Matemáticas

Geometría

Segundo semestre

Unidad 4. Proporciones, semejanza, áreas y volúmenes

Clave

05141208/06141208

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Presentación **4**

Competencia especifica **5**

Logros **5**

4.1. Proporciones y semejanza **6**

4.1.1. Proporciones **6**

4.1.2. Semejanzas **21**

4.2. Polígonos y circunferencia **31**

4.2.1. Polígonos y circunferencia **31**

4.2.2. Construcción de polígonos en la circunferencia **36**

4.3. Áreas y volúmenes **41**

4.3.1. Áreas de polígonos **41**

4.3.2. Volúmenes de sólidos **50**

Cierre de la unidad **52**

Recursos didácticos **53**

Fuentes de consulta **55**

.... **55**

Figura 3. Segmento de recta 12
Figura 4. Rectas paralelas equidistantes 13
Figura 5. Rectas paralelas con dos rectas transversales 15
Figura 6. Rectas paralelas equidistantes 17
Figura 7. Triángulos con segmentos inconmensurables 18
Figura 8. Bisectriz de un triángulo 19
Figura 9. Polígonos semejantes 21
Figura 10. Triángulos semejantes 22
Figura 11. Trazos auxiliares 23
Figura 12. Segmentos auxiliares 24

Figura 13. ángulos correspondientes congruentes 25
Figura 14. Dos triángulos con lados proporcionales 26
Figura 15. Triángulo semejante 27
Figura 16. Polígonos semejantes 28
Figura 17. Triángulos semejantes en polígonos semejantes 29
Figura 18. Polígono regular 32
Figura 19.bisectrices de los ángulos del polígono regular 33
Figura 20. Polígono regular 34
Figura 21. Apotema de un polígono 35
Figura 22. Apotema de un polígono 37
Figura 23. apotema de un hexagono 39
Figura 24. Rectángulos con áreas proporcionales 42
Figura 25. Áreas de rectángulos proporcionales 44
Figura 26. Representación Teorema 4.1.9 45
Figura 27. Área de un paralelogramo 46
Figura 28. Demostración teorema 4.21 47
Figura 29. Gráfica teorema de pitágoras 48

Presentación

Estás por iniciar la última etapa de la unidad didáctica. En esta unidad darás cuenta de forma detallada a las semejanzas y la relación que guardan con las proporciones dentro de la geometría. Esto nos dará la posibilidad de abordar los temas de semejanza de triángulos y polígonos para posteriormente inducir estos temas en la parte de áreas de polígonos.

Las demostraciones de los teoremas se describen haciendo uso de una construcción y apoyándonos de las definiciones y teoremas que antecedan al teorema en turno.

Por favor revisa cada una de las demostraciones con detalle y trata de rehacerlas sin verlas, en caso de que algún paso se te dificulte, pídele ayuda a tu Facilitador(a).

En esta unidad, las proporciones asientan las bases para la proporcionalidad geométrica. Este tipo de proporción nos permite analizar otros aspectos de la geometría que se enlazan con el cálculo cuantitativo de los objetos geométricos; es en esta parte que comenzamos a descubrir las relaciones que se van deduciendo una tras otra, hasta tocar el tema de semejanza de polígonos, los cuales se definen a partir de la semejanza entre triángulos. Así podemos dar paso a temas como áreas y volúmenes de figuras geométricas.

Competencia especifica

Utilizar las definiciones de proporción y semejanza para resolver problemas de medida de área y volumen mediante el uso de los teoremas y propiedades del polígono y la circunferencia.

Logros

- Discute la similitud y diferencias entre proporción y semejanza.
- Identifica las propiedades y teoremas de proporción y semejanza.
- Identifica y emplea las propiedades y teoremas de Polígonos y circunferencia
- Emplea las propiedades de proporción, semejanza y polígonos en la circunferencia para encontrar áreas y volúmenes.

4.1. Proporciones y semejanza

Cuando se hace mención de que un objeto es proporcional a otro, por lo general, lo hacemos en referencia a que guardan una relación en función de sus medidas. Por ejemplo, tomemos un limón y una naranja; si el limón es más pequeño que la naranja, ¿a cuánto podría corresponderse esta diferencia? Pues dependiendo de la medida del limón y de la naranja es que sus medidas se corresponderán. Si el limón es una tercera parte de tamaño de la naranja, entonces el tamaño del limón es proporcional al tamaño de la naranja en una tercera parte. Sin embargo, este aspecto de la proporcionalidad en matemáticas se describe de otro modo, el cual a continuación se revisará.

4.1.1. Proporciones

Definición 4.1 Proporción es el nombre que recibe la expresión algebraica determinada por la equivalencia entre dos razones; es decir, sea a, b, c y d en $\mathbb{R}$, tales que si b y d son distintos de cero, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Los **términos** de una proporción se definen como **antecedentes** al primero y al tercero, esto es, la a y la c son los antecedentes; los **consecuentes** serán la b y la d. Los términos **extremos** serán la a y la d y los **intermedios** la b y la c.

Se deben de tener presentes las siguientes características de una proporción:

Definición 4.2 Se denomina **cuarta proporcional** a la equivalencia entre razones que define al término que es consecuente y extremo a la vez como un término variable x; es decir, la cuarta proporcional es tal que sean a, b, c en $\mathbb{R}$ y sea x tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Definición 4.3 Se llama **media proporcional** o **proporción continua** a la equivalencia entre razones tales que sus términos intermedios sean iguales. Esto es, sean a, b, c términos de una proporción de donde:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}.$$

Hay otra característica en la que se combinan las dos definiciones anteriores. Si tenemos una cuarta proporcional y a su vez se tiene que los términos intermedios nos determinan una media proporcional, entonces tenemos lo que definiremos como **tercera proporcional**. Esto es sean a,b y x en $\mathbb{R}$, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}.$$

Veamos qué podemos deducir de estas definiciones.

Como habrás notado, estas razones se pueden despejar de tal forma que podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.1 En cualquier proporción el producto de los términos extremos es equivalente al producto de los términos intermedios.

Demostración.
Nota: A partir de este momento, se harán las demostraciones sin identificar las hipótesis y las tesis del teorema, ya que se pretende que aprendas a identificarlas sin la necesidad de hacer la diferencia. Esto se hace porque, en general, en la actualidad dentro de las demostraciones en un artículo de investigación no se hacen tan específicos los lineamientos que se siguieron en

una demostración, esto no implica que se pierda el rigor en la demostración, simplemente que hay pasos que resultan claros para la demostración y no se anotan, pero es la labor del matemático profesional identificar esos pasos intermedios que se omiten para poder entender una demostración.

Por hipótesis, tenemos a la razón de la proporción; esto es, sean a, b, c y d en $\mathbb{R}$, tales que si b y d son distintos de cero, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

multiplicamos el producto bd en ambos lados de la equivalencia, entonces:

$$bd\left(\frac{a}{b}\right) = bd\left(\frac{c}{d}\right);$$

tal que aplicando conmutatividad y asociatividad del producto se tiene:

$$ad\left(\frac{b}{b}\right) = cb\left(\frac{d}{d}\right);$$

por las propiedades de inverso y neutro multiplicativo se cumple que:

$$ad = cb.$$

Queda demostrado el teorema.

Teorema 4.2 En una proporción se pueden intercambiar los términos intermedios entre sí.

Demostración.

Por hipótesis se cumple que a, b, c y d en $\mathbb{R}$, tales que si a, b, c y d son distintos de cero, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Por el teorema anterior tenemos:

$$ad = cb;$$

Entonces dividimos por cd ambos lados de la equivalencia, de donde:

$$\left(\frac{1}{cd}\right)(ad) = \left(\frac{1}{cd}\right)(cb),$$

Por las propiedades de asociatividad, inverso y neutro multiplicativo se deduce:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Queda demostrado el teorema.

Observa estas demostraciones con cuidado, date cuenta que estamos usando propiedades de los reales para hacer estas demostraciones, las cuales puedes revisar en cualquier texto de álgebra o de cálculo. Si no comprendes cómo se procede con el uso de estas propiedades, es recomendable que trates de hacer por ti mismo(a) las demostraciones; esto te dará una mayor habilidad para comprender los procesos que no están escritos y que como matemático(a) profesional deberás afrontar en tu vida diaria una vez que concluyas tu licenciatura. Si aun así tienes dudas, pídele a tu Facilitador(a) que te dé una explicación del proceso que sigue la demostración, con el fin de ayudarte a entender las demostraciones.

Teorema 4.3 En cualquier proporción se pueden invertir las razones que están en la equivalencia.

Demostración.

Por hipótesis se cumple que a, b, c y d están en $\mathbb{R}$, y son tales que si a, b, c y d son distintos de cero, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

Por el teorema 4.1 se implica:

$$ad = cb;$$

si dividimos ac en ambos lados de la equivalencia, entonces se sigue:

$$\left(\frac{1}{ac}\right)(ad) = \left(\frac{1}{ac}\right)(bc),$$

Nuevamente, aplicamos las propiedades de asociación, inversión y neutro multiplicativo para los números reales de tal forma que se implica:

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Queda demostrado el teorema.

Teorema 4.4 En cualquier proporción se pueden añadir sus antecedentes a los consecuentes respectivos.

Demostración.

Por hipótesis se cumple que a, b, c y d en $\mathbb{R}$, son tales que si a, b, c y d son distintos de cero, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

por demostrar:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

De la razón dada de la definición 4.1 sumamos en ambos lados de la equivalencia un 1, de donde:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

Luego, por propiedades del neutro multiplicativo la unidad se puede representar por $\frac{b}{b}$ y $\frac{d}{d}$, respectivamente para cada lado de la equivalencia, entonces:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d},$$

sumamos los cocientes, de tal manera se sigue:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

Queda entonces demostrado el teorema.

Hasta aquí hemos dado un breve repaso de lo que son las propiedades de las proporciones, las cuales en subsecuente usaremos con regularidad. En la actividad 2 encontrarás otras propiedades para que desarrolles las demostraciones. Pasemos a ver cómo se relaciona este concepto de proporción, con la proporción geométrica.

Antes de abordar lo que es una proporción en geometría, debemos especificar cómo debemos interpretar una razón, primero entre segmentos, y posteriormente entre polígonos.

Si tenemos dos segmentos de recta, los cuales podemos dividir en un determinado número de segmentos menores con la misma longitud, entonces supongamos dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ donde sean n, n', m y k números enteros positivos tales que $m(\overline{AB}) = n$ y $m(\overline{A'B'}) = k \cdot n'$, de esto se sigue que $m(\overline{AB}) \leq m(\overline{A'B'})$. Cada segmento de la división de $\overline{AB}$ mide $\frac{1}{n}$ y de $\overline{A'B'}$ cada segmento tiene una longitud de $\frac{1}{k \cdot n'}$.

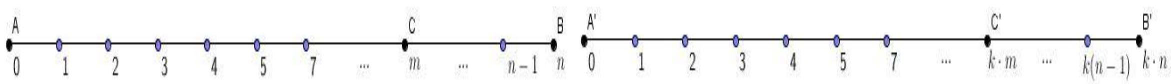


Figura 1. Segmento de recta

Así, la razón entre dos segmentos se determina por la medida de sus longitudes.

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{A'B'})} = \frac{n}{k \cdot n'}.$$

Definición 4.4 Sean dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ de longitudes n y $k \cdot n'$ respectivamente. La razón de los segmentos se denotará por:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{A'B'})} = \frac{n}{k \cdot n'}.$$

La razón de los segmentos es independiente de la unidad de medida que se usó para dividir a cada uno. También se debe observar que cada valor de la razón puede ser un número racional o irracional. Si es racional, entonces se dice que la razón es **conmensurable**; si el cociente es un valor irracional, entonces podemos afirmar que la razón es **inconmensurable**.

