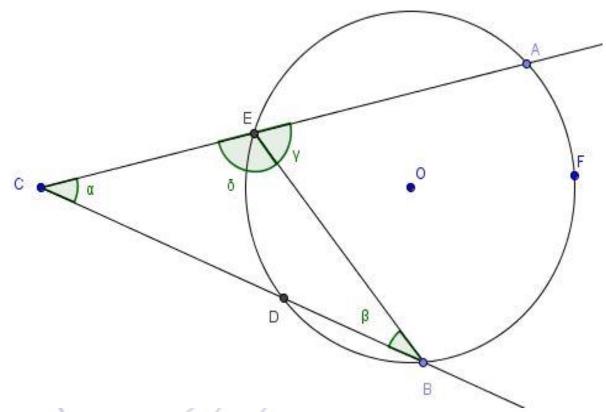

Figura 18. Caso 1

Ahora bien, por el teorema 3.9 $\beta = \frac{1}{2}\,\widehat{ED}$ y el ángulo $\gamma = \frac{1}{2}\widehat{BA}$. Por lo tanto sustituyendo valores tenemos que $\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{BA} - \widehat{ED})$.

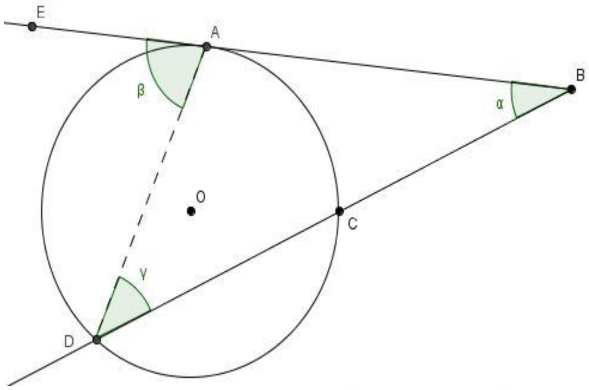

Figura 19. Caso 2

Caso 2

En este caso, tenemos un punto B el cual es externo a la circunferencia S. Por este punto pasan dos rectas, una es tangente a S y la otra es una recta secante en S.

Sea O el centro de S; sean los puntos D y C los puntos deonde se intersecan la recta secante y S. El punto A es la intersección de la recta tangente con S y sea un punto E tal que $AB \leq$, entonces $EA \leq$. Por último tenemos los ángulos $\sphericalangle ABC = \alpha$, $\sphericalangle DAE = \beta$ y $\sphericalangle ADC = \gamma$.

Por construcción hay que demostrar que $\alpha = \frac{1}{2}\left(\widehat{CA} - \widehat{AD}\right)$. Podemos observar que por construcción que el ángulo β es alterno interno respecto del ángulo γ. Por el teorema 3.9 el ángulo β es semiinscrito en S tal que $\beta = \frac{1}{2}\widehat{AD}$; de igual forma, el ángulo γ es inscrito en S tal que $\gamma = \frac{1}{2}\widehat{CA}$. Por otro lado, por construcción el ángulo β es al mismo tiempo un ángulo externo al triángulo ΔABD y los ángulos γ al igual que α son internos a ΔABD tal que no son adyacentes a β, lo que implica que $\beta = \alpha + \gamma$, despejamos γ de la ecuación y se cumple que $\alpha = \gamma - \beta$, sustituyendo los valores, se tiene $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{CA} - \frac{1}{2}\widehat{AD} = \frac{1}{2}(\widehat{CA} - \widehat{AD})$.

Caso 3

Por demostrar que $\alpha = \frac{1}{2}\left(\widehat{CA} - \widehat{AC}\right)$.

