Matemáticas

Cálculo de varias variables I

Semestre 3

Unidad 1. Espacios vectoriales

Clave

05142316/06142316

Universidad Abierta y a Distancia de México

ÍNDICE

Presentación de la unidad

En tus unidades didácticas de geometría analítica has estudiado el plano y al espacio cartesiano, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, como conjuntos de puntos cuyos subconjuntos son lugares geométricos expresados a través de una ecuación o una desigualdad.

Sin embargo el álgebra lineal nos proporciona conceptos, que a su vez son herramientas, que permiten hacer los cálculos de una manera más eficiente, aunque más abstracta.

Revisa el siguiente vídeo donde muestra una idea a grandes rasgos de la importancia de los conceptos del Álgebra lineal para el área de las matemáticas.

Orígenes del álgebra lineal, tomada de:

IQ – Conviértete en un genio (10 de enero de 2015). Orígenes del algebra lineal. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=A46dFgcyRvQ

Unidad 1. Espacios vectoriales

Competencia específica

Utilizar las operaciones entre vectores y su interpretación tanto algebraica como geométrica en espacios de dos y tres dimensiones.

Logros

- Analizar las diferentes maneras de expresar propiedades geométricas y su interpretación.
- Desarrollar habilidades para traducir entre varias maneras de describir propiedades geométricas por medio de gráficas, palabras, una notación vectorial y una notación en un sistema coordenado.

1.1. Vectores

Has notado que, en los juegos de dispositivos electrónicos, películas animadas, el desplazamiento de los barcos, aviones y otros elementos donde se involucran la Velocidad, aceleración o fuerzas, están inmersos los vectores, los cuales tienen una inferencia directa en cada una de ellas. Podemos ver a los vectores de dos maneras: geométricamente o algebraicamente.

1.1.1. Punto de vista geométrico

A través de este video, observarás los elementos de un vector: dirección, sentido y módulo, llegamos a la mención que:

Geométricamente un vector se define por una *magnitud* y una *dirección*.

Elementos de un vector: dirección, sentido y módulo tomado de:

Estudiia (18 de febrero de 2013). Elementos de un vector: dirección, sentido y módulo [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=guk7RQY2rIY

La *magnitud* del vector $\boldsymbol{A}$ se denota como $|\boldsymbol{A}|$ o$\|\boldsymbol{A}\|$. En este contenido usaremos la notación $\|\quad\|$ para diferenciarlo del valor absoluto $|\quad|$. También se llama *longitud,* o *norma,* o *módulo*. Escalar un vector significa cambiar su longitud por un factor escalar. Por ejemplo,

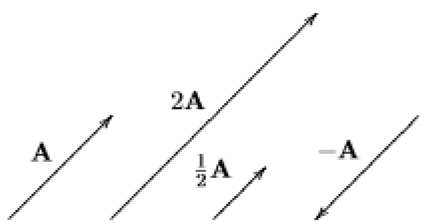


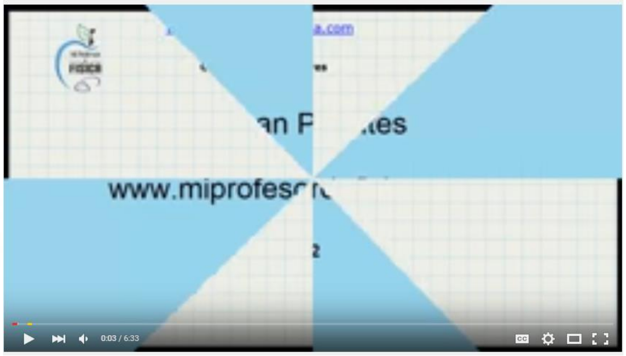
Figura 1. Vector y matrices

Como usamos números para escalar un vector nos referiremos a los números reales como *escalares*. En el video anterior mencionan un *sentido*, sin embargo éste puede estar dado simplemente por el signo del escalar que multiplica a un vector, que puede ser 1 o -1.

Para sumar vectores geométricamente se colocan extremo con inicio y en cualquier orden: Suma gráfica de vectores. De la misma manera se restan los vectores, sumando $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$, por ejemplo. Esta descripción de la suma es llamada *ley del paralelogramo*.

Figura 2. Vectores, determinantes y planos

Revisa el siguiente vídeo donde se explica estas dos operaciones:



Sumar vectores en física- Método gráfico tomado de:

Mi tutoría Virtual (12 de mayo de 2012). Suma de Vectores – Método Gráfico – Concepto Básico. [Archivo de Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=qvw7j9eKGdg

1.1.2. Punto de vista algebraico

Veamos ahora a los vectores desde el **punto de vista algebraico**. De manera convencional en un sistema de coordenadas etiquetamos al origen con O. En el plano $O = (0,0)$ y en el espacio $O = (0,0,0)$. En el plano XY colocamos el inicio de $\boldsymbol{A}$ en el origen y su extremo estará en el punto con coordenadas (a_1, a_2). De esta manera las coordenadas de la punta determinan al vector $\boldsymbol{A}$. Cuando dibujamos $\boldsymbol{A}$ en el origen nos referimos a él como un *vector en el origen*. Usando las coordenadas escribimos:

$$\boldsymbol{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$$

para diferenciarlo del punto (a_1, a_2), aunque en muchos textos se usa la misma notación para un punto y para un vector. La suma se representa gráficamente como sigue:

Figura 3. Suma de vectores

Los vectores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ tienen coordenadas $\boldsymbol{i} = \langle 1,0 \rangle$ y $\boldsymbol{j} = \langle 0,1 \rangle$, y se llaman vectores canónicos. También se usa la notación $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ y $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y en ocasiones puedes encontrarlos nombrados como $\boldsymbol{e_1}$ y $\boldsymbol{e_2}$ o $\overline{e_1}$ y $\overline{e_2}$. En el espacio los vectores canónicos son $\boldsymbol{i} = \langle 1,0,0 \rangle$, $\boldsymbol{j} = \langle 0,1,0 \rangle$ y $\boldsymbol{k} = \langle 0,0,1 \rangle$. Entonces un vector en el origen al punto (a_1, a_2) puede escribirse como $\langle a_1, a_2 \rangle = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$. Para $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$, a_1 y a_2 son escalares y se llaman *componentes* $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ de $\boldsymbol{A}$. El vector $\overrightarrow{\boldsymbol{P}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ es el vector del origen al punto P**.** A veces no se usa la flecha y simplemente se escribe en negrita: $\boldsymbol{P}$, es decir$\boldsymbol{P} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}}$.

Para los vectores $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ tenemos las siguientes reglas algebraicas.

Magnitud: $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$ (Teorema de Pitágoras).

Adición: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j}$, esto es $\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

Resta: $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (a_1 - b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 - b_2)\boldsymbol{j}$, esto es $\langle a_1, a_2 \rangle - \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

Escalar: $\lambda\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}(a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{\lambda}a_1\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\lambda}a_2\boldsymbol{j}$, esto es $\lambda\langle a_1, a_2 \rangle = \langle \lambda a_1, \lambda a_2 \rangle$

Las figuras conectan estas reglas al punto de vista geométrico.

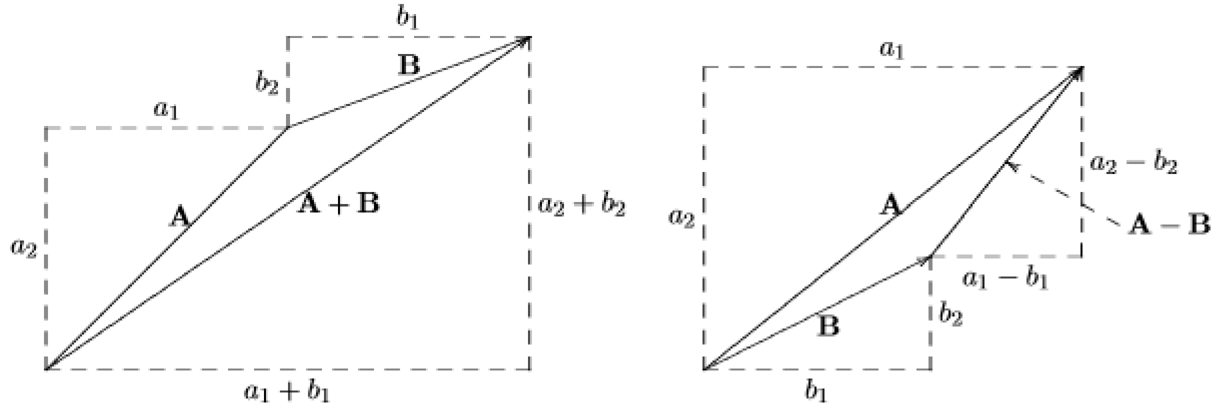


Figura 4. Vista Geométrica

1.1.3. Vectores en tres dimensiones

Análogamente, representamos un vector tridimensional como una flecha en el espacio. Usando coordinadas necesitamos tres números para representar al vector

$$\boldsymbol{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

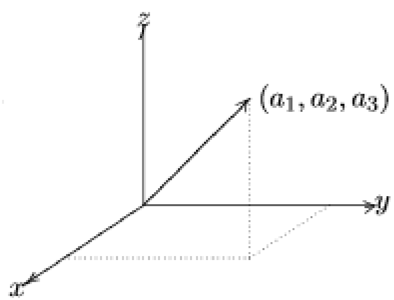


Figura 5. Representación del vector

Geométricamente nada cambia para los vectores en el espacio, se escalan y se suman exactamente como en el plano. Algebraicamente también es análogo, de manera que tenemos al vector

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

Para la suma de $\boldsymbol{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\boldsymbol{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ tenemos que $\langle a_1, a_2, a_3\rangle + \langle b_1, b_2, b_3\rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$. En cuanto a la magnitud, también se sigue del Teorema de Pitágoras:

$$\|a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}\| = \|\langle a_1, a_2, a_3\rangle\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Se puede ver en la siguiente figura que $r = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$ y $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{r^2 + {a_3}^2}$=$\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

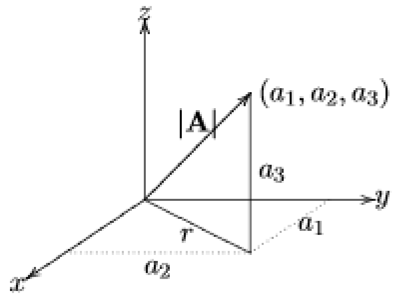
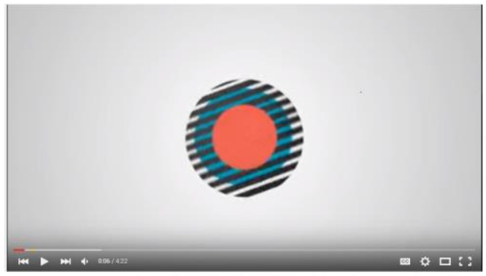


Figura 6. Representación de vectores

En el siguiente vídeo puedes ver que la *distancia entre dos puntos* en el espacio es lo mismo que el módulo del vector cuyos extremos son esos dos puntos y algunas propiedades de la distancia.