Definición 4.5 Sean cuatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ y $\overline{C'D'}$. Sus medidas son $m(\overline{AB})$, $m(\overline{A'B'})$, $m(\overline{CD})$ y $m(\overline{C'D'})$; de donde los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son **proporcionales** a los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ si se da la siguiente relación:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{A'B'})} = \frac{m(\overline{CD})}{m(\overline{C'D'})}.$$

Ahora, esto se relaciona con la geometría en el plano de la siguiente forma. Tomemos dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no necesariamente paralelos ni perpendiculares, tales que se pueden dividir ambos segmentos por segmentos de rectas correspondientes y proporcionales entre sí. Veamos la siguiente construcción:

Construcción 4.1 Sean dos segmentos de rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, y un conjunto de recta paralelas equidistantes entre ellas. Los segmentos cortan a las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de forma transversal. El segmento $\overline{AB}$ es dividido en segmentos de longitudes equivalentes y de forma análoga para el segmento $\overline{CD}$. Se trazan segmentos auxiliares paralelos al segmento $\overline{CD}$ que van de cada punto de intersección entre el segmento $\overline{AB}$ y el conjunto de rectas paralelas como se muestra en la imagen.

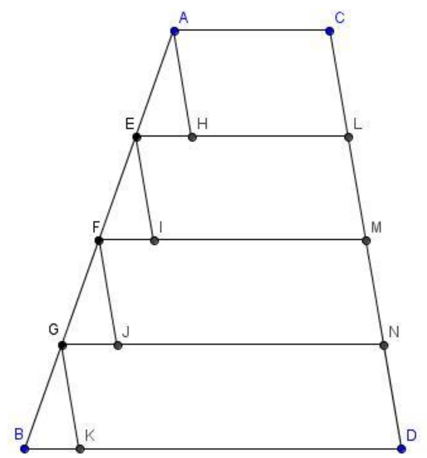


Figura 2. Rectas paralelas equidistantes

Teorema 4.5 Sean dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tales que se cortan en un punto. Sea un conjunto de rectas paralelas, equidistantes entre sí; los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cortan a las rectas paralelas transversalmente, tales que la recta $\overline{AB}$ es dividida en segmentos con longitudes equivalentes, entonces el segmento $\overline{CD}$ es dividido en segmentos equivalentes.

Demostración. Por la construcción 4.1 y por hipótesis $\overline{AC}, \overline{EL}, \overline{FM}, GN$ y $\overline{BD}$, son segmentos paralelos. También por hipótesis $m(\overline{AE}) = m(\overline{EF}) = m(\overline{FG}) = m(\overline{GB})$; por demostrar que $m(\overline{CL}) = m(\overline{LM}) = m(\overline{MN}) = m(\overline{DN})$.

Por construcción y por ángulos correspondientes, los ángulos $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle FEL \equiv \sphericalangle GFM \equiv \sphericalangle BGN$, esto implica que $m(\sphericalangle EAC) = m(\sphericalangle FEL) = m(\sphericalangle GFM) = m(\sphericalangle BGN)$. De esto se sigue dado el trazo auxiliar que es el segmento $\overline{AH}$, por construcción tenemos $m(\sphericalangle EAC) = m(\sphericalangle EAH) + m(\sphericalangle HAC)$, se tiene $m(\sphericalangle EAH) = m(\sphericalangle EAC) - m(\sphericalangle HAC)$. Y de forma análoga $m(\sphericalangle FEI) = m(\sphericalangle FEL) - m(\sphericalangle IEL)$, $m(\sphericalangle GFJ) = m(\sphericalangle GFM) - m(\sphericalangle JFM)$ y $m(\sphericalangle BGK) = m(\sphericalangle BGN) - m(\sphericalangle KGN)$.

Ahora, por construcción los segmentos $\overline{AH}, \overline{EI}, \overline{FJ}, \overline{GK}$ son paralelos, tales que, los ángulos $\sphericalangle HAC \equiv \sphericalangle IEL \equiv \sphericalangle JFM \equiv \sphericalangle KGN$ por construcción y por la propiedad de ángulos correspondientes, esto implica que $m(\sphericalangle HAC) = m(\sphericalangle IEL) = m(\sphericalangle JFM) = m(\sphericalangle KGN)$; de esto se deduce que $m(\sphericalangle EAC) - m(\sphericalangle HAC) = m(\sphericalangle FEL) - m(\sphericalangle IEL) = m(\sphericalangle GFM) - m(\sphericalangle JFM) = m(\sphericalangle BGN) - m(\sphericalangle KGN)$, luego entonces $m(\sphericalangle EAH) = m(\sphericalangle FEI) = m(\sphericalangle GFJ) = m(\sphericalangle BGK)$.
Por la construcción 4.1 y por la propiedad de ángulos correspondientes, se sigue que los ángulos $\sphericalangle LEA \equiv \sphericalangle MFE \equiv \sphericalangle NGF \equiv \sphericalangle DBG$. Por hipótesis segmentos $\overline{AE} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{FG} \equiv \overline{GB}$.

Con esto, por el criterio de congruencia de triángulos A-L-A los triángulos $\Delta EAH \equiv \Delta FEI \equiv \Delta GFJ \equiv \Delta BGK$, esto implica que los segmentos $\overline{AH} \equiv \overline{EI} \equiv \overline{FJ} \equiv \overline{GK}$.
Por último, por construcción los segmentos $\overline{AH} \equiv \overline{CL}, \overline{EI} \equiv \overline{LM}$, $\overline{FJ} \equiv \overline{MN}$ y $\overline{GK} \equiv \overline{ND}$; de esto podemos concluir que los segmentos $\overline{CL}$, $\overline{LM}$, $\overline{MN}$ y $\overline{ND}$ son congruentes, esto implica que sus longitudes son equivalentes. Queda demostrado el teorema.

De este teorema podemos pasar a ver la relación que existe entre rectas transversales y recta paralelas junto con la propiedad de proporción en geometría. El siguiente teorema se conoce como el teorema de Tales[1].

Teorema 4.6 Si un conjunto de rectas paralelas corta a dos rectas transversales, entonces dividen a ambas rectas en partes proporcionales.

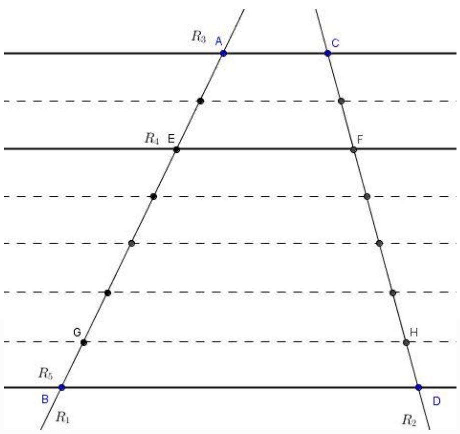


Figura 3. Rectas paralelas con dos rectas transversales

Construcción 4.2 Sean las rectas R_1 y R_2 transversales. Se toman a las rectas R_3, R_4 y R_5 paralelas entre sí de un conjunto de rectas paralelas equidistantes entre sí, tales que intersecan a las rectas R_1 y R_2. De esta intersección en R_1 se determinan los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$; en la recta R_2 se tienen los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{FD}$. De R_3, R_4 y R_5 se derivan los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{EF}$ y $\overline{BD}$ respectivamente.

Por construcción tenemos $\overline{AC} \| \overline{EF}$, $\overline{AC} \| \overline{BD}$ y $\overline{BD} \| \overline{EF}$.

Demostración del teorema. Para la demostración de este teorema nos apoyaremos en la construcción 4.2 dado que cumple las condiciones del teorema 4.6.

[1] Tales de Mileto es considerado uno de principales iniciadores de la formalización de la geometría, pero no se cuentan con escritos propios de Tales que hayan llegado hasta nuestros días para confirmar este supuesto, esta afirmación se da a partir de referencias que se han hecho por parte de otros filósofos griegos posteriores a él.

Por la construcción 4.2 y por las hipótesis del teorema 4.6, se tiene $\overline{AC} \| \overline{EF}$, $\overline{AC} \| \overline{BD}$ y $\overline{BD} \| \overline{EF}$. Por demostrar que:

$$\frac{m(\overline{AE})}{m(\overline{EB})} = \frac{m(\overline{CF})}{m(\overline{FD})}.$$

De la construcción 4.1 tomamos la $m(\overline{GB}) = a$ y $m(\overline{HD}) = b$ como las medidas de los segmentos formados por las intersecciones entre las rectas trasnversalesR_1 y R_2 y el conjunto de rectas paralelas.

De lo anterior, podemos deducir que n segmentos que dividen a los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$, análogamente los segmentos $\overline{EB}$ y $\overline{FD}$ tienen m segmentos que los dividen; de esta forma $m(AE) = a \cdot n$ y $m(CF) = b \cdot n$, de igual manera $m(EB) = a \cdot m$ y $m(FD) = b \cdot m$. Si $m(CF) >$ 0 y $m(FD) > 0$, entonces:

$$\frac{m(\overline{AE})}{m(\overline{EB})} = \frac{a \cdot n}{a \cdot m} = \frac{n}{m};$$

Se sigue de la misma manera para:

$$\frac{m(\overline{CF})}{m(\overline{FD})} = \frac{b \cdot n}{b \cdot m} = \frac{n}{m};$$

Por lo tanto sustituyendo las equivalencias se deduce que:

$$\frac{m(\overline{AE})}{m(\overline{EB})} = \frac{m(\overline{CF})}{m(\overline{FD})}.$$

Queda así demostrado el teorema.

Esto nos permite avanzar y ver qué relación podemos deducir de esto respecto a un triángulo.

Teorema 4.7 Cualquier paralela a alguno de los lados de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales.

Construcción 4.3 De forma análoga a la construcción 4.2 tenemos las rectas R_1 y R_2 transversales. Se toman a las rectas R_3, R_4 y R_5 paralelas entre sí de un conjunto de rectas paralelas equidistantes entre sí, tales que intersecan a las rectas R_1 y R_2. La diferencia es que $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{A\}$. Esto crea un triángulo ΔABD.

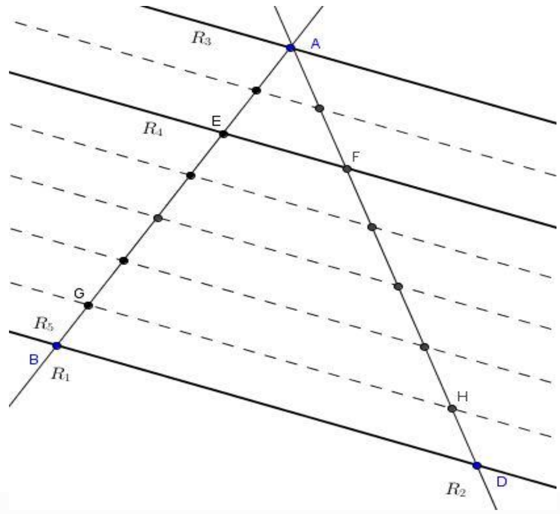


Figura 4. Rectas paralelas equidistantes

Demostración del teorema. La demostración de este teorema abarca dos casos, el primero cuando la división de los lados es conmensurable y el segundo caso cuando la división de los lados es inconmensurable.