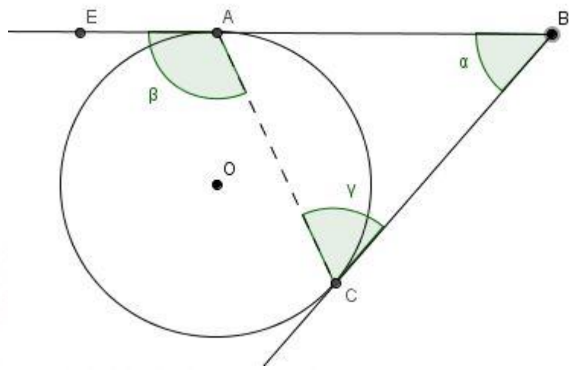

Figura 20. Caso 3

La demostración se deja para que la desarrolles en la actividad 3.

Sugerencia: Describe este caso como lo hicimos en el caso 2. Analiza con cuidado esta imagen.

Para concluir esta parte de los ángulos en la circunferencia, veamos cómo se determina la medida de un ángulo interno en la circunferencia.

Teorema 3.12 La medida de un ángulo interior a una circunferencia es la mitad de la suma de la medida de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de éstos.

Demostración

Trazamos una circunferencia S en el plano, dentro de la circunferencia tomamos un punto y lo denominamos B, trazamos dos rectas que pasen por este punto tal que una corta a S en A y E; la otra recta corta a S en los puntos C y D. De esta construcción tenemos el triángulo

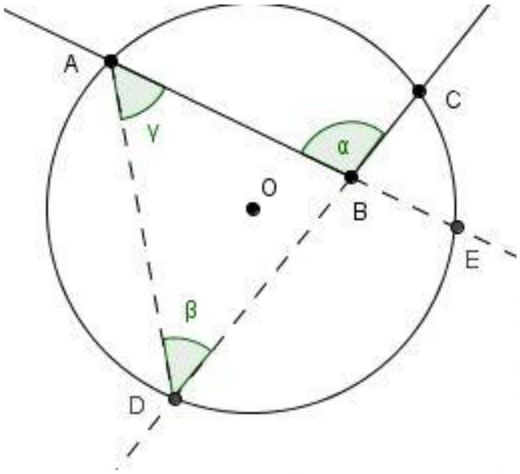

Figura 21. Ángulo interiores

ΔABD, sus ángulos internos son $\sphericalangle ADB = \beta, \sphericalangle BAD = \gamma$, también es ángulo interno a ΔABD $\sphericalangle ABD$ el cual es suplementario al ángulo externo a ΔABD $\sphericalangle ABC = \alpha$. Entonces el ángulo α por construcción es interno, por demostrar que $\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{CA} + \widehat{DE})$.

Hipótesis

1. El ángulo α es interior a S.

Tesis

$\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{CA} + \widehat{DE})$.

Desarrollo de la demostración

Por construcción el ángulo α es externo al triángulo ΔABD, tal que $\alpha = \gamma + \beta$. Por otro lado, se tiene, igualmente por construcción el ángulo β y el ángulo γ son ángulos inscritos de S, entonces $\beta = \frac{1}{2}\widehat{CA}$ y el ángulo $\gamma = \frac{1}{2}\widehat{DE}$.

Así, sustituimos valores tales que, $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{CA} + \frac{1}{2}\widehat{DE} = \frac{1}{2}(\widehat{CA} + \widehat{DE})$. Por lo tanto $\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{CA} + \widehat{DE})$. Queda así demostrado el teorema.

Una vez que hemos visto las posibilidades sobre ángulos en la circunferencia, hacia dónde nos conduce esto. Dentro de los ángulos internos se observa que se pueden definir triángulos dentro de la circunferencia; de los ángulos externos obtenemos triángulos externos a la circunferencia. Los triángulos son polígonos de tres lados; entonces, es el caso que podemos definir polígonos al interior y al exterior de la circunferencia, de esta manera damos las dos siguientes definiciones.

Definición 3.11 Se denomina a polígono inscrito a una circunferencia a todo aquel polígono cuyos vértices sean a su vez contenedores de ángulos inscritos en la circunferencia.

Definición 3.12 Todo polígono que tenga cada uno de sus lados tangentes a una circunferencia se nombrará como polígono circunscrito de una circunferencia.