Distancia entre dos puntos en el espacio tomado de:

estudiia (7 de febrero de 2013). Distancia entre dos puntos en el espacio. [Archivo de video] YouTube.

https://www.youtube.com/watch?v=qLD3wWcF6eA

1.1.4. Vectores unitarios, tangentes y normales

Un vector *unitario* es cualquier vector con magnitud uno. Cuando queremos indicar que un vector es unitario usamos la notación que usamos para los vectores canónicos, que son unitarios: $\hat{\boldsymbol{u}}$. Cualquier vector puede reescalarse para ser unitario. Por ejemplo, el vector unitario paralelo a $\langle 3,4\rangle$ es $\frac{1}{5}\langle 3,4\rangle = \langle \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\rangle$, pues $\|\langle 3,4\rangle\| = 5$ y son paralelos pues tienen la misma dirección.

En general dos vectores son *paralelos* si son múltiplos escalares no nulos uno del otro y cualquier vector expresado como $\boldsymbol{A}/|\boldsymbol{A}|$ es un vector unitario.

Un vector es *tangente* o *normal* a una curva en un punto si es paralelo o normal a la recta tangente a la curva en ese punto.

Observa que todas estas definiciones pueden extenderse a n-adas ordenadas, es decir a elementos de $\mathbb{R}^n$, con n un número natural, un espacio cartesiano de dimensión n.

Hasta ahora hemos utilizado varias notaciones para un vector:

- Una letra mayúscula en negrita: $\boldsymbol{A}$

- Una letra mayúscula con una flecha arriba: $\vec{\boldsymbol{P}}$
- Una letra minúscula en negrita o con diéresis para los vectores unitarios: $\hat{\boldsymbol{u}}$

Pero también pueden utilizarse las siguientes notaciones:

- Una letra minúscula con una barra arriba o con una flecha: $\bar{u}$, $\vec{v}$
- Cualquiera de las anteriores con un subíndice, que es útil cuando operamos con más de dos vectores: $\boldsymbol{A_1}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1}}$, $\overline{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$.

1.2. Espacios y subespacios vectoriales

1.2.1. Espacio vectorial

En el ejemplo anterior, en la última operación estamos usando una propiedad que cumplen los espacios vectoriales. Aunque es posible que no estés familiarizado con este concepto, conoces varios ejemplos de espacios vectoriales.

1. En Física las fuerzas se representan con vectores como los definimos desde un punto de vista algebraico: [Vectores y magnitudes vectoriales](), la suma de dos vectores representa la fuerza resultante de aplicar dos fuerzas en distintas direcciones.

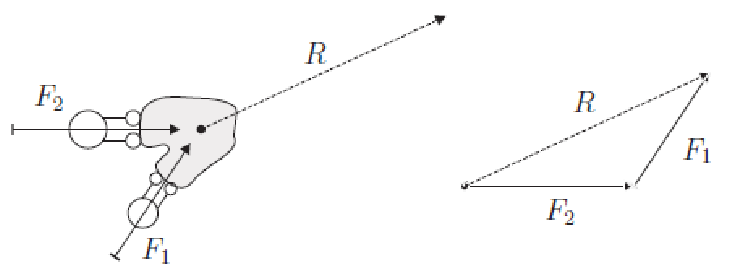


Figura 7. Fuerza resultante de dos fuerzas en distintas direcciones

2. Las funciones polinomiales pueden expresarse como la suma de funciones, por ejemplo: $f(x) = 4x^3 + x^2 - 8x$ puede descomponerse como la suma de las funciones $g(x) = 4x^3$, $h(x) = x^2$ y $i(x) = -8x$, es decir $f(x) = g(x) + h(x) + i(x)$.

3. Finalmente, como ya hemos mencionado, en geometría analítica estudiamos al plano y a los espacios cartesianos, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, como conjuntos de puntos cuyos subconjuntos son lugares geométricos expresados a través de una ecuación o una desigualdad, sin embargo también son espacios vectoriales. Los elementos del plano y del espacio son pares y triadas ordenados respectivamente, que se pueden sumar y multiplicar por escalares, y estas operaciones tienen un significado geométrico.

Estos tres ejemplos mostrados satisfacen las condiciones que cumple un conjunto para ser un espacio vectorial. Esta es su definición:

Un conjunto V, cuyos elementos llamaremos vectores, es un espacio vectorial si en el conjunto están definidas dos operaciones:

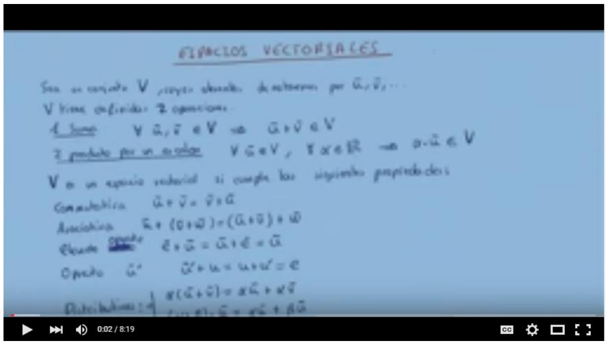
i. *Suma*, denotada por $+$, que asigna a dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ un nuevo vector $\bar{u} + \bar{v}$.

ii. *Producto por un escalar*, que asigna a un número real λ, llamado *escalar*, y aun vector $\bar{u}$ un nuevo vector denotado por $\lambda\bar{u}$.

