



Matemáticas

Cálculo de varias variables I

Semestre 3

Unidad 3. Función de varias variables

Clave

05142419

Universidad Abierta y a Distancia de México





Índice

<i>Unidad 3. Funciones de varias variables</i>	3
<i>Presentación de la unidad</i>	3
<i>Competencia específica</i>	4
<i>Logros</i>	4
<i>3.1. Gráficas y curvas de nivel</i>	4
<i>3.2. Derivadas parciales</i>	9
<i>3.3. Regla de la cadena, Gradiente y Derivadas direccionales</i>	24
<i>Material de apoyo</i>	33
<i>Aprendo observando</i>	34
<i>Aprendo haciendo</i>	35
<i>Aprendo leyendo</i>	35
<i>Cierre de la unidad</i>	35
<i>Fuentes de consulta</i>	36



Unidad 3. Funciones de varias variables

Presentación de la unidad

En el video [Algebra 18 - Multivariable Functions](#) puedes ver un recordatorio del concepto de función real de variable real y su extensión al concepto de función de varias variables, así como sus respectivos dominios y rangos. ¿Por qué funciones de varias variables? Cuando se trata de modelar fenómenos, ya sea naturales, físicos, sociales o de cualquier índole, el cálculo de una variable resulta restrictivo, pues los fenómenos no dependen casi nunca de una única variable, a menos que lo que se quiera modelar es un movimiento, como vimos en la unidad 2. Algunos ejemplos de modelos con funciones que dependen de más de una variable son los siguientes:

1. La variación de la temperatura en una amplia región de la Tierra con una función que depende la longitud y de la latitud y cuya salida sea la temperatura (un número real). Puedes darte una mejor idea de la dependencia de la temperatura de estas variables viendo el video [Las variaciones de temperatura](#). Podemos denotar a esta función por $T = f(Lo, La)$.
2. Muchos anuncios en la red están diseñados a partir de un análisis del uso que se hace de ella. Para predecir el comportamiento de los usuarios de la red puede utilizarse una función que puede depender de miles de variables, por ejemplo la edad, la ubicación (coordenadas), el número de veces que los usuarios dan clic en ciertos enlaces, etc. A diferencia del ejemplo anterior, donde la salida de la función es un número, en este caso puede estar compuesta de varias variables, como la probabilidad de dar clic en ciertos enlaces, o la probabilidad de que compren ciertos artículos, etc.

Sabemos que para estudiar el comportamiento de una función es necesario estudiar su derivada, es decir su razón de cambio. En el caso de los ejemplos anteriores, las razones de cambio pueden referirse a cómo cambia la temperatura conforme se cambia de ubicación en la región en cuestión, o qué tanto cambia el comportamiento de un usuario cuando cambia algún aspecto de un sitio en la red. En el cálculo de varias variables describiremos cambios en diferentes direcciones y cómo se relacionan estos cambios entre sí.



En esta unidad estudiaremos funciones que dependen de más de una variable y tienen como salida un único número real, así como su gráfica y su derivada. Para esto último es necesario estudiar algunos conceptos que nos permitirán definir el concepto de derivada de manera formal.

Competencia específica

Utilizar funciones de varias variables en la resolución de problemas y en la modelación de fenómenos mediante la derivación de orden superior.

Logros

- Desarrollar la habilidad de hacer la gráfica de una función de varias variables e interpretarla.
- Desarrollar la habilidad de interpretar el comportamiento de una función de varias variables a partir del estudio de sus derivadas parciales.
- Analizar todos los aspectos relevantes de una función de varias variables para determinar su comportamiento.

3.1. Gráficas y curvas de nivel

Funciones de varias variables

En geometría analítica ya has estudiado ejemplos de funciones de varias variables, aunque vistas como una ecuación. Por ejemplo, la ecuación de un paraboloides $z = x^2 + y^2$ puede verse como una función que determina la altura del paraboloides para cada par de números x y y : $f(x, y) = x^2 + y^2$.

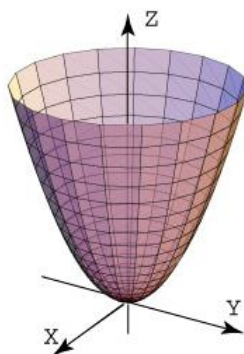


Ilustración 1. Superficies cuadráticas

En física puedes encontrar muchos ejemplos en las fórmulas, pues se obtiene un número real para distintos valores de los parámetros que conforman dicha fórmula, por ejemplo la primera ley de la Termodinámica que ya viste explicada en [Las Leyes de la Termodinámica en 5 Minutos](#): $U = Q - W$, donde U es la energía interna del sistema (medida en Joules, J), Q es el calor y W es el trabajo intercambiados por el sistema. Entonces podemos ver a la energía interna como una función que depende del calor y del trabajo.