Estas definiciones se retomaran en la unidad 4 cuando trabajemos con polígonos. Por el momento continuaremos en la siguiente sección con la relación que guardan las rectas y las circunferencias.

3.2.2. Rectas y la circunferencia

Teorema 3.13 Una recta tangente forma un ángulo recto con el radio que pasa por el punto de tangencia.

Demostración

Se traza una circunferencia S de radio r. Se traza una recta tangente que interseque a S en un punto B; el centro de S es un punto denominado por O. Como trazo auxiliar se prolonga el radio hasta completar el diámetro. Se tiene que demostrar que el ángulo $\sphericalangle ABO = \alpha$ es recto.

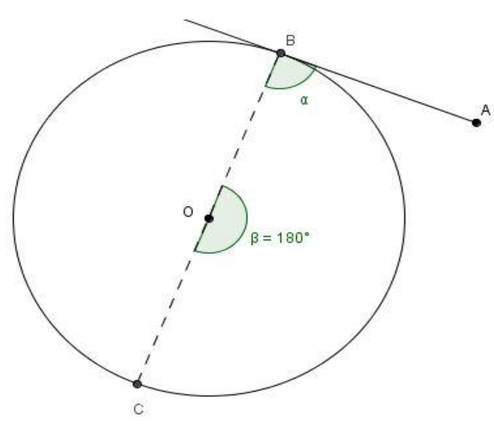

Figura 22. Recta tangente de la circunferencia

Hipótesis

1. La recta que contiene al segmento $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia S.

Tesis

El ángulo α es recto.

Desarrollo de la demostración

Por el teorema 3.10 y por construcción $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{BC}}$. Por construcción, el ángulo central $\sphericalangle BOC = 180°$ y por el postulado 3.1 $\sphericalangle BOC = \widehat{\mathrm{BC}}$.

Sustituyendo términos $\widehat{\mathrm{BC}} = 180°,$ entonces $\alpha = \frac{1}{2}(180°) = 90°$. Por lo tanto, $\alpha = 90°$. Queda demostrado el teorema.

Siguiendo con el diámetro de una circunferencia obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.14 El diámetro de una circunferencia que es perpendicular a una cuerda, biseca a la cuerda y a sus dos arcos.

Demostración

Se tiene una circunferencia S, un diámetro $\overline{AB}$ de S y una cuerda $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$.

Se hacen trazos auxiliares de segmentos de $\overline{OD}$ y $\overline{OC}$.

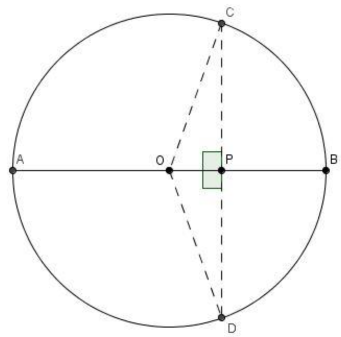

Figura 23. Diámetro de una circunferencia

Hipótesis

1. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

Tesis

I. $\overline{PC} \equiv \overline{CD}$.

II. $\widehat{BC} = \widehat{DB}$.

III. $\widehat{CA} = \widehat{AD}$.

Desarrollo de la demostración

I. Los segmentos $\overline{OD}$ y $\overline{OC}$ son congruentes porque son radios. Luego entonces el triángulo ΔCDO es isósceles; de esto se deduce que el segmento $\overline{OP}$ es la altura que va del vértice O al segmento $\overline{CD}$ y que a su vez es bisectriz de del ángulo $\sphericalangle COD$, por lo que los ángulos $\sphericalangle COP \equiv \sphericalangle DOP$. Los triángulos ΔOPD y ΔOPC son congruentes por el criterio de L-A-L. Esto implica que $\overline{PC} \equiv \overline{CD}$.

II. Por I. se cumple que $\sphericalangle COP \equiv \sphericalangle DOP$, entonces $\sphericalangle COB \equiv \sphericalangle DOB$ por construcción. Estos dos ángulos son ángulos centrales, por lo tanto por el postulado 3.1 se deduce que $\sphericalangle COB = \widehat{BC}$ y $\sphericalangle DOB = \widehat{DB}$. Por lo tanto $\widehat{BC} = \widehat{DB}$.