Estas operaciones deben satisfacer las siguientes condiciones:

1. V es *cerrado bajo la suma*, es decir que la suma de dos vectores es un vector: siempre que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en V, $\bar{u} + \bar{v} \in V$,
2. *La suma es asociativa*, es decir que para cualesquiera tres elementos de V: $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{u_3} \in V$, $(\overline{u_1} + \overline{u_2}) + \overline{u_3} = \overline{u_1} + (\overline{u_2} + \overline{u_3})$
3. *Existe un elemento neutro*, es decir que para cualquier $\bar{v} \in V$, $\exists\, \bar{0} \in V$ tal que $\bar{0} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$
4. *Cada elemento en V tiene inverso* (respecto a la suma), es decir que para cada $\bar{v} \in V$ existe $-\bar{v} \in V$ tal que $-\bar{v} + \bar{v} = \bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

5. *La suma es conmutativa*, es decir que para cualesquiera $\overline{u_1}$ y $\overline{u_2} \in V$, $\overline{u_1} + \overline{u_2} = \overline{u_2} + \overline{u_1}$
6. V *es cerrado bajo el producto por un escalar*, es decir que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\bar{v} \in V$, $\lambda\bar{v} \in V$
7. *El producto por un escalar es distributivo con la suma*, es decir para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\overline{u_1}, \overline{u_2} \in V$, $\lambda(\overline{u_1} + \overline{u_2}) = \lambda\overline{u_1} + \lambda\overline{u_2}$
8. *El producto por un escalar distribuye la suma*, es decir que para cualquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\bar{v} \in V$,
   $(\lambda + \mu)\bar{v} = \lambda\bar{v} + \mu\bar{v}$.
9. El producto por escalares es asociativo, es decir que para cualquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\bar{v} \in V$, $\lambda\mu(\bar{v}) = \lambda(\mu\bar{v})$
10. Existe el neutro para el producto por un escalar: para cualquier $\bar{v} \in V$, $1\bar{v} = \bar{v}$



Espacios Vectoriales 1 tomado de:

Profesor10demates (20 de septiembre de 2012). Espacios vectoriales 1 que es un espacio vectorial. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=q6IQJA8qvok

Observa en el vídeo que los vectores, en términos de un elemento de un espacio vectorial, no necesariamente tiene como representación geométrica una flecha. Entonces la definición que dimos en la sección anterior se refiere a los vectores como elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

1.2.2. Subespacio vectorial

Hay subconjuntos propios del espacio vectorial que son en sí un espacio vectorial, ¿puedes pensar en algún ejemplo? ¿Los ejes coordenados constituyen cada uno un espacio vectorial? ¿Los planos XY, YZ y ZX son espacios vectoriales? Pero no cualquier subconjunto del espacio vectorial lo es, por ejemplo ¿una recta que no pasa por el origen puede ser un espacio vectorial? La respuesta es no, pues no tiene elemento neutro. ¿Un círculo o una parábola son espacios vectoriales?

Un subconjunto U del espacio vectorial V es un ***subespacio vectorial*** de V si U es en sí mismo un espacio vectorial bajo las operaciones de V.

Revisa el siguiente vídeo sobre ejemplos de subespacios vectoriales.

Ejemplos de subespacios vectoriales tomado de:

Tareasplus (10 de mayo de 2013). Ejemplos de subespacios vectoriales. Parte 1. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=z4-Ki7Bdh4w

Todas las condiciones que se cumplen para todo elemento de V son de por sí heredadas a U por ser un subconjunto de V, por lo tanto, para comprobar que un subconjunto de V es un subespacio vectorial sólo hay que comprobar dos condiciones:

1) U no es vacío, y
2) para cualquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en V, $\lambda\bar{u} + \mu\bar{v} \in U$.

Ya habíamos mencionado que dos vectores son *paralelos* si son múltiplos escalares no nulos uno del otro. De hecho cualquier subconjunto U formado por todos los múltiplos de un vector no nulo, es decir $U = \{\lambda\bar{u} | \bar{u} \neq \bar{0}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, constituye un subespacio vectorial de V:

- el vector $\bar{0}$ está en este conjunto si tomamos $\lambda = 0$ por lo que $\lambda\bar{v} = \bar{0}$ para todo $\bar{v} \in U \subset V$, además hay al menos un vector no nulo en el conjunto, del que todos los demás elementos son múltiplos.
- $\langle a, b, c\rangle$ es un vector en U, entonces un múltiplo de una combinación lineal de un elemento de U es $\alpha(\lambda\langle a, b, c\rangle) + \beta(\mu\langle a, b, c\rangle) = \alpha\lambda\langle a, b, c\rangle + \beta\mu\langle a, b, c\rangle = (\alpha\lambda + \beta\mu)\langle a, b, c\rangle \in U$ y que verifica la condición 2).