Demostración del caso 1[2]. Dada la construcción 4.3 y por las hipótesis del teorema. Si la división de los dos lados del triángulo por una recta paralela al tercero, por el teorema de Tales se concluye que:

[2] **Nota para el estudiante**. Si hiciéramos la demostración particular para este caso, observarás que es completamente análoga a la demostración del teorema de Tales. Revisa con detalle esa demostración y haz las analogías necesarias para corroborar lo que se afirma aquí. No siempre vas a poder justificar de esta forma una demostración, en este caso lo hacemos porque tenemos la demostración del teorema de Tales que nos apoya en la demostración.

Cuando tú justifiques una demostración enunciado un teorema, debes describir por qué usas el teorema para realizar tu demostración. Observa que además tenemos una construcción geométrica que cumple con las hipótesis del teorema, no estamos solo enunciado un teorema.

$$\frac{m(\overline{AE})}{m(\overline{EB})} = \frac{m(\overline{AF})}{m(\overline{FD})}.$$

Demostración del caso 2.

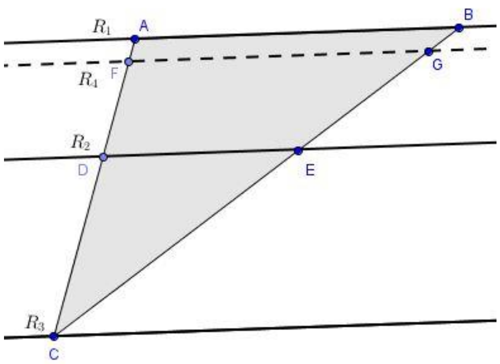


Figura 5. Triángulos con segmentos inconmensurables

Construcción 4.4 Sea el triángulo ΔABC. La recta R_2, paralela al lado $\overline{AB}$ del triángulo, divide a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en segmentos inconmensurables. Trazamos una recta R_4 paralela al lado $\overline{AB}$ tal que las razones $\frac{m(\overline{FD})}{m(\overline{DC})}$ y $\frac{m(\overline{GE})}{m(\overline{EC})}$ son valores racionales. Y se tiene un triangulo ΔFGC.

Por esta construcción y por el caso anterior del triángulo ΔFGC se tiene:

$$\frac{m(\overline{FD})}{m(\overline{DC})} = \frac{m(\overline{GE})}{m(\overline{EC})}.$$

Como se puede observar, la medida de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{BG}$ son valores irracionales. Podemos dividir de forma análoga a la anterior al triángulo ΔABC, tal que las medidas de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{BG}$ sean menores a las medidas anteriores y de igual forma concluiremos que:

$$\frac{m(\overline{FD})}{m(\overline{DC})} = \frac{m(\overline{GE})}{m(\overline{EC})}.$$

Este proceso lo podemos repetir de forma indefinida tal que los límites de las medidas de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{BG}$ se aproximan a 0 cuando los segmentos $\overline{DF}$ y $\overline{EG}$ se aproximan a AD y BE respectivamente, entonces $\lim_{m(\overline{AF})\to 0} m(\overline{FD}) = m(\overline{AD})$ y $\lim_{m(\overline{BG})\to 0} m(\overline{GE}) = m(\overline{BE})$. Por lo que:

$$\frac{\lim\limits_{m(\overline{AF})\to 0} m(\overline{FD})}{m(\overline{DC})} = \frac{\lim\limits_{m(\overline{BG})\to 0} m(\overline{GE})}{m(\overline{EC})};$$

Se sustituyen valores, entonces:

$$\frac{m(\overline{AD})}{m(\overline{DC})} = \frac{m(\overline{BE})}{m(\overline{EC})}.$$

Queda demostrado el teorema.

Continuando con la relación entre proporción y triángulos se define el siguiente teorema.

Teorema 4.8 La bisectriz del ángulo de un triángulo divide a su lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros lados del triángulo.

Construcción 4.5 Sea el triangulo ΔABC. La bisectriz al ángulo $\sphericalangle ACB$ corta al segmento $\overline{AB}$ en el punto E. Trazamos una recta que corte al vértice A del triángulo y que sea paralela a la bisectriz dada. Prolongamos el segmento $\overline{BC}$ a partir de C con una semirecta que va a cortar a la recta paralela a la bisectriz en el punto D.

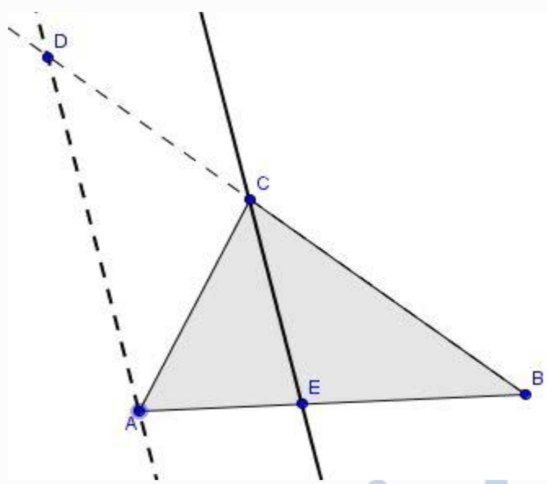


Figura 6. Bisectriz de un triángulo

Demostración.

Los ángulos $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle ECB$ debido a que el segmento CE está en la bisectriz del ángulo ACB. Como el segmento AD es paralelo a CE el ángulo $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACE$ por ser alternos internos; los ángulos $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ECB$ por ser ángulos correspondientes. Ahora, como $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle ECB$, sustituyendo valores tenemos $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ADC$. Estos dos ángulos nos indican que el triángulo ΔACD es isósceles. Lo que implica que los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ son congruentes. Lo que se desea demostrar es:

$$\frac{m(\overline{AE})}{m(\overline{EB})} = \frac{m(\overline{CD})}{m(\overline{BC})};$$

Por el teorema 4.7 y por la construcción 4.5 para el triángulo ΔABD el segmento $\overline{BC}$, que es la bisectriz del ángulo $\sphericalangle ACB$, divide a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$ en partes proporcionales, entonces:

$$\frac{m(\overline{AE})}{m(\overline{EB})} = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{BC})},$$

pero acabamos de mostrar que $\overline{AC} \equiv \overline{CD}$, esto implica que $m(\overline{CD}) = m(\overline{AC})$, sustituimos valores de tal que:

$$\frac{m(\overline{AE})}{m(\overline{EB})} = \frac{m(\overline{CD})}{m(\overline{BC})}.$$

Queda demostrado el teorema.

Teorema 4.9 La bisectriz de un ángulo externo de un triángulo divide exteriormente el lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

La demostración se dejará en alguna de las actividades siguientes para que la desarrolles.

Esta parte de proporciones es importante para entender la próxima sección, en la cual abordaremos los temas de semejanza de triángulos y de polígonos.

4.1.2. Semejanzas

Cuando trabajamos los criterios de congruencia de triángulos nos encontramos con un caso en el cual se involucran los tres ángulos de dos triángulos. Recordarás que no podíamos establecer un criterio de ángulo-ángulo-ángulo para la congruencia de triángulos porque podíamos encontrarnos con dos triángulos que efectivamente fueran equiangulares, pero los tamaños de sus lados no necesariamente se correspondían en sus longitudes. Al quedar esta incógnita la retomamos de nuevo para definir un criterio de semejanza de triángulos, pero antes debemos dar unas definiciones.

Definición 4.6 Dos polígonos se llaman semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes y cuyos lados correspondientes son proporcionales.

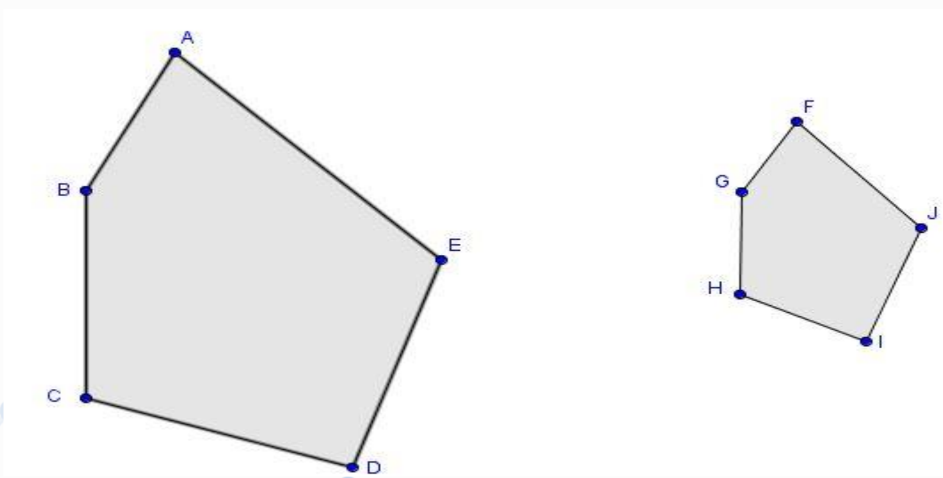


Figura 7. Polígonos semejantes

Definición 4.7 Si dos polígonos son semejantes, los lados de los polígonos que estén dispuestos de forma semejante uno respecto del otro, se denominarán líneas homólogas.

Definición 4.8 Dados dos polígonos semejantes. Una razón de similitud es la razón de los lados homólogos de los polígonos.

De esto podemos determinar que las condiciones necesarias y suficientes para que dos polígonos sean semejantes se da si:

- Para cada ángulo de cada polígono se debe de corresponder en el otro polígono un ángulo que le sea congruente.
- Los lados homólogos de ambos polígonos son proporcionales.

Los primeros casos que debemos tocar están en referencia a los polígonos de tres lados; es decir a los triángulos. Veamos los criterios sobre semejanza para triángulos.

Teorema 4.10 Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes.

Construcción 4.6 Sean los triángulosΔABC y ΔDEF, tales que el ángulo $\sphericalangle BAC$ se corresponde con el ángulo s $\sphericalangle EDF$; el ángulo $\sphericalangle ABC$ se corresponde con el ángulo $\sphericalangle DEF$ y el ángulo $\sphericalangle BCA$ se corresponde con $\sphericalangle EFD$. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ se corresponde, del mismo modo los lados $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ se corresponden y por último los lados $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ son correspondientes.

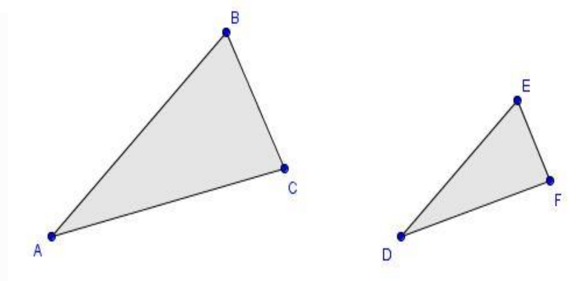


Figura 8. Triángulos semejantes

Demostración.

Por hipótesis y por construcción se tiene que los ángulos $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EDF$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ y $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle EFD$; por demostrar que:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{DE})} = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{DF})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{EF})}.$$

Trazos auxiliares. En el triángulo ΔABC se traza un segmento $\overline{GH}$ paralelo al lado $\overline{BF}$ tal que el triángulo ΔAGH sea congruente con el triángulo ΔDEF por construcción.