III. Se deja esta parte de la tesis para que desarrolles la demostración en la actividad 4.

Proposición 3.1 El diámetro de una circunferencia siempre tendrá un ángulo inscrito cuya medida sea de 90°.

Demostración

Sean una circunferencia S con un diámetro definido por $\overline{AB}$ y un ángulo inscrito $\sphericalangle ACB$.

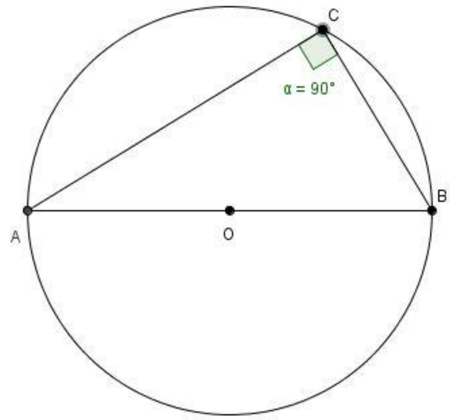

Figura 24. Ángulo inscrito en una circunferencia

Hipótesis

1. $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia S.

2. El ángulo $\sphericalangle ACB$ es inscrito en S.

Tesis

El ángulo $\sphericalangle ACB$ es recto.

Desarrollo de la demostración

Por el teorema 3.9 $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\widehat{BA}$; además, el arco $\widehat{BA} = \sphericalangle BOA$; el ángulo $\sphericalangle BOA = 180°$, entonces, $\widehat{BA} = 180°$, de esta forma sustituyendo términos tales que $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}(180°) = 90°$. Por lo tanto $\sphericalangle ACB = 90°$. Queda demostrada la proposición.

Teorema 3.15 Dos ángulos inscritos en una circunferencia con una misma cuerda son congruentes.

Demostración

Sean una circunferencia S, dos ángulos $\sphericalangle ACB = \alpha$ y $\sphericalangle ADC = \beta$ inscritos en S tales que sus lados cortan a S en A y B.

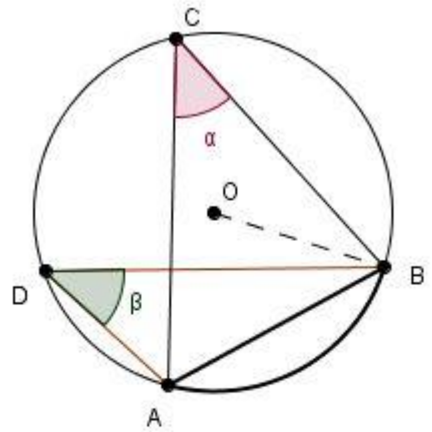

Figura 25. Dos Ángulos inscritos en una circunferencia

Hipótesis

1. Los ángulos α y β son inscritos en S.

2. El Arco $\widehat{AB}$ en S es un arco múltiple.

Tesis

Los ángulos α y β son congruentes.

Desarrollo de la demostración

Por hipótesis y por el teorema 3.8 se cumple que $\alpha = \frac{1}{2}\,\widehat{AB}$ y $\beta = \frac{1}{2}\,\widehat{AB}$, luego entonces $\alpha \equiv \beta$.

Queda demostrado el teorema.

Teorema 3.16 Dos cuerdas congruentes en una circunferencia tienen arcos con medidas equivalentes.

Demostración

Sean una circunferencia S y dos cuerdas definidas por los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$.

Trazos auxiliares. Se trazan los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.