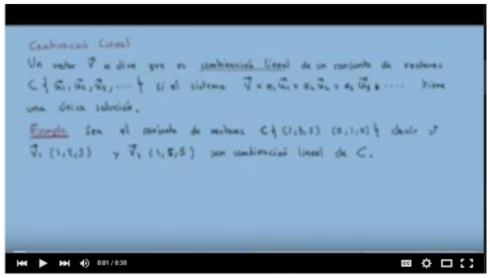
De hecho el conjunto U es una recta que pasa por el origen y podemos denotarla como $\mathcal{L}_{\langle a,b,c\rangle}$, pues está *generada* por este vector. Más adelante abundaremos más en el término *generar,* pero no pierdas de vista el hecho de que la recta es un espacio de dimensión uno.

1.2.3. Combinación lineal

La expresión $\lambda\bar{u} + \mu\bar{v}$ se llama combinación lineal de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$. En general:

> Una *combinación lineal* de vectores de V es un vector de la forma
> $$\lambda_1\overline{v_1} + \lambda_2\overline{v_2} + \cdots + \lambda_n\overline{v_n},$$
> donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $\overline{v_i} \in V$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

En este video puedes ver uno ejemplos relacionados a combinación lineal:



Espacios vectoriales 2 tomado de:

Profesor10mates (20 de septiembre de 2012). Espacios vectoriales 2 combinación lineal de vectores. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=pGwhr3j0Zx4

El conjunto de todas las combinaciones lineales de dos vectores no nulos y no paralelos $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$, es decir $U = \{\lambda\bar{u} + \mu\bar{v} | \bar{u}, \bar{v} \neq \overline{0}, \bar{u} \neq \alpha\bar{v}\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$:

- $U \neq \emptyset$ porque contiene dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, pues cuando $\lambda = 1$ y $\mu = 0$, $\bar{u} \in U$, y si $\lambda = 0$ y $\mu = 1$, $\bar{v} \in U$.
- Una combinación lineal de combinaciones lineales de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ es $\alpha(\lambda_1\bar{u} + \mu_1\bar{v}) + \beta(\lambda_2\bar{u} + \mu_2\bar{v})$ que también es una combinación lineal: $(\alpha\lambda_1\bar{u} + \alpha\mu_1\bar{v}) + (\beta\lambda_2\bar{u} + \beta\mu_2\bar{v}) = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)\bar{u} + (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)\bar{v}$ y por lo tanto también es un elemento del conjunto U.

El conjunto U de hecho es un plano que pasa por el origen, y podemos denotarlo por $\mathcal{P}_{\bar{u},\bar{v}}$ pues está generado por estos dos vectores.

1.2.4. Independencia lineal

Ya vimos dos ejemplos en los que todas las combinaciones lineales de un vector y de dos vectores generan un espacio de una dimensión y de dos dimensiones respectivamente. De hecho esto siempre ocurre si los vectores cumplen estas condiciones: los vectores son no nulos y no son paralelos entre sí, entonces estos vectores generan un espacio cuya dimensión es el número de vectores no paralelos de los que se toma la combinación lineal. Es decir que el conjunto

$$\mathcal{A} = \{\lambda_1\overline{v_1} + \lambda_2\overline{v_2} + \cdots + \lambda_k\overline{v_k} | \overline{v_i} \neq \overline{0}, \overline{v_i} \neq \alpha\overline{v_j}\ \forall\alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \forall\, i,j = 1,2,3,\ldots,k, \text{con } \lambda_i \in \mathbb{R}, k < n\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión *k* y está generado por $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_k}$.

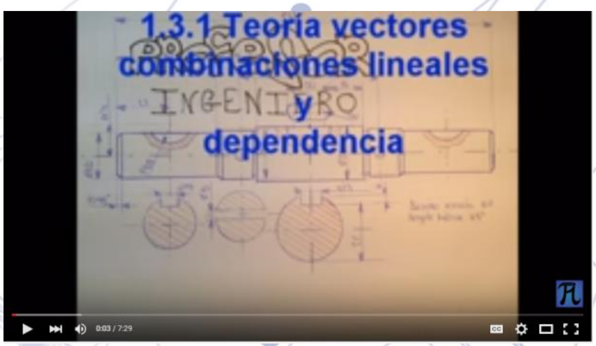
Se dice que un conjunto de vectores **no** paralelos forman un conjunto *linealmente independiente*. Veamos la definición:

Un subconjunto $U = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_m}\}$ de un espacio vectorial V es *linealmente independiente* si para que se cumpla la igualdad $\lambda_1\overline{v_1} + \lambda_2\overline{v_2} + \cdots + \lambda_m\overline{v_m} = \overline{0}$ tiene que pasar que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$, es decir que todos los coeficientes en la combinación lineal de los vectores son cero.

Esto es equivalente a decir que

- U es linealmente dependiente si pasa que $\lambda_1\overline{v_1} + \lambda_2\overline{v_2} + \cdots + \lambda_m\overline{v_m} = \overline{0}$ y al menos uno de los coeficientes es igual a 0, $\lambda_i = 0$ para algún i.
- ninguno de los vectores en el conjunto se puede representar como una combinación lineal de los restantes.

El siguiente vídeo te muestra algunos ejemplos sobre combinación lineal, específicamente sobre dependencia e independencia lineal.



Combinación lineal tomado de:

Professor.ingeniero (17 de septiembre de 2012). 3.1. Combinación lineal: dependencia e independencia lineal. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=hEwMcCd-57o

Un conjunto que es linealmente independiente y que genera un espacio vectorial se llama *base*. La *base canónica* (formada por vectores de magnitud uno) de $\mathbb{R}^3$ es $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$. Esta base además es *ortogonal*, pues los vectores que la conforman son perpendiculares. Una base que es ortogonal y sus elementos son unitarios es una *base ortonormal*:

El siguiente vídeo muestra de manera gráfica lo mostrado en la definición.