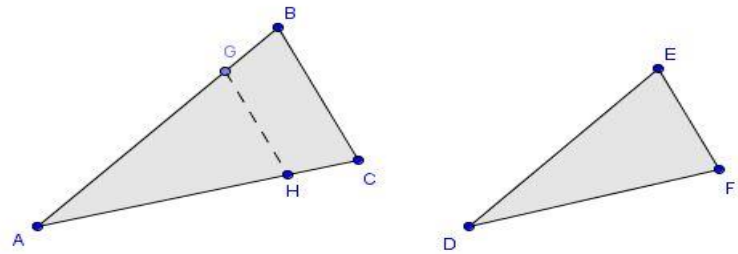


Figura 9. Trazos auxiliares

Como $\Delta AGH \equiv \Delta DEF$, se sigue que $m(\overline{AG}) = m(\overline{DE})$, $m(\overline{AH}) = m(\overline{DF})$ y $m(\overline{GH}) = m(\overline{EF})$.
Por el teorema 4.7 se cumple que:

$$\frac{m(\overline{AG})}{m(\overline{GB})} = \frac{m(\overline{AH})}{m(\overline{HC})};$$

por el teorema 4.3 se deduce que:

$$\frac{m(\overline{HC})}{m(\overline{AH})} = \frac{m(\overline{GB})}{m(\overline{AG})}$$

Por el teorema 4.4 tememos que:

$$\frac{m(\overline{GB}) + m(\overline{AG})}{m(\overline{AG})} = \frac{m(\overline{HC}) + m(\overline{AH})}{m(\overline{AH})};$$

de las sumas podemos ver que $m(\overline{AG}) + m(\overline{GB}) = m(\overline{AB})$ y $m(\overline{AH}) + m(\overline{HC}) = m(\overline{AC})$ sustituimos términos en las razones tales que:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{AG})} = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{AH})},$$

sustituimos valores en el denominador de ambas razones dado que $m(\overline{AG}) = m(\overline{DE})$ y $m(\overline{AH}) = m(\overline{DF})$, de donde:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{DE})} = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{DF})}.$$

De igual forma trazamos un segmento auxiliar $\overline{IJ}$ paralelo al lado $\overline{AC}$ de triangulo ΔABC tal que ΔAIJ sea congruente con el triángulo ΔDEF por construcción. Y de forma análoga al caso anterior vamos a deducir:

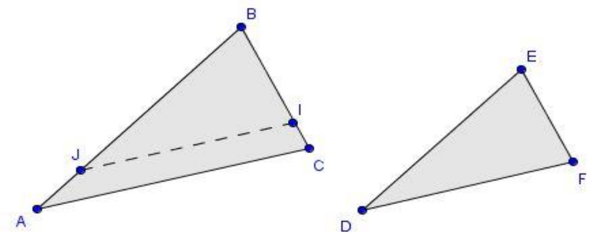


Figura 10. Segmentos auxiliares

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{DE})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{EF})}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{DE})} = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{DF})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{EF})}.$$

Lo que implica que los triángulos son semejantes, en notación $\Delta ABC \approx \Delta DEF$. Queda entonces demostrado el teorema.

Como en los criterios de congruencia de triángulos, si dos triángulos son iguales, lo primero que observamos es que sus lados correspondientes sean iguales. En el caso de triángulos semejantes observamos que sus ángulos correspondientes sean congruentes. Pero del mismo modo, podemos disponer de un criterio que implique un ángulo y sus lados de un determinado triangulo y si existe otro triángulo, sólo serán semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados homólogos son proporcionales. Podemos llamar a este criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado. Solo debemos recordar que tenemos un criterio de congruencia y otro de semejanza de triángulos.

Teorema 4.11 Si dos triángulos tienen ángulos correspondientes congruentes y los lados de los ángulos son proporcionales a sus correspondientes, entonces los triángulos son semejantes.

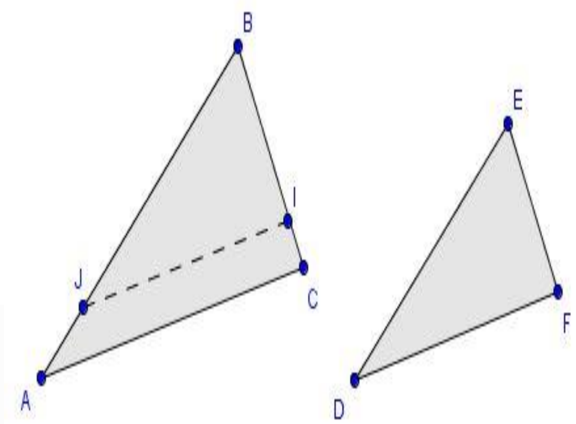


Figura 11. ángulos correspondientes congruentes

Construcción 4.7 Sean los triángulos ΔABC y ΔDEF, tales que el ángulo $\sphericalangle BAC$ se corresponde con el ángulo $\sphericalangle EDF$; el ángulo $\sphericalangle ABC$ se corresponde con el ángulo $\sphericalangle DEF$ y el ángulo $\sphericalangle BCA$ se corresponde con $\sphericalangle EFD$. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ se corresponden, del mismo modo los lados $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ se corresponden y por último los lados $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ son correspondientes.

Trazos auxiliares. Trazamos un segmento auxiliar $\overline{IJ}$ dentro del triangulo ΔABC tal que ΔAIJ sea congruente con el triángulo ΔDEF por construcción.

Demostración.

Por hipótesis y por construcción los ángulos $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEC$, tal que:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{DE})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{EF})}.$$

Ahora, de la construcción 4.7 y del teorema 4.7 tenemos:

$$\frac{m(\overline{BJ})}{m(\overline{AJ})}=\frac{m(\overline{BI})}{m(\overline{IC})}.$$

por el teorema 4.4 se deduce que:

$$\frac{m(\overline{BJ})+m(\overline{AJ})}{m(\overline{AJ})}=\frac{m(\overline{BI})+m(\overline{IC})}{m(\overline{IC})},$$

Entonces:

$$\frac{m(\overline{BA})}{m(\overline{AJ})}=\frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{IC})};$$

esto implica que los segmentos $\overline{JI}$ y $\overline{AC}$ son paralelos, entonces se sigue de esto que los ángulos $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BJI$ y $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle BIJ$. Por hipótesis y por el teorema anterior los triángulos $\Delta ABC \approx \Delta JBI$. Como $\Delta JBI \equiv \Delta DEF$, se deduce que $\Delta ABC \approx \Delta DEF$. Queda demostrado el teorema.

El siguiente criterio involucra a los lados correspondientes de dos triángulos que se presumen semejantes, entonces se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 4.12 Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

Demostración.

Sean los triángulos ΔABC y ΔDEF, tales que por hipótesis:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{DE})}=\frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{DF})}=\frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{EF})}.$$

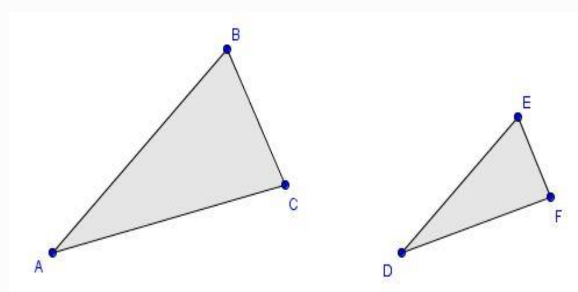


Figura 12. Dos triángulos con lados proporcionales

Por demostrar que:

$$\Delta ABC \approx \Delta DEF.$$

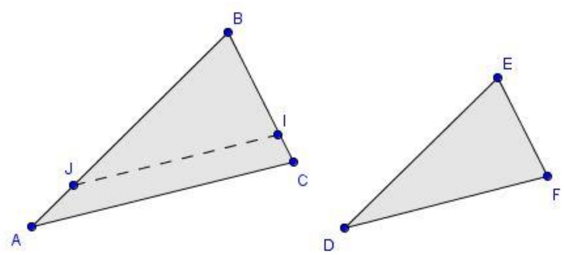


Figura 13. Triángulo semejante

Tomamos un segmento $\overline{BJ}$ contenido en $\overline{AB}$ tal que $\overline{BJ} \equiv \overline{DE}$; se toma $\overline{BI}$ contenido en $\overline{BC}$ tal que $\overline{BI} \equiv \overline{EF}$. Entonces, se traza el segmento $\overline{IJ}$, tal que los triángulos ΔABC y ΔJBI tienen en común el ángulo cuyo vértice en B. Por hipótesis se tiene que:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{DE})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{EF})},$$

por construcción $m(\overline{DE}) = m(\overline{BJ})$ y $m(\overline{EF}) = m(\overline{BI})$, lo que implica sustituyendo valores en las razones:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{BJ})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{BI})},$$

entonces por el teorema anterior los triángulos $\Delta ABC \approx \Delta JBI$. Pero por construcción los triángulos $\Delta JBI \equiv \Delta DEF$; por lo tanto $\Delta ABC \approx \Delta DEF$. Queda demostrado el teorema.

Con estas características podemos ir un poco más allá y regresar a los polígonos semejantes.

Teorema 4.13 Los perímetros de dos polígonos semejantes tienen una razón equivalente a cualquier razón dada de sus lados homólogos.

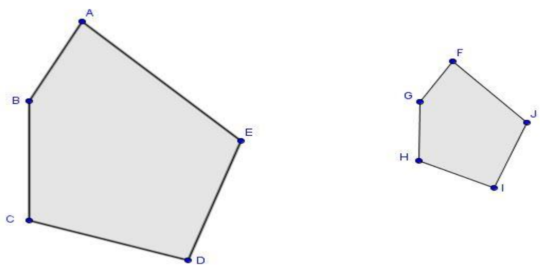


Figura 14. Polígonos semejantes

Demostración. Sean los polígonos $ABCDE$ y $FGHIJ$, tal que por hipótesis $ABCDE \approx FGHIJ$. Si p y p' son los perímetros respectivos de $ABCDE$ y $FGHIJ$, entonces por demostrar que:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{FG})} = \frac{p}{p'}.$$

Por hipótesis $ABCDE \approx FGHIJ$, se sigue:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{FG})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{GH})} = \frac{m(\overline{CD})}{m(\overline{HI})} = \frac{m(\overline{DE})}{m(\overline{IJ})} = \frac{m(\overline{EA})}{m(\overline{JF})}.$$

Supongamos r en el conjunto de los números reales tal que:

$$r = \frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{FG})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{GH})} = \frac{m(\overline{CD})}{m(\overline{HI})} = \frac{m(\overline{DE})}{m(\overline{IJ})} = \frac{m(\overline{EA})}{m(\overline{JF})},$$

se tiene entonces:

$$r = \frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{FG})}, \qquad r = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{GH})}, \qquad r = \frac{m(\overline{CD})}{m(\overline{HI})}, \qquad r = \frac{m(\overline{DE})}{m(\overline{IJ})}, \qquad r = \frac{m(\overline{EA})}{m(\overline{JF})},$$

Así:

$$r \cdot m(\overline{FG}) = m(\overline{AB}), \qquad r \cdot m(\overline{GH}) = m(\overline{BC}), \qquad r \cdot m(\overline{HI}) = m(\overline{CD}),$$
$$r \cdot m(\overline{IJ}) = m(\overline{DE}), \qquad r \cdot m(\overline{JF}) = m(\overline{EA});$$

Se suman estas equivalencias:

$$r \cdot [m(\overline{FG}) + m(\overline{GH}) + m(\overline{HI}) + m(\overline{IJ}) + m(\overline{JF})] =$$
$$= m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) + m(\overline{CD}) + m(\overline{DE}) + m(\overline{EA}),$$

por lo que $r \cdot p' = p$ tal que $r = \frac{p}{p'}$.

Se concluye así:

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{FG})} = \frac{p}{p'}.$$

Queda demostrado el teorema.