Puedes ver otro ejemplo ya conocido en el video [Funciones de Varias Variables Parte 1](#), así como la explicación del concepto de función de dos variables cuya salida está en los números reales, de su dominio como subconjunto del plano cartesiano, de su imagen como subconjunto de los números reales y finalmente un ejemplo de cómo obtener y graficar el dominio de una función de este tipo (para ver este último ejemplo completo mira [Funciones de Varias Variables. Parte 2](#)). La definición formal de una función de varias variables es la siguiente:

Supongamos que D es un conjunto de n -adas de números reales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es decir $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Una **función de valores reales** f sobre D es una regla que asigna un número real

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a cada elemento de D .



El conjunto D es el **dominio** de la función. El conjunto de valores w tomados por f es el **rango** de la función. w es la variable dependiente o variable de salida de la función f , y se dice que f es una función de las n variables independientes x_1 a x_n , llamadas también variables de entrada de la función.

Gráficas y curvas de nivel de funciones de dos variables

La gráfica es la manera más familiar de visualizar una función. Recordemos cómo funciona la gráfica para una función de una sola variable. Tomemos por ejemplo $f(x) = 2x$. Para graficar una entrada, por ejemplo $x = 1$, primero calculamos $f(1) = 2$ y marcamos el punto $(1, f(1))$, es decir el punto $(1, 2)$, en el plano xy . O sea que cuando tenemos una función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, su gráfica es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

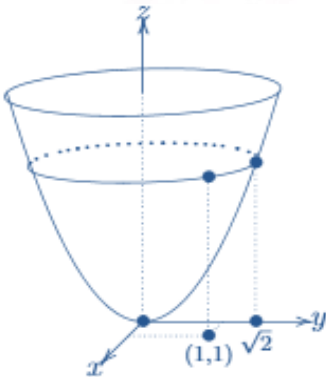


Ilustración 2. función del paraboloid

Análogamente, como nos sugiere el ejemplo del paraboloid, la gráfica de una función con una entrada de dos dimensiones y una salida de una dimensión, o sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, requiere un espacio de tres dimensiones para su gráfica ($\mathbb{R}^3$), pues tenemos que $z = f(x, y)$ es su altura, también llamada la dirección z . Asociar entradas y salidas requiere tres números:

Entrada (x, y)	Salida $f(x, y)$
$(0, 0)$	0
$(1, 1)$	1
$(0, \sqrt{2})$	2
$\vdots$	$\vdots$

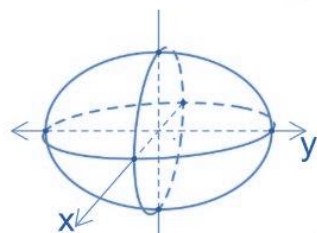
Para representar estas asociaciones usando una gráfica, graficamos puntos en tres dimensiones. La asociación $(0, 0) \rightarrow 0$ está graficada con el punto $(0, 0, 0)$. La asociación $(1, 1) \rightarrow 1$ está graficada con el punto $(1, 1, 1)$. La asociación $(0, \sqrt{2}) \rightarrow 2$ está graficada con el punto $(0, \sqrt{2}, 2)$.

En general se pretende graficar todos los puntos de la forma $(x, y, f(x, y))$ para algún par de números x y y . En el [Rotating 3d graph with xy-plane](#) puedes ver la gráfica de la función $f(x, y) = (x - 2)^2 +$

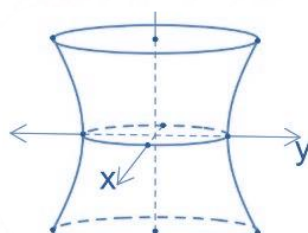


$(y - 2)^2 + 2$, un parabolide con centro en $(2,2,2)$. Entonces, una manera de graficar una función de dos variables es trazar la superficie $z = f(x, y)$ en el espacio.

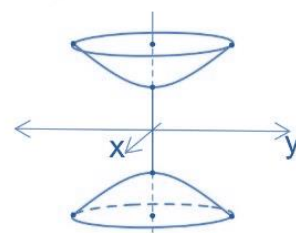
En el ejemplo anterior tenemos sólo tres puntos, de ninguna manera es suficiente para dibujar toda la gráfica, sin embargo tenemos la experiencia adquirida en geometría analítica para reconocer la superficie. te presentamos una galería de algunas Superficies cuadráticas.