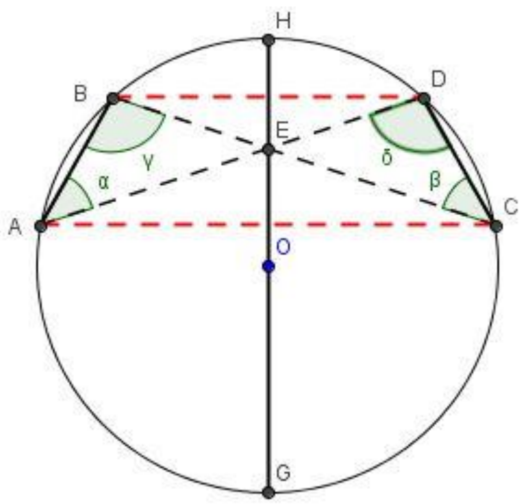

Figura 26. Cuerdas congruentes en una circunferencia

Hipótesis

1. Los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas congruentes en S.

Tesis

Los arcos $\widehat{BA}$ y $\widehat{CD}$ son congruentes.

Desarrollo de la demostración

Al hacer los trazos auxiliares, se forman los triángulos ΔABE y ΔCDE cuyos ángulos α, γ y β, δ respectivamente son internos. Por construcción y por el teorema anterior, los ángulos $\alpha \equiv \beta$ y $\gamma \equiv \delta$ y por hipótesis $\overline{BA} \equiv \overline{CD}$. Entonces por el criterio de A-L-A los triángulos ΔABE y ΔCDE son congruentes. Esto implica que los ángulos $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle CED$ de esto se deduce que los segmentos $\overline{BE} \equiv \overline{ED}$ y $\overline{AE} \equiv \overline{EC}$. Esto es que $\overline{AE} + \overline{ED} \equiv \overline{BE} + \overline{EC}$ tal que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ y como $\overline{BA} \equiv \overline{CD}$, además $\overline{AC} \equiv \overline{AC}$, los triángulos ΔABC y ΔACD son congruentes por el criterio de L-L-L. Luego entonces los ángulos $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCA$ y por el teorema 3.8 se tiene que $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}\ \widehat{DC}$ y $\sphericalangle BCA = \frac{1}{2}\ \widehat{BA}$, de esta forma $\frac{1}{2}\ \widehat{DC} = \frac{1}{2}\ \widehat{BA}$. Por lo tanto se concluye que $\widehat{DC} = \widehat{BA}$. Queda demostrado el teorema.

Los dos siguientes teoremas se dejan para que desarrolles las demostraciones en las siguientes evaluaciones.

Teorema 3.17 La mediatriz de toda cuerda a una circunferencia, interseca al centro de la circunferencia.

Teorema 3.18 En toda circunferencia las cuerdas que son congruentes entre sí, equidistan del centro de la circunferencia.

Cierre de la unidad

Has concluido la tercera unidad de la asignatura. A lo largo de ésta se abordaron las definiciones de funciones trigonométricas en relación con el triángulo rectángulo dentro del plano coordenado; también demostramos una serie de identidades trigonométricas y demostraste otras tú, con el objeto de que entiendas el proceso de demostración de una identidad y las puedas aplicar en la siguiente unidad y en asignaturas como Cálculo diferencial e integral.

Se trabajó también con las propiedades angulares y de la recta asociadas a la circunferencia, se demostraron varios teoremas que permiten darte cuenta que se hace un uso recurrente de las propiedades y teoremas estudiados en las unidades anteriores. Toma en cuenta que lo que has estudiado aquí será usado en las demostraciones de la siguiente unidad, por ello es necesario que si tienes alguna duda la resuelvas con el apoyo de tu docente para que no tengas problemas en comprender el desarrollo de las demostraciones.

Nos queda poco camino por andar, pero ya estamos en la antesala de lo que comprenderá un uso más constante e implícito de las propiedades y teoremas estudiados, con lo cual veremos cómo se pueden dar nuevas propiedades y teoremas que nos permitirán comprender aún más de lo que estudiamos en geometría.