Teorema 4.14 Sean dos polígonos semejantes, entonces se pueden dividir en la misma cantidad de triángulos semejantes.

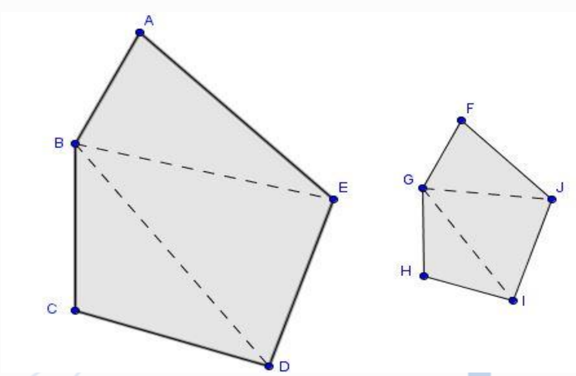


Figura 15. Triángulos semejantes en polígonos semejantes

Construcción 4.8 Sean dos polígonos $ABCDE$ y $FGHIJ$. Se hacen dos trazos auxiliares en cada polígono tal que se trazan los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$ en el polígono $ABCDE$ y en el polígono $FGHIJ$ se trazan los segmentos $\overline{GJ}$ y $\overline{GI}$.

Demostración.

Se quiere probar que de esta construcción, los polígonos se pueden dividir en una misma cantidad de triángulos semejantes.

Por hipótesis, los polígonos bajo la construcción 4.8 $ABCDE$ y $FGHIJ$ son semejantes, lo que implica que los ángulos $\measuredangle BCD$ y $\measuredangle GHI$ son congruentes. Se sigue de la misma hipótesis que los lados de ambos ángulos se corresponden y son homólogos, esto es que $\frac{\overline{BC}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{HI}}$. Entonces por el teorema 4.10 y por construcción, los triángulos $\Delta BCD \approx \Delta GHI$.
Los triángulos $\measuredangle ABE$ y $\measuredangle GFJ$ son semejantes por un proceso análogo.

Por otro lado, de la misma construcción y por las hipótesis del teorema se sigue que los ángulos $\measuredangle CDE \equiv \measuredangle HIJ$ y $\measuredangle AED \equiv \measuredangle FJI$. Además, se sigue de los trazos auxiliares que:

$$\measuredangle CDE = \measuredangle CDB + \measuredangle BDE, \measuredangle HIJ = \measuredangle HIG + \measuredangle GIJ, \measuredangle AED = \measuredangle AEB + \measuredangle BED,$$
$$\measuredangle FJI = \measuredangle FJG + \measuredangle GJI.$$

De lo anterior se cumple que $\measuredangle CDB \equiv \measuredangle HIG$, entonces $\measuredangle BDE = \measuredangle CDE - \measuredangle CDB$ y $\measuredangle GIJ = \measuredangle HIJ - \measuredangle HIG$, luego $\measuredangle CDE - \measuredangle CDB \equiv \measuredangle HIJ - \measuredangle HIG$, por construcción, se implica $\measuredangle BDE \equiv \measuredangle GIJ$.

De la misma construcción $\frac{\overline{CD}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{GI}}, \frac{\overline{DE}}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{GI}}$, de esto se tiene $\frac{\overline{CD}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{GI}}$; por lo que los triángulos ΔBDE y ΔGIJ son semejantes por el teorema 4.10. Por lo tanto, ambos polígonos tienen tres triángulos y los de uno son semejantes a sus correspondientes del otro.

Teorema 4.15 Sean dos polígonos que se pueden dividir en una misma cantidad de triángulos semejantes, entonces ambos polígonos son semejantes.

Hasta aquí se tienen los aspectos más generales de las proporciones y semejanzas de polígonos, lo que nos permitirá en la próxima sección abordar temas sobre polígonos.

4.2. Polígonos y circunferencia

En lo particular, los polígonos regulares se relacionan estrechamente con la circunferencia y el círculo. Esta relación nos va a permitir deducir propiedades fundamentales para poder acceder al tema de áreas de polígonos. Así damos inicio a esta sección con unas definiciones básicas del tema.

Definición 4.9 Todo polígono cuyos ángulos sean ángulos inscritos de una circunferencia se llamarán polígonos inscritos.

Definición 4.10 Si un polígono tiene ángulos que sean a su vez ángulos externos cuyos lados sean tangentes a una circunferencia serán denominados polígonos circunscritos.

4.2.1. Polígonos y circunferencia

En la unidad anterior y en la sección anterior hemos trabajado con conceptos que uniremos en esta sección. Las dos definiciones anteriores se enfocan en la situación cuando los ángulos de un polígono son, por un lado, ángulos inscritos de la circunferencia, a estos polígonos los llamamos polígonos inscritos. A los polígonos cuyos ángulos son externos a una circunferencia y sus lados son tangentes a la circunferencia, entonces se las definió como polígonos circunscritos.

Hay un tipo de polígonos, que en lo particular se estudian por su estrecha relación con la circunferencia, esta clase de polígonos ya los definimos en la unidad 1 y son los polígonos regulares. Recordemos algunas definiciones.

Se llama **polígono regular** al polígono cuyos lados y ángulos son congruentes.

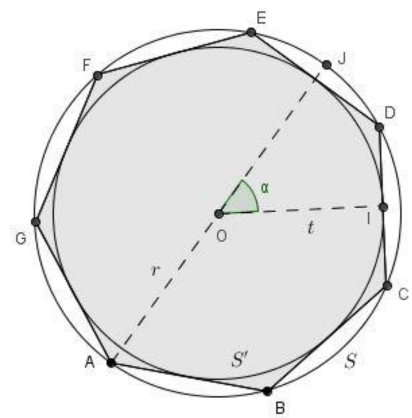


Figura 16. Polígono regular

Definición 4.11 Se llamará el **radio de un polígono** al radio de la circunferencia que circunscribe al polígono.

Definición 4.12 La distancia entre el centro de la circunferencia inscrita y el polígono que la inscribe se denomina **apotema del polígono**.

Definición 4.13 Se dice del centro de la circunferencia inscrita y circunscrita el **centro del polígono**.

Definición 4.14 Se determina al **ángulo central** de un polígono del ángulo formado por el radio y la apotema del polígono.

Teorema 4.16 Sea un polígono regular cualquiera. Este polígono tiene una circunferencia inscrita y otra circunscrita.

Demostración.
La demostración se divide en dos casos: En el primer caso se desea probar que el polígono regular está inscrito en una circunferencia; en el segundo caso se mostrará que el mismo polígono regular está circunscrito en otra circunferencia.

Supongamos un polígono regular $ABCDE$.

Construcción 4.9 Se traza un polígono $ABCDE$. Es decir, tenemos un polígono regular de cinco lados; un pentágono. Trazamos las bisectrices de los ángulos del polígono y se cortan en el punto O.

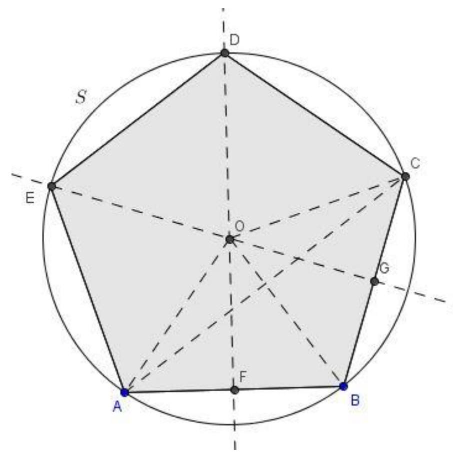


Figura 17.bisectrices de los ángulos del polígono regular

Primer caso. Si los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}$ y $\overline{EO}$ son congruentes, entonces sus longitudes son equivalentes, lo que implica que se puede trazar una circunferencia con un radio que tenga la medida de cualquiera de estas longitudes, con ello los puntos A, B, C, D y E estarían en la circunferencia, ello implicara que el pentágono está inscrito en la circunferencia.

Por demostrar que los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}$ y $\overline{EO}$ son congruentes.

Sean los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ por demostrar que son congruentes. Sea el segmento $\overline{AO}$ parte de la bisectriz del ángulo $\sphericalangle EAB$, entonces los ángulos $\sphericalangle EAO$ y $\sphericalangle OAB$ son congruentes por construcción. El mismo criterio usamos para determinar que los ángulos $\sphericalangle ABO$ y $\sphericalangle OBC$ son congruentes. Entonces, se tiene que $\sphericalangle EAB$ y $\sphericalangle ABC$ son congruentes por construcción, dado que $m(\sphericalangle EAO) = m(\sphericalangle OAB) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle EAB)$ y $m(\sphericalangle ABO) = m(\sphericalangle OBC) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC)$; así, $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle EAB)$, se sigue $\frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle EAB)$, sustituyendo valores se cumple $m(\sphericalangle OAB) = m(\sphericalangle ABO)$, por lo tanto los ángulos $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle ABO$. Esto implica que el triangulo ΔABO es isósceles y por conclusión se tiene que los lados $\overline{AO}$ y $\overline{AB}$ son congruentes. El mismo criterio se usa para probar que los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}$ y $\overline{EO}$ son congruentes. Por lo tanto podemos trazar una circunferencia con centro en O y por construcción los puntos A, B, C, D y E están en la circunferencia; por lo tanto el póligono $ABCDE$ es inscrito en dicha circunferencia.

Segundo caso.

Sea el polígono $ABCDE$ de la construcción anterior, por hipótesis tienen sus cinco lados congruentes entre sí, y sus cinco ángulos congruentes entre sí de igual forma. Por el caso anterior y la construcción las mediatrices del polígono cortan el centro de la circunferencia que inscribe al polígono.

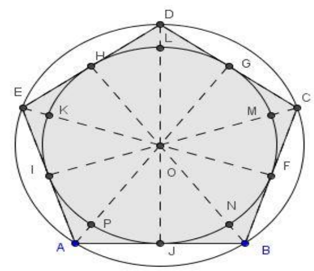


Figura 18. Polígono regular

Se desea probar que el polígono es circunscrito a una circunferencia S'. Esto implica que se deberá mostrar que los ángulos del polígono son ángulos externos de la circunferencia, tales que sus lados son segmentos contenidos en rectas tangentes a la circunferencia S'.

Del caso anterior podemos tomar cualquier vértice. Sea el vértice A, el cual sustenta al ángulo $\sphericalangle EAB$; el lado opuesto a este vértice es $\overline{CD}$ del polígono $ABCDE$. La mediatriz de este segmento pasa por el punto O que es el circuncentro del polígono $ABCDE$ por el teorema 3.16; tales mediatrices de los lados del polígono son congruentes, entonces son equidistantes del centro de la circunferencia por el teorema 3.17. Por esto, los segmentos $\overline{HO}$, $\overline{IO}$, $\overline{JO}, \overline{FO}$ y $\overline{GO}$ son congruentes entre sí. Entonces se puede trazar una circunferencia de S' con un radio $\overline{IO}$, y en consecuencia los lados del polígono, en este caso, el lado $\overline{AE}$ forma un ángulo de 90º con su el segmento $\overline{IO}$ porque está contenido en su mediatriz, lo que implica por el teorema 3.12 que el segmento $\overline{AE}$ es tangente a la circunferencia S'. De forma análoga concluimos que cada lado del polígono es tangente a S'. Queda demostrado el teorema.

Ahora podemos observar el apotema para, en la siguiente sección, usarlo en la construcción de polígonos. Nos auxiliaremos con el plano cartesiano para calcular el valor de la longitud del apotema.