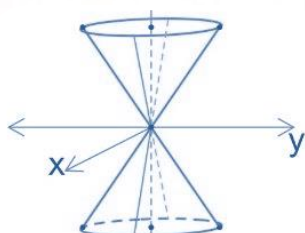
Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



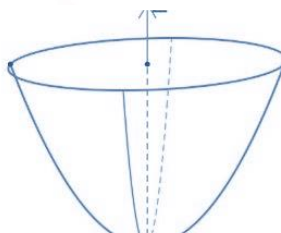
Hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



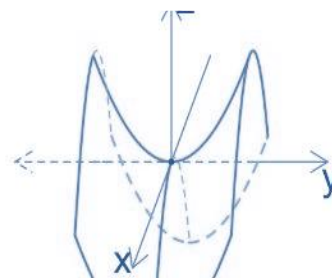
Hiperboloide de dos hoja $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Cono elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



Paraboloides elíptico $ax^2 + by^2 = z$



Hiperboloide parabólico $z = by^2 - ax^2$

¿Qué hacemos cuando no se trata de una superficie conocida? Por ejemplo la gráfica de la función $f(x, y) = \cos x \sin y$ o la de $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

Hay otra manera de visualizar una función $f(x, y)$, que es dibujando curvas en el dominio generadas cuando f tiene un valor constante, es decir $f(x, y) = c = z$. Por ejemplo, para nuestro ejemplo del paraboloides podríamos dibujar una traza¹ con $z = 3$. Esto es un círculo de radio $\sqrt{3}$. Las trazas donde z es igual a una constante son generalmente llamadas *curvas de nivel* cuando las dibujamos sobre el dominio de la función, es decir en el plano xy . Si la dibujamos a la altura $z = 3$ las llamamos *líneas de contorno*. Es

¹ Recuerda que una traza es la curva que se genera por la intersección de un lugar geométrico con algún plano.



una distinción que no todo mundo hace y puede ser que encuentres muchos recursos en donde no la hacen, lo cual no es un problema mientras lo tengas claro.

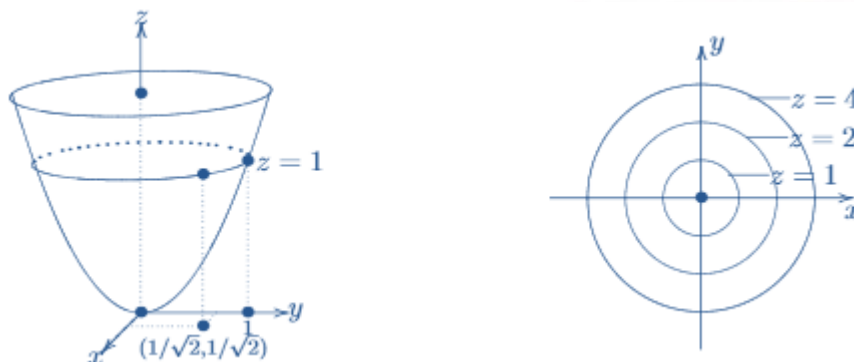


Ilustración 3. Curvas y contornos

En esta gráfica se dibujó una curva de contorno a la altura $z = 1$, y se dibujaron curvas de nivel a las que se "etiquetó" con su valor en z . En el video [Gráficas y curvas de nivel](#) puedes ver dos ejemplos de curvas de nivel de una superficie. Mira la sección *Aprendo observando* al final de la unidad, donde te sugerimos otros videos.

Ya que mencionamos las trazas, hay otra traza que puede ser útil para nuestro ejemplo del paraboloide: tomamos x igual a una constante, por ejemplo $x = 0$, que resulta ser una parábola en el plano yz que abre hacia arriba con vértice en el origen. En este ejemplo es suficiente con tomar esta traza y la curva de nivel o la línea de contorno, pero para otras gráficas podemos tomar también la traza cuando y es igual a una constante, e incluso podemos tomar las trazas dándole a x , y y z distintos valores de manera que nos quede lo suficientemente claro el comportamiento de la gráfica y por lo tanto de la función.