Base vectorial tomado de:

Professor.ingeniero (18 de septiembre de 2012). 4.1. Base Vectorial. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=QWFk9nT5fBk

1.3. Productos

En $\mathbb{R}$ podemos definir una suma y un producto entre sus elementos, y estas operaciones tienen sus operaciones inversas, restar y dividir. En espacios vectoriales también definimos una suma, sin embargo el producto no es un producto entre sus elementos sino entre un escalar, es decir un número real, y los elementos del conjunto. Sin embargo podemos definir algunos productos entre vectores de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$, aunque no cumplen con todas las propiedades del producto en un campo.

1.3.1. Producto punto

El *producto punto,* o *producto escalar,* entre los vectores $\bar{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\bar{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ está dado por

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Observa que las entradas de esta operación son vectores y la salida es un escalar. Si aplicamos la ley de los cosenos al siguiente triangulo, en el que $\bar{w} = \bar{u} - \bar{v}$, obtenemos:

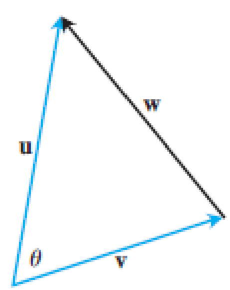


Figura 8. Producto punto o escalar

$\|\bar{w}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\|\bar{u}\|\|\bar{v}\| \cos\theta$, entonces $2\|\bar{u}\|\|\bar{v}\| \cos\theta = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\,\|^2 - \|\bar{w}\|\,^2$. Como $\|\bar{u}\|^2 = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_2}^2}^2$ y análogamente para $\|\bar{v}\,\|^2$ y $\|\bar{w}\|\,^2$, donde las coordenadas de $\bar{w}$ están dadas por $\langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$, desarrollando y simplificando obtenemos que

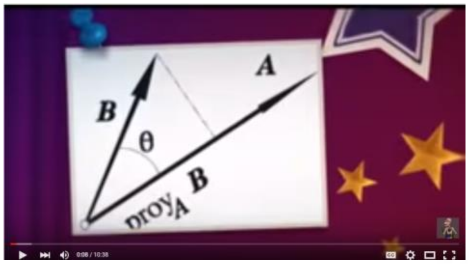
$\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - \|\bar{w}\|^2 = 2(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)$

y por lo tanto $\|\bar{u}\|\|\bar{v}\| \cos\theta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \bar{u} \cdot \bar{v}$

Es decir

$$\boldsymbol{\bar{u} \cdot \bar{v}} = \|\bar{u}\|\|\bar{v}\| \, \mathbf{cos}\, \boldsymbol{\theta}$$

Revisa los siguientes vídeos que te ayudarán a profundizar sobre los temas que has revisado.



Producto escalar o producto punto tomado de:
Canal Mistercinco (20 de septiembre de 2013). Producto escalar o producto punto. Vectores (1/5) matemáticas Mistercinco. [Archivo de video] YouTube.
https://www.youtube.com/watch?v=8OEllQgiyNI

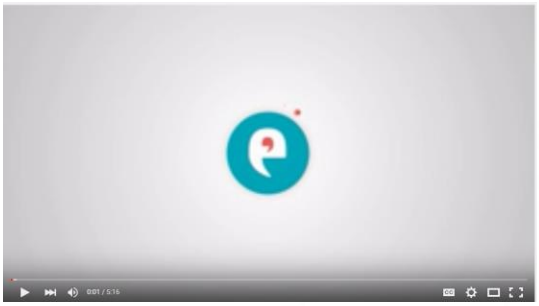
Producto escalar de dos vectores en el espacio tomado de:
Estudiia (20 de enero de 2013). Producto escalar de dos vectores en el espacio. Propiedades. [Archivo de video] YouTube.
https://www.youtube.com/watch?v=bAxlqrEhHeY

Vectores en el espacio | ejercicio 3. tomado de:
Estudiia (2o de enero de 2013). Vectores en el espacio | ejercicio 3. Producto escalar. Propiedades. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=2PJDDsLqRDc

Observa que de esta expresión podemos deducir el ángulo entre dos vectores:

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|}\right)$$

En el siguiente vídeo puedes ver algunas observaciones sobre la expresión que dimos.



Ángulos entre dos vectores tomado de:

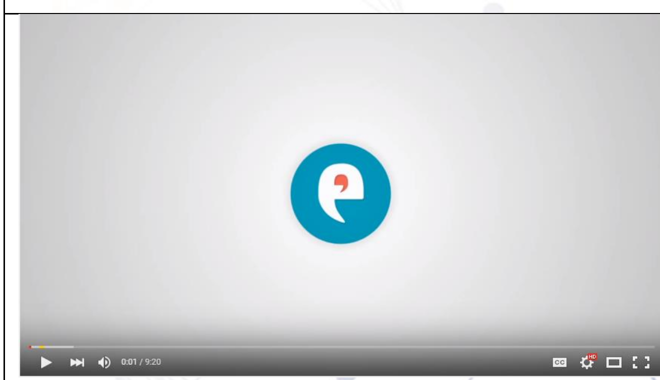
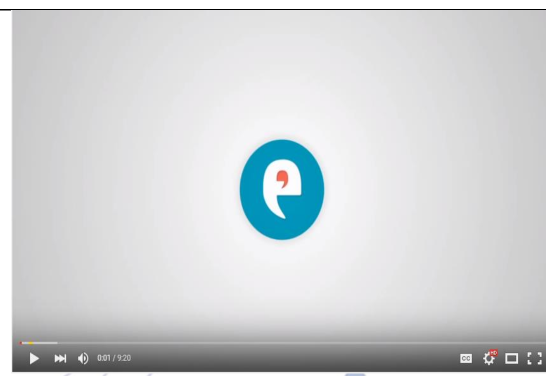
Estudiia (2o de enero de 2013). Ángulo entre dos vectores en el espacio. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=gB6Q7rxM3d0