Construcción 4.10 Sea un polígono $ABCDEF$ cuyos lados son equidistantes del origen del plano cartesiano. Podemos trazar una circunferencia con su radio equivalente al apotema del polígono $ABCDEF$ sobre el lado $\overline{BC}$.

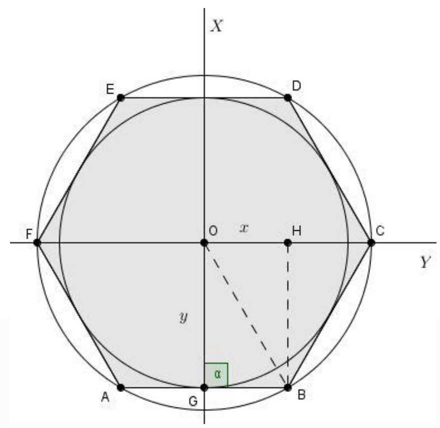


Figura 19. Apotema de un polígono

Dado que estamos en el plano cartesiano, el punto G se encuentra sobre la circunferencia inscrita. El segmento $\overline{OH}$ tiene medida $m(\overline{OH}) = x$ y $m(\overline{OG}) = y$, tal que la $m(\overline{OB}) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{m(\overline{OG})^2 + m(\overline{BG})^2}$, entonces $m(\overline{OB})^2 = m(\overline{OG})^2 + m(\overline{BG})^2$.

Se define $m(\overline{OB}) = r$ donde r está en el conjunto de los números reales positivos. Se denomina a la $m(\overline{OB}) = u$. Por construcción el punto G es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, entonces $m(\overline{BG}) = \frac{1}{2}m(\overline{AB})$; si $m(\overline{AB}) = t$, se sigue que $m(\overline{BG}) = \frac{1}{2}t$.

Se sustituyen estos valores en $m(\overline{OB})^2 = m(\overline{OG})^2 + m(\overline{BG})^2$, tal que $r^2 = u^2 + (\frac{1}{2}t)^2$.

El valor de la longitud de la apotema se obtiene despejando s de la última ecuación.

Sea $r^2 = u^2 + (\frac{1}{2}t)^2$, tal que:

$$u^2 = r^2 - (\frac{1}{2}t)^2,$$

luego:

$$u = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - t^2}.$$

Este es el valor del apotema, el cual usaremos en la siguiente sección.

4.2.2. Construcción de polígonos en la circunferencia

En la sección anterior calculamos el valor del apotema, veamos qué nos permite deducir este valor.

Construcción 4.11 Tomemos un polígono regular $ABCDE$ cuyos lados tienen una longitud equivalente a t. De la sección anterior sabemos que podemos inscribir al polígono $ABCDE$ en una circunferencia S, tal que el radio del polígono es el radio de la circunferencia.

El segmento $\overline{OH}$ es un apotema del polígono $ABCDE$. Este segmento biseca al segmento $\overline{AB}$; además, si prolongamos el apotema hasta cortar la circunferencia S en

I, entonces el segmento $\overline{OB}$ es congruente con $\overline{OI}$ por tener la longitud del radio de S.

Demos algunos valores.

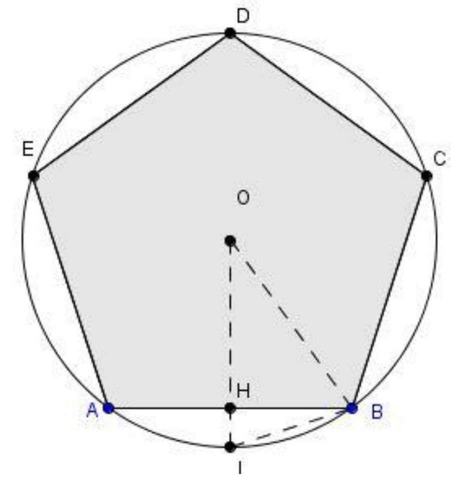


Figura 20. Apotema de un polígono

Sea $m(\overline{OH}) = u, m(\overline{OB}) = r$ y $m(\overline{OI}) = r$. Deseamos calcular el valor de la longitud del segmento $\overline{IB}$. Definamos las siguientes medidas $m(\overline{AB}) = l,\ m(\overline{HB}) = \frac{1}{2}lm(\overline{IB}) = v$ y $m(\overline{HI}) = w$. Por otro lado $m(\overline{OI}) = m(\overline{OH}) + m(\overline{HI}),$ tal que $m(\overline{HI}) = m(\overline{OI}) - m(\overline{OH})$.

Por el **teorema de Pitagoras**[3] y sustituyendo valores procedemos a hacer los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} m(\overline{IB})^2 &= m(\overline{HB})^2 + m(\overline{HI})^2 = m(\overline{HB})^2 + \left(m(\overline{OI}) - m(\overline{OH})\right)^2 \\ &= m(\overline{HB})^2 + m(\overline{OI})^2 + m(\overline{OH})^2 - 2m(\overline{OI}) \cdot m(\overline{OH}) \\ &= m(\overline{OH})^2 + m(\overline{HB})^2 + m(\overline{OI})^2 - 2m(\overline{OI}) \cdot m(\overline{OH}). \end{aligned}$$

De la construcción anterior podemos deducir $m(\overline{OB})^2 = m(\overline{OH})^2 + m(\overline{HB})^2$, sustituimos en:

$$\begin{aligned} m(\overline{IB})^2 &= m(\overline{OH})^2 + m(\overline{HB})^2 + m(\overline{OI})^2 - 2m(\overline{OI}) \cdot m(\overline{OH}) \\ &= m(\overline{OB})^2 + m(\overline{OI})^2 - 2m(\overline{OI}) \cdot m(\overline{OH}). \end{aligned}$$

Así, la $m(\overline{IB})^2 = m(\overline{OB})^2 + m(\overline{OI})^2 - 2m(\overline{OI}) \cdot m(\overline{OH})$; sustituimos los valores definidos antes, entonces:

[3] El teorema de Pitágoras es uno de los resultados más importantes que hay en la geometría plana. Este teorema se demuestra en la siguiente sección.

$$m(\overline{IB})^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2} = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{4r^2 - l^2} = r\left(2r - \sqrt{4r^2 - l^2}\right);$$

al aplicar raíz cuadrada a esta equivalencia se obtiene:

$$m(\overline{IB}) = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - l^2}\right)};$$

éste es el valor de segmento $\overline{IB}$.

En general, si el valor del lado de un polígono con n —lados es l_n, entonces el valor del lado del polígono con dos veces más lados es:

$$l_{2n} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - {l_n}^2}\right)}.$$

De la construcción vemos que la recta que contiene al segmento $\overline{OI}$, biseca al arco $\overline{AB}$, esto implica que la cuerda $\overline{AI}$ tiene la misma medida que la cuerda $\overline{IB}$, lo que implica, que al tener un polígono de cinco lados, entonces en cada lado se procede de forma análoga, lo que implica que podemos con esta medida construir un decágono inscrito a partir de un pentágono. Este proceso se puede aplicar a cualquier polígono regular. Para a partir de un polígono de n-lados, obtener un polígono se $2n$-lados.

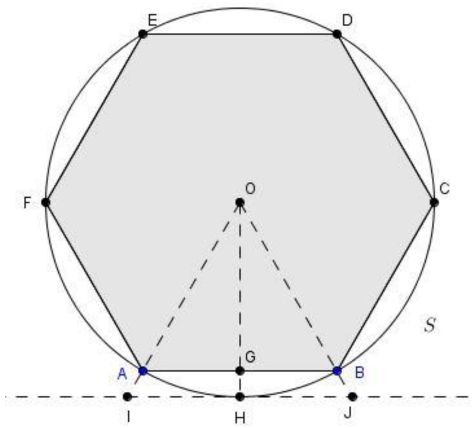


Figura 21. apotema de un hexágono

Construcción 4.12 Sea un hexágono $ABCDEF$ circunscrito a una circunferencia S. Se traza un radio perpendicular al lado $\overline{AB}$ del hexágono sea G el punto donde corta el radio al lado $\overline{AB}$ y sea H el punto donde el radio toca a la circunferencia S. Trazamos una recta tangente al punto H la cual es paralela al segmento $\overline{AB}$. Ahora, se trazan los segmentos $\overline{OA}$ Y $\overline{OB}$, que son radios a la vez del hexágono y de la circunferencia $\bar{S}$; estos segmentos cortan a la recta tangente en los puntos I y J.

Por construcción el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al segmento $\overline{IJ}$, lo que implica que los triángulos ΔAOB y ΔIOJ son semejantes por construcción. Entonces, $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OIJ$ por ser $\overline{AB} \| \overline{IJ}$, de esto se obtiene:

$$\frac{m(\overline{IJ})}{m(AB)} = \frac{m(\overline{OH})}{m(\overline{OG})}.$$

Si $m(\overline{AB}) = l_6$ y $m(\overline{IJ}) = l'_6$, tal que $m(\overline{OG}) = r$ y $m(\overline{OH}) = u'$, de donde sustituyendo:

$$\frac{l'_6}{l_6} = \frac{r}{u}$$

se sigue:

$$l'_6 = \frac{l_6 \cdot r}{u};$$

como u es el apotema se deduce que:

$$l'_6 = \frac{l_6 \cdot r}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - {l_6}^2}.} = \frac{2l_6 \cdot r}{\sqrt{4r^2 - {l_6}^2}}.$$

Por lo tanto:

$$l'_6 = \frac{2l_6 \cdot r}{\sqrt{4r^2 - {l_6}^2}}.$$

De la misma forma se procede para cada uno de los lados del hexágono y lo que obtenemos es un hexágono regular circunscrito a la circunferencia S. Este mismo proceso se puede replicar para cada polígono regular lo que implica que en general el lado de un polígono regular circunscrito a una circunferencia tiene una medida de:

$$l'_n = \frac{2l_n \cdot r}{\sqrt{4r^2 - {l_n}^2}}\,[4].$$

Hay muchas propiedades más que se pueden deducir, en general las fórmulas de los lados de cualquier polígono regular.

Ahora estamos listos para pasar a la última sección de este curso, en la cual revisaremos los conceptos de área de un polígono, centrándonos un poco en los polígonos regulares, y también estudiaremos algunas propiedades de volúmenes de poliedros.

[4] Las medidas que hemos definido se dieron como funciones que van de los conjuntos de objetos geométricos a los reales, y el uso del álgebra es sólo un recurso para deducir otras unidades de medidas que igualmente están en los números reales.

4.3. Áreas y volúmenes

Primero iniciaremos este tema definiendo algunos antecedentes antes de continuar con el cálculo de áreas de polígonos.

Para poder calcular el área de alguna superficie, es necesario en primera instancia dar una unidad de medida que nos permita medir otras superficies. En la vida diaria nos referimos al área de alguna superficie en unidades cuadradas, el metro cuadrado, por ejemplo. Entonces, necesitamos definir cuál va a ser nuestra unidad de medida.

Definición 4.15 Se denomina **unidad de superficie** a la superficie de una figura que es tomada para medir otras superficies.

Definición 4.16 Se llamará **área de una superficie** a la medida tomada en unidades de superficie.

Definición 4.17 Si el área de dos superficies es equivalentes, entonces se dice que ambas **superficies son equivalentes**.

4.3.1. Áreas de polígonos

La primera figura que vamos a trabajar es el rectángulo.

Teorema 4.17 Dos rectángulos tienen áreas proporcionales a sus alturas, si sus bases son de medida equivalente.

Demostración.
La demostración se hará en dos partes, dado que se tienen los casos cuando las alturas son conmensurables y cuando son inconmensurables.