Las demostraciones que has visto hasta esta unidad son tan sólo unas cuantas de muchas que abordarás a lo largo de tu carrera dentro de las matemáticas. Es aconsejable que revises nuevamente la unidad en caso de tener dudas, de no ser éste tu caso, has concluido la unidad, por lo que puedes ingresar a la Unidad 4. Proporciones, semejanza, áreas y volúmenes, en la que se revisarán cuestiones relacionadas con polígonos semejantes, sus áreas y cómo medirlas; asimismo, abordarás por primera vez figuras geométricas en el espacio euclidiano, sus volúmenes y cómo calcularlos, lo que te servirá para comprender el proceso de deducción sobre el uso de estas propiedades dentro de la geometría, con lo cual al finalizar esta unidad podrás valorar tu habilidad de abordar los temas de esta asignatura y otras con las cuales ésta se relaciona, como el cálculo diferencial, el álgebra y la geometría analítica.

Recuerda recurrir a tu docente para resolver tus dudas, no dejes de preguntar, esto es parte de tu aprendizaje.

Recursos didácticos

Aquí podrás encontrar enlaces a páginas en internet cuyo contenido trata sobre geometría de forma muy visual y te dan una idea más clara de lo que es la geometría.

Todos estos recursos en línea tienen como principal objetivo apoyarte para que comprendas los temas de las matemáticas, algunas en un nivel muy básico, otras lo hacen con mayor detalle, pero lo importante es darte las herramientas necesarias para que puedas comprender los fundamentos de las matemáticas.

En esta liga podrás poner en práctica, mediante ejercicios interactivos y ejemplos, los temas que has estudiado en esta unidad.

- Banfill, J. (2006). Geometría – Lecciones. AAA Math. http://www.aaamatematicas.com/geo.htm

En esta liga encontrarás los postulados y propiedades de la geometría con un ejemplo ilustrativo.

- Disfruta las matemáticas (2020). Geometría. Las matemáticas son divertidas. http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/

Este es un recurso aún en construcción, pero que de momento te proporciona los conceptos básicos como medio de consulta.

- S.a. (S.f). Definiciones, términos de geometría. Salón hogar. http://www.salonhogar.com/matemat/geometria/

En esta liga encontrarás recursos interactivos que te invitan a construir con figuras geométricas, formas y estructuras divertidas que ponen a prueba tus conocimientos de geometría.

- Utah State University (2023). Geometría (Grados 9 -12). Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales. http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_3.html

Aquí puedes revisar los postulados, definiciones y teoremas de la geometría.

- S.a. (S.f.). Geometría. Superprof Material didáctico. http://www.vitutor.com/geometria.html

Este es un recurso divertido que pone a prueba tus conocimientos sobre las propiedades de los cuerpos geométricos relacionando definiciones con las formas geométricas.

- FAUD (2020). Cuerpos geométricos, Geometría. Curso de ingreso 2020- FAUD. https://www.uco.es/~ma1fegan/Comunes/recursos-matematicos/DESARROLLO-DE-CUERPOS-GEOMETRICOS.pdf

Este recurso está constituido en forma de lecciones, adecuado para revisar con más detenimiento tus conocimientos de geometría.

- Aula fácil (2024). Cursos gratis de Geometría. Aula fácil, cursos online gratuitos. http://aulafacil.com/matematicas-basicas/geometria/curso/Temario.htm

Fuentes de consulta

Básica

- Coxeter, H. S. M. (1971). *Fundamentos de geometría*. Limusa.
- Euclides. (1956). *Euclid's Elements*. Dover.
- Geltner, P. B. y Peterson, D. J. (1998). *Geometría*. Thomson Editores.
- Golovina, L. I. y Yaglom, I. M. (1976). *Inducción en la geometría*. Mir.
- Pogorelov, A. V. (1974). *Geometría elemental*. Mir.
- Redon Gómez, A. (2000). *Geometría paso a paso*. Tébar.
- Shively, L. S. (1984). *Introducción a la geometría moderna*. Continental.

Complementaria

- Dubnov, Y. S. (1993). *Errores en las demostraciones geométricas*. Mir.
- Fetisov, A. I. (1980). *Acerca de la demostración en geometría*. Mir.
- Kostovski, A. N. (1984). *Construcciones geométricas mediante compás*. Mir.
- Smogorzhevski, A. S. (1988). *La regla en construcciones geométricas*. Mir.