de entre las cuales vale la pena mencionar la siguiente:

El producto escalar de dos vectores no nulos resulta cero si y sólo si estos dos *vectores* son *ortogonales*, es decir que el ángulo entre ellos es de $\pi/2$.

Puedes verificar esto a partir de la segunda definición, pues $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Los siguientes ejemplos que se muestran en los videos

 Vectores en el espacio | ejercicio 10. tomado de: Estudia (20 de enero de 2013). Vectores en el espacio | ejercicio 10. Ángulos entre dos vectores en el espacio. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=FjwSKiQ2uIM	Condiciones de paralelismo o perpendicularidad de vectores en el plano  Vectores paralelos y perpendiculares tomado de: Estudiia (18 de febrero de 2013). Vectores paralelos y perpendiculares entre sí. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=r_J5z6gAMzE
 Vectores paralelos, punto medio, puntos alineados en el espacio tomado de: Estudiia (20 de enero de 2013). Vectores paralelos, punto medio, puntos alineados en el espacio. [Archivo de video] YouTube.	 Vectores en el espacio | ejercicio 9 tomado de: Estudiia (20 de enero de 2013). Vectores en el espacio | ejercicio 9. Vectores paralelos, punto medio y puntos alineados. [Archivo

https://www.youtube.com/watch?v=Gq3fyrZt2yw	de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=FQwE5x1CkNw

En estos videos se ha mencionado el concepto de *proyección*. En este video puedes ver la definición y un ejemplo de la Proyección ortogonal de vectores en el plano. Un caso particular es la proyección de un vector en el origen sobre el eje X o sobre el eje Y, o más precisamente sobre los vectores canónicos $\boldsymbol{i}$ o $\boldsymbol{j}$, que tienen módulo 1. Además esto se puede generalizar a vectores en el espacio, donde la *proyección* de un vector sobre otro puede interpretarse como la fuerza efectiva en la dirección de $\boldsymbol{v}$ si el vector representa una fuerza $\boldsymbol{F}$.

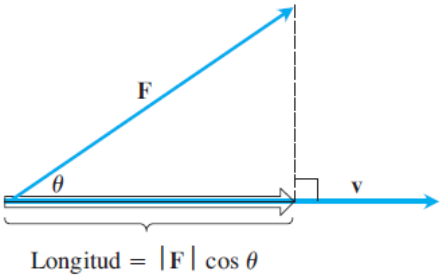


Figura 9. Fuerza F

Entonces

$$proj_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{F}\|\cos\theta = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

Finalmente puedes ver una aplicación importante del producto escalar en:

Trabajo producido por una fuerza tomado de

Canal Mistercinco (26 de septiembre de 2013). Trabajo producido por una fuerza. Producto escalar. Vectores (3/5) matemáticas Mistercinco. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=uqT0Wc4lgt4

1.3.2. Producto cruz

El producto punto está definido para vectores en $\mathbb{R}^2$ de la misma manera que como lo hicimos para vectores en $\mathbb{R}^3$. Por el contrario, el producto cruz, o producto vectorial sólo está definido para vectores en $\mathbb{R}^3$. Para definirlo veamos antes un concepto necesario para ello, el de determinante.

Un *determinante de* 2×2 se denota y se define por:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Un *determinante de* 3×3 se denota y se define por:

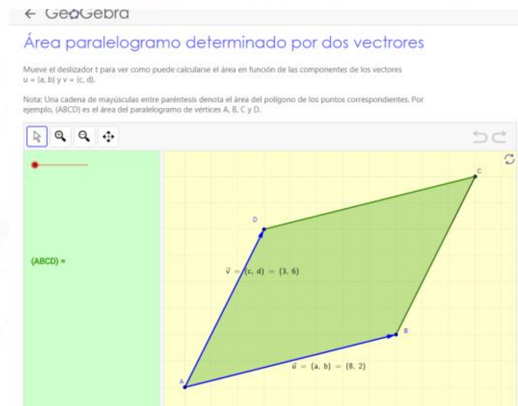
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Para profundizar en el tema de determinantes, revisa los recursos interactivos, páginas web y un vídeo.

Determinantes 3x3

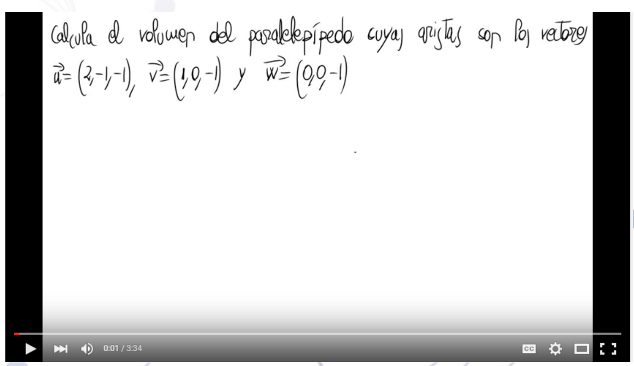
No profundizaremos más en el tema además de mencionar una propiedad geométrica de cada uno de estos determinantes:

El determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ expresa el área del paralelogramo generado por los vectores $\langle a, b \rangle$ y $\langle c, d \rangle$.