Caso 1.

Construcción 4.13 Sean los rectángulos $ABCD$ y $EFGH$ tales que sus bases $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ son segmentos congruentes y sus alturas son conmensurables. La altura $\overline{AD}$ se divide en m segmentos con longitud equivalente y la altura $\overline{EH}$ se divide en n segmentos equivalentes tales que $m \geq n$. Si ambas alturas son conmensurables, entonces los segmentos de ambas alturas se pueden tomar con la misma longitud.

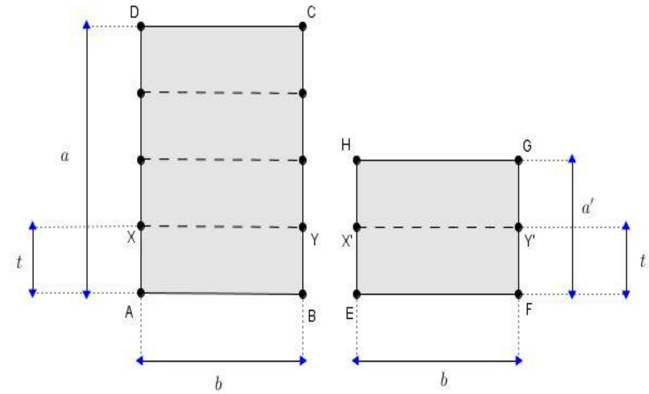


Figura 22. Rectángulos con áreas proporcionales

Sea $t = m(\overline{AX})$ y $t = m(\overline{EX'})$, sea también $m(\overline{AD}) = a$ y $m(\overline{EH}) = a'$ y por último sea $m(ABCD) = U(ABCD)$ y $m(EFGH) = U(EFGH)$ donde $U(ABCD)$ y $U(EFGH)$ son las unidades de superficie de los rectángulos respectivos.

Por demostrar que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{U(ABCD)}{U(EFGH)}.$$

Como $m(\overline{AX}) = t = m(\overline{EX'})$, tales que $m(\overline{AD}) = tm$ dado que este segmento está dividido m veces; $m(\overline{EH}) = tn$ dado que este segmento está dividido n veces, entonces:

$$\frac{a}{a'} = \frac{m(\overline{AD})}{m(\overline{EH})} = \frac{tm}{tn} = \frac{m}{n};$$

Ahora, el rectángulo $ABCD$ está dividido en m rectángulos congruentes entre sí. Por construcción; y el rectángulo $EFGH$ está dividido en n rectángulos congruentes entre sí.

Entonces; se toma la medida $U(ABXY) = s$ y $U(EFX'Y') = s$, son equivalentes estas unidades de superficie por construcción. Se sigue entonces que $U(ABCD) = s \cdot m$ y $U(EFGH) = s \cdot n$; de esto se sigue que:

$$\frac{U(ABCD)}{U(EFGH)} = \frac{s \cdot m}{s \cdot n} = \frac{m}{n}$$

Como podemos observar:

$$\frac{a}{a'} = \frac{U(ABCD)}{U(EFGH)}.$$

Por lo tanto, el área de los rectángulos es proporcional a sus alturas si tienen bases congruentes.

El caso 2 se deja como ejercicio para la actividad 3.

Corolario 4.1 Sean las áreas de dos rectángulos, tales áreas son proporcionales a las bases si tienen alturas equivalentes.

Por demostrar que:

$$\frac{b}{b'} = \frac{U(ABCD)}{U(EFGH)}.$$

Se sigue una construcción semejante a la del teorema anterior.

La demostración es análoga al teorema 4.16**, se deja como ejercicio para la evidencia**.

Tenemos ahora el caso de dos rectángulos que tienen áreas proporcionales. Pero al no tener bases o alturas equivalentes, son proporcionales al producto de sus bases por la altura.

Teorema 4.18 Las áreas de dos rectángulos son proporcionales a los productos de las bases por las alturas.

Demostración.

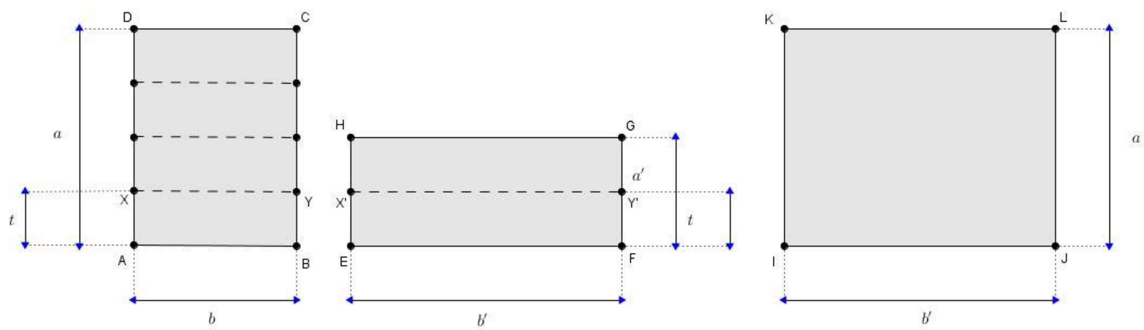


Figura 23. Áreas de rectángulos proporcionales

Construcción 4.14 Sea el rectángulo $ABCD$ con altura a y base b; sea el rectángulo $EFGH$ con altura a’ y base b’, cuales quiera. Se construye un rectángulo con altura a y base b’, entonces por construcción, por el teorema 4.16 y el corolario 4.1 se tiene:

$$\frac{a}{a'} = \frac{U(ABCD)}{U(IJKL)}, \qquad \frac{b}{b'} = \frac{U(IJKL)}{U(EFGH)}.$$

Ahora multiplicamos:

$$\frac{a \cdot b}{a' \cdot b'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} = \frac{U(ABCD)}{U(IJKL)} \cdot \frac{U(IJKL)}{U(EFGH)} = \frac{U(ABCD)}{U(EFGH)};$$

por lo tanto:

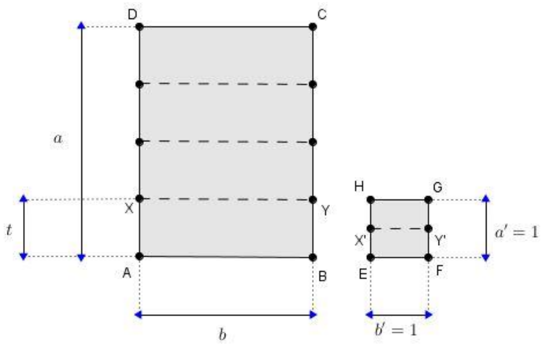
$$\frac{a \cdot b}{a' \cdot b'} = \frac{U(ABCD)}{U(EFGH)}.$$

Queda demostrado el teorema.

El siguiente teorema nos conduce al cálculo del área de un rectángulo cualquiera.

Teorema 4.19 El área de un rectángulo es equivalente al producto de su base por su altura.

Demostración.



Construcción 4.15 Sea un rectángulo $ABCD$ con altura a y base b; sea el rectángulo $EFGH$ de altura $a' = 1$ y base $b' = 1$, el cual es una unidad superficial del rectángulo $ABCD$.

Figura 24. Representación Teorema 4.1.9

Por el teorema 4.17 se tiene que:

$$\frac{U(ABCD)}{U(EFGH)} = \frac{a \cdot b}{a' \cdot b'};$$

se sigue:

$$\frac{U(ABCD)}{U(EFGH)} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = a \cdot b.$$

Ahora, la razón $\frac{U(ABCD)}{U(EFGH)}$ determina el número de unidades superficiales contenidas en $ABCD$ por construcción; es decir, esta razón calcula el área de $ABCDE$, se concluye entonces:

$$U(ABCD) = a \cdot b.$$

Queda demostrado el teorema.

Corolario 4.2 El área de un cuadrado es equivalente al cuadrado de la medida de sus lados.

Demostración.

Si tenemos un rectángulo $ABCD$ de altura $a = l$ y base $b = l$, por el teorema anterior:

$$U(ABCD) = a \cdot b = l \cdot l = l^2.$$

Teorema 4.20 El área de un paralelogramo es equivalente al producto de su base por su altura.

Demostración.

Construcción 4.16 Sea un paralelogramo $ABCD$ del vértice B se traza un segmento perpendicular a $\overline{BE}$ al segmento $\overline{AB}$ el cual corta al segmento $\overline{CD}$ en E. Sobre el vértice trazamos una recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ y del vértice D trazamos una semirecta que sea la continuación del segmento $\overline{CD}$ y que corta por construcción en un ángulo de 90º en el punto F a la recta perpendicular que pasa por A.

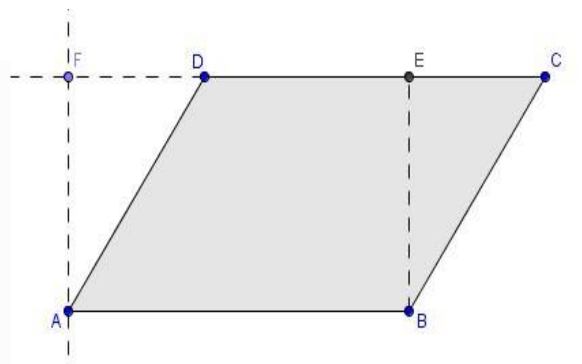


Figura 25. Área de un paralelogramo

Por construcción la unidad de superficie del triángulo ΔBCE es equivalente a la unidad de superficie del triángulo ΔADF. De esto se sigue $U(ABCD) = U(ABEF)$ por construcción. Por el teorema 4.18 $U(ABEF) = a \cdot b$. Por lo tanto se concluye que:

$$U(ABCD) = a \cdot b.$$

Queda demostrado el teorema.

Teorema 4.21 El área de un triángulo es equivalente a la razón del producto de su altura por su base sobre 2.

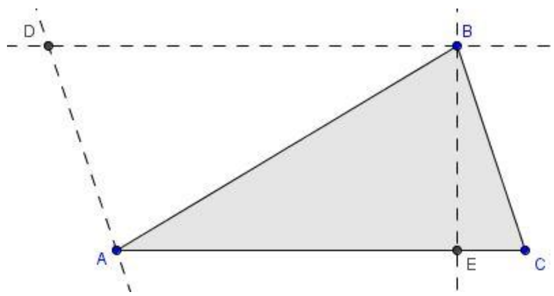


Figura 26. Demostración teorema 4.21

Construcción 4.17 Sea el triángulo ΔABC, se traza una recta perpendicular al segmento $\overline{AC}$ y que pase por el vértice B, se traza una recta perpendicular a esta recta y trazamos otra recta que corta al vértice A y a la recta anterior en el punto D. La intersección entre el segmento $\overline{AC}$ y su recta perpendicular se da en el punto E.

Por construcción se forma un paralelogramo $ACBD$, tal que su área es $U(ACBD) = m(\overline{EB}) \cdot m(\overline{AC})$. Si $\overline{EB}$ es la altura del triángulo Δ tal que $m(EB) = a$ y $m(AC) = b$.

Por construcción $U(ABC) = \frac{1}{2}\, U(ACBD) = \frac{1}{2}\, m(\overline{EB}) \cdot m(\overline{AC}) = \frac{1}{2}ab$.

Por lo tanto:

$$U(ABC) = \frac{1}{2}ab.$$

Queda demostrado el teorema.

Una relación entre áreas muy importante está dada a partir del teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras. El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Demostración.

Por demostrar que $U(ACDE) = U(BCIH) + U(AFGF)$.

Construcción 4.18 Sea el triángulo rectángulo ABC y los cuadrados $ACDE$, $BCDI$ y $ABGF$. Se traza un segmento perpendicular $\overline{BL}$ y los segmentos $\overline{AI}$ y $\overline{BD}$. Por último trácese un segmento $\overline{DN}$ paralelo a $\overline{BC}$ que corte a $\overline{BL}$ en N y de mismo modo trácese $\overline{MI}$ paralela a $\overline{AC}$ que corte a $\overline{BH}$ en M.

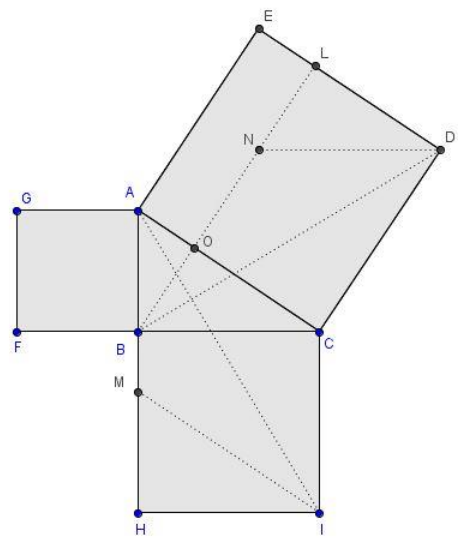


Figura 27. Gráfica teorema de Pitágoras

Se tiene:

$\sphericalangle BCD = 90º + \sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle ACI = 90º + \sphericalangle ACB$, entonces $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACI$.

Por construcción $AC = CD$ y $BD = CI$. Por el criterio de congruencia de triángulos, el ΔBCD es congruente con ΔACI.

Ahora por construcción se tiene que $U(BCDN) = U(OCDL)$, también por construcción $U(AMIC) = U(BCIH)$. Podemos deducir de igual forma que por construcción $2U(\Delta BCD) = U(BDCN)$ y $2U(\Delta ACI) = U(ACIM)$; lo que nos conduce a $2U(\Delta BCD) = U(OCDL)$ y $2U(\Delta ACI) = U(BCIH)$. Como ΔBCD es congruente con ΔACI, entonces $U(OCDL) = U(BCIH)$. De forma análoga se demuestra que $U(AOLE) = U(ABGF)$.

Pero $U(ACDE) = U(OCDL) + U(AOLE)$, sustituyendo valores se tiene:

$$U(ACDE) = U(BCIH) + U(AFGF)$$

Queda demostrado el teorema de Pitágoras.

En general para calcular el área de un polígono regular se define como sigue.

Teorema 4.22 El área de un polígono regular es equivalente al semiproducto del perímetro del polígono por la apotema.

Esta demostración se deja para que la desarrolles en las actividades de la unidad.

Teorema 4.23 El área de un círculo es equivalente al producto de la longitud de la circunferencia por el radio al cuadrado.

Demostración.

En los polígonos regulares circunscritos en la circunferencia, conforme su número de lados crece la longitud de sus perímetros se aproxima a la longitud de la circunferencia que los circunscribe, entonces sea S la circunferencia y $m(S) = 2\pi r$.

Por el teorema anterior se sigue que:

$$A(S) = \frac{m(S) \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2;$$

por lo tanto:

$$A(S) = \pi r^2.$$

Queda demostrado el teorema.

Como podrás notar, la importancia de la geometría no está sólo en el desarrollo de los teoremas y su poder deductivo solamente. La geometría es una herramienta muy útil en otras áreas del conocimiento humano, no sólo en la aplicación, sino también para el desarrollo de otras ciencias y actividades que el ser humano ha desarrollado a lo largo de su paso por este planeta.

4.3.2. Volúmenes de sólidos

Por último, daremos los resultados más importantes de los sólidos, debido a que la geometría del espacio es tan rica como la geometría plana y no nos alcanzaría el tiempo para desarrollar todas las demostraciones que se siguen de esta parte de la geometría.

En el espacio los planos son lo que a su vez las rectas en un plano. Mientras en un plano, dos rectas definen un ángulo, en el espacio se requieren de tres planos para definir un ángulo.

Definición 4.18 Sean tres planos en el espacio que se intersecan en un punto, se define esta intersección de planos como **ángulo poliedro**.

Teorema 4.24 La suma de las caras de un ángulo poliedro es menor 360º

Definición 4.19 Dos ángulos poliedros opuestos por el vértice se llaman ángulos poliedros simétricos.

Teorema 4.25 Dos triedros son equivalentes si sus ángulos poliedros son simétricos y si tienen sus caras homologas iguales.

Definición 4.20 Poliedro es un sólido limitado por planos en el espacio.

Definición 4.21 Prisma es un poliedro cuyas bases son paralelas.

Prisma triangular es aquél cuyas bases son triángulos.

Prisma cuadrangular, es el prisma cuyas bases son cuadriláteros.

Prisma pentagonal, es aquél cuyas bases son pentágonos.

Prisma hexagonal, es aquél cuyas bases son hexágonos.

Definición 4.22 Se llama paralelepípedos a los prismas cuyas bases son paralelogramos.

Dentro de los paralelogramos están el cubo y el ortoedro.

Existen dos tipos de áreas en los prismas, el área de las caras laterales y el área del total de las caras.

Para calcular el volumen de un cubo o un ortoedro se multiplica el área de una de las bases por la altura.

Definición 4.23 Se llama pirámide al sólido delimitado por caras triangulares y una base poligonal. En una pirámide la altura es la medida que hay entre la base y el ángulo poliedro.

De igual forma, las áreas de una pirámide son dos: el área lateral, determinada por los lados triangulares de ésta y el área total es aquélla que tiene la suma del área lateral y el área de la base.

El volumen de una pirámide está definido por la tercera parte del producto del área de la base por la altura.

Hay otro tipo de sólidos que tienen base circular, éstos son el cilindro y el cono.

El cilindro es un sólido delimitado por una superficie lateral denominada superficie cilíndrica y dos bases circulares.

El cono tiene una superficie lateral llamada superficie cónica, la cual inicia en un vértice en el espacio y concluye en una base circular.

El área de la superficie cilíndrica se calcula multiplicando la longitud de la circunferencia formada por las bases por la altura que es $= 2\pi rh$ donde h es la altura.

El área total es la suma del área de la superficie cilíndrica por dos veces el área de una de las bases circulares.

El volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de una de sus bases por la altura.

El volumen de un cono es la tercera parte del producto del área de la base por la altura.

Como se dijo anteriormente, los resultados de la geometría espacial son tan extensos que daría lugar para otro curso de geometría, y los resultados que se obtienen están estrechamente relacionados con los resultados de la geometría plana que se dan infinidad de analogías entre definiciones y teoremas.
Por ello es que se presentan de forma muy escueta los temas primarios de esta geometría.

Con esto damos por concluido los temas de este curso, el cual esperamos te haya servido para tu desarrollo como matemático(a).

Cierre de la unidad

Has concluido la cuarta unidad, y con ello toda la unidad didáctica. A lo largo de ésta se abordaron las definiciones y teoremas de proporcionalidad geométrica, semejanza y de áreas de polígonos, con el objeto de que entiendas el proceso de demostración de cada teorema y lo puedas aplicar en las siguientes unidades didácticas como Cálculo diferencial e integral, Geometría analítica, Topología, entre otras.

Toma en cuenta que lo que has estudiado aquí es parte de tu preparación dentro del área de las matemáticas, lo que aquí aprendiste no fue sólo lo que te describe la geometría, aprendiste a desarrollar tu intuición matemática, la cual es importante para que tengas un desempeño adecuado como profesional; por ello es necesario que si tienes alguna duda la resuelvas con el apoyo de tu docente para que no tengas problemas en comprender el desarrollo de las demostraciones.

Nos queda camino por andar, dado que continuarán otras asignaturas. Esperamos que este material te haya servido para continuar tu camino por las matemáticas.

Las demostraciones que has visto hasta aquí son tan sólo unas cuantas de muchas que abordarás a lo largo de tu carrera dentro de las matemáticas. Es aconsejable que revises nuevamente la unidad en caso de tener dudas, o no recuerdes algo que sea de importancia para la siguiente asignatura; de no ser éste tu caso, has concluido la unidad y en consecuencia el curso.

Recursos didácticos

Aquí podrás encontrar enlaces a páginas en internet cuyo contenido trata sobre geometría de forma muy visual, en donde las definiciones que se dan en esta unidad se visualizan y te dan una idea más clara de lo que es la geometría.

Todos estos recursos en línea tienen como principal objetivo apoyarte en el desarrollo de tu comprensión de las matemáticas, algunas en un nivel muy básico, otras lo hacen con mayor detalle, pero lo importante es darte las herramientas necesarias para que puedas comprender los fundamentos de las matemáticas.

Banfill, J. (2006). Geometría – Lecciones. AAA Math. Disponible en
http://www.aaamatematicas.com/geo.htm

En esta liga podrás poner en práctica, mediante ejercicios interactivos y ejemplos, los temas que has estudiado en esta unidad.

Disfruta las matemáticas (20209. Geometría. Las matemáticas son divertidas. Disponible en
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/

En esta liga encontrarás los postulados y propiedades de la geometría con un ejemplo ilustrativo.

S.a. (S.f.). Definciones, términos de geometría. Salón hogar. Disponible en
http://www.salonhogar.com/matemat/geometria/

Este es un recurso aún en construcción, pero que de momento te proporciona los conceptos básicos como medio de consulta.

Utah state University (2023). Geometría (grados 9 -12). Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales. Disponible en http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_3.html

En esta liga encontrarás recursos interactivos que te invitan a construir con figuras geométricas formas y estructuras divertidas que ponen a prueba tus conocimientos de geometría.

S.a. (S.f.). Geometría. Superprof Material didáctico. Disponible en
http://www.vitutor.com/geometria.html

Aquí puedes revisar los postulados, definiciones y teoremas de la geometría.

FAUD (2020). Cuerpos geométricos, Geometría. Curso de ingreso 2020- FAUD. Disponible en
https://faud.unsj.edu.ar/descargas/CUADERNILLO_2019.pdf

Recurso divertido que pone a prueba tus conocimientos sobre las propiedades de los cuerpos geométricos relacionando definiciones con las formas geométricas.

Fuentes de consulta

Básica

- Coxeter, H. S. M. (1971). *Fundamentos de geometría*. México: Limusa. ISBN 9681806417.
- Euclides. (1956). *Euclid's Elements*. Nueva York: Dover. ISBN 0486600882.
- Geltner, P. B., & Peterson, D. J. (1998). *Geometría*. México: Thomson Editores. ISBN 978-968-7529-47-9.
- Golovina, L. I., & Yaglom, I. M. (1976). *Inducción en la geometría*. Moscú: Mir.
- Pogorelov, A. V. (1974). *Geometría elemental*. Moscú: Mir.
- Redon Gómez, A. (2000). *Geometría paso a paso*. México: Tébar. ISBN 978-84-95447-22-7.
- Shively, L. S. (1984). *Introducción a la geometría moderna*. México: Continental.

Complementaria

- Dubnov, Y. S. (1993). *Errores en las demostraciones geométricas*. Moscú: Mir. ISBN 978-84-80410-40-3.
- Fetisov, A. I. (1980). *Acerca de la demostración en geometría*. Moscú: Mir.
- Kostovski, A. N. (1984). *Construcciones geométricas mediante compás*. Moscú: Mir.
- Smogorzhevski, A. S. (1988). *La regla en construcciones geométricas*. Moscú: Mir.