Área paralelogramo determinado por dos vectores

- El determinante $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ expresa el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\langle c_1, c_2, c_3 \rangle$. Puedes ver un ejemplo en



Volumen del paralelepípedo tomado de:

Lasmatemáticas.es (5 de agosto de 2009). Volumen del paralelepípedo con aristas tres vectores. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=lYoWG9SNe14

El *producto cruz*, o *producto vectorial* asocia a dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en $\mathbb{R}^3$ un nuevo vector $\bar{u} \times \bar{v}$ de la siguiente manera:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \times \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle$$

Observa que

$$\langle u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1\rangle = \hat{\boldsymbol{\imath}}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \hat{\boldsymbol{k}}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Mira sus propiedades y algunas observaciones en Producto vectorial de dos vectores en el espacio. Propiedades. Este determinante también tiene una interpretación geométrica, es el área del paralelogramo determinado por los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$. Veamos un ejemplo en Área de un paralelogramo formado por dos vectores.

Hay una última propiedad que no se muestra en el video y es la siguiente:

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\|\|\bar{v}\||sen\ \theta|$$

que se comprueba utilizando la siguiente identidad: $sen^2\theta = 1 - cos^2\theta = 1 - \left(\frac{(\bar{u}\cdot\bar{v})^2}{\|\bar{u}\|^2\|\bar{v}\|^2}\right)$.

En Vectores en el espacio | ejercicio 5. Producto vectorial se comprueban las propiedades del producto vectorial con vectores específicos.

1.3.3. Triple producto escalar

El triple producto escalar de tres vectores $\bar{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\bar{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\bar{w}\langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ en $\mathbb{R}^3$ se define y se denota como sigue:

$$[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] = \bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

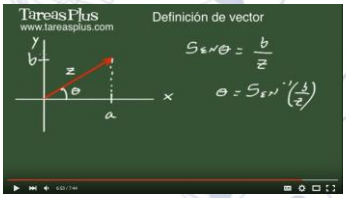
El triple producto escalar también es nombrado *producto mixto*. En Producto mixto de tres vectores en el espacio puedes ver una interpretación geométrica, que de hecho ya habíamos mencionado antes. Finalmente puedes ver sus propiedades en Producto mixto en el espacio: propiedades. Podemos agregar una propiedad a las cuatro explicadas en el video anterior, que sería que el producto mixto expresa el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\bar{u}, \bar{v}$ y $\bar{w}$. Puedes ver un ejercicio resuelto de cómo calcular el producto mixto dados tres vectores en Vectores en el espacio | ejercicio 7. Producto mixto.

Cierre de la unidad

En esta unidad hemos estudiado los espacios vectoriales y sus propiedades, los elementos que los conforman llamados vectores y algunas operaciones que se pueden hacer entre ellos. Es importante saber y conocer las operaciones que se pueden realizar con vectores así como sus propiedades, conocer las demostraciones correspondientes a las propiedades de los vectores y los escalares. El espacio vectorial es un concepto sencillo pero con mucha utilidad, los espacios vectoriales son la base para el estudio del álgebra lineal y el cálculo vectorial.

Aprendo observando

Estos videos son complementarios. Puedes ver los subtítulos presionando sobre el icono CC. Tomados de Soporte Vital México (2013), mapacheplus (2008), Tareasplus(2011) y estudiia (2011). (Archivos de vídeo) recuperados de:

 **¿Qué es un Frente Frío?** Soporte Vital México (26 de diciembre de 2013). ¿Qué es un frente frío? [Video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=egTRnzrwCFk 	 **La revolución matemática** Mapacheplus (12 de septiembre de 2011). La revolución matemática. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=RnW7mH6jSEM

Definición de vector Tareasplus (17 de diciembre de 2012). Definición de vector. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=wPQcA42XwGk	

Listas de reproducción:

Geometría en el plano: vectores, rectas y cónicas. (Primeros doce: teoría, ejemplos y ejercicios).

- Estudiia (2013). Geometría en el plano: vectores, rectas y cónicas. [Videos] YouTube playlist. https://www.youtube.com/playlist?list=PLVEkI8DcwbMtXW1Ug8HklcTKLzoiDVn2F

Geometría en el espacio: vectores, rectas, planos, posiciones relativas y propiedades. (Primeros quince).

- Estudiia (2013). Geometría en el espacio: vectores, rectas, planos, posiciones relativas y propiedades. [Videos] YouTube Playlist. https://www.youtube.com/playlist?list=PLVEkI8DcwbMs2AUWHRKg3dqcJM4-7I9-i

Fuentes de consulta

- Auroux, D. (2010). *18.02SC Multivariable calculus* [Curso en línea]. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. https://ocw.mit.edu.
  (Licencia Creative Commons BY-NC-SA)

- Khan Academy. (2010). *Multivariable calculus* [Curso en línea]. https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus

- Thomas, G. (2005). *Cálculo: Varias variables*. México: Pearson Educación.