Podemos extender este método a funciones de más de dos variables, por ejemplo $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. La gráfica de esta superficie está en un espacio de dimensión cuatro, pues $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, por lo que es imposible visualizarla, y al igualar las variables a una constante resultarán superficies y no

² La gráfica de la función $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, donde $f(x, y) = (x^2, y^2)$ también estaría en un espacio de dimensión cuatro, pero no estudiaremos funciones con más de una variable de salida en esta unidad.



curvas. En el caso de igualar $w = f(x, y, z)$ a una constante, le llamamos *superficies de nivel*. En el ejemplo serían esferas:

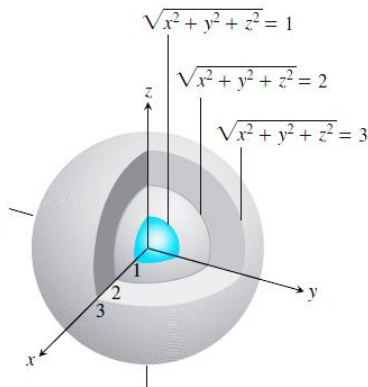


Ilustración 4. Radio de esfera Thomas, G. (2005). *Cálculo. Varias variables*. México. Pearson Educación

El radio de la esfera aumenta mientras nos alejamos del origen, por lo que el valor de la función cambia si nos movemos de una esfera a otra. La dirección en la que nos movemos es importante, como veremos más adelante.

3.2. Derivadas parciales

Para funciones de una variable la derivada $\frac{df}{dx}$ puede interpretarse como sigue: dx puede interpretarse como "un cambio en x " tan pequeño como se quiera, y df puede interpretarse como "un pequeño cambio en la salida de f ", que depende del cambio en x . La variable sólo cambia en una dirección, el eje x . ¿Cómo funciona para funciones de más de una variable? Digamos que tenemos una función de dos variables $f(x, y)$. Podemos considerar la misma expresión $\frac{df}{dx}$ e interpretarla de la misma manera, sin embargo no se está considerando que hay otra variable de entrada y . El espacio de las entradas de la función tiene múltiples variables, por lo que podemos cambiar la entrada en varias direcciones. Si re interpretamos df como el "pequeño cambio de la función" que provoca el cambio dy , tendríamos una derivada distinta: $\frac{df}{dy}$.

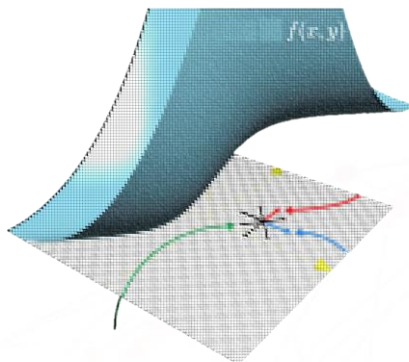


Ilustración 5, representación gráfica

Ninguna de estas derivadas nos dice cómo cambia $f(x, y)$ globalmente cuando cambia su entrada (compuesta de dos variables), así que las llamamos *derivadas parciales*. Para enfatizar la diferencia entre la derivada usamos el símbolo ∂ reemplazando a d . En el video [Derivada Direccional](#) puedes ver que la derivada parcial es un caso particular y además algunos conceptos que veremos a lo largo de esta unidad que requieren el cálculo de las derivadas parciales de una función.

Veamos un ejemplo. Consideremos la función $f(x, y) = x^3 y^2$. Evaluemos $\frac{\partial f}{\partial x}$, la derivada parcial de f con respecto a x en la entrada $(2, 3)$. De acuerdo a lo anterior esto es calcular la razón a la que cambia f conforme cambia ligeramente la componente x de la entrada, tal vez moviéndose de $(2, 3)$ a $(2.01, 3)$. Como sólo nos interesa el movimiento en la dirección x , podemos considerar el valor y constante. De hecho, podemos sólo calcular $y = 3$ antes de calcular la derivada: $f(x, y) = x^3 3^2 = 9x^3$. De esta manera, preguntarse cómo cambia f para un pequeño cambio en x es sólo una derivada ordinaria de una variable:

$$\frac{d}{dx} f(x, 2) = \frac{d}{dx} (9x^3) = 27x^2.$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(3, 2) = 27x^2|_3 = 243$$

Podemos hacer lo mismo sin pre evaluar y , pero tratándola como una constante:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 y^2) = 3x^2 y^2$$



Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x} f(3, 2) = 243$, el mismo resultado que antes.

¿Cómo se ve esto geoméricamente? En [Partial derivatives](#) (subtitulado) se hace un recordatorio cómo se define una función de dos variables y de cómo se ve su gráfica, así como del sistema de coordenadas cartesianas de tres dimensiones. Además, da una explicación del concepto de derivada parcial a partir de un ejemplo particular. El ejemplo continuo en [Partial derivatives 2](#).³

El siguiente es un enlace a un ejemplo para graficar funciones de dos variables: [Functions of Two Variables](#). Este ejemplo te permite visualizar funciones de dos variables para graficar. Puedes visualizar las curvas de nivel y las derivadas parciales.

Derivada parcial, definición y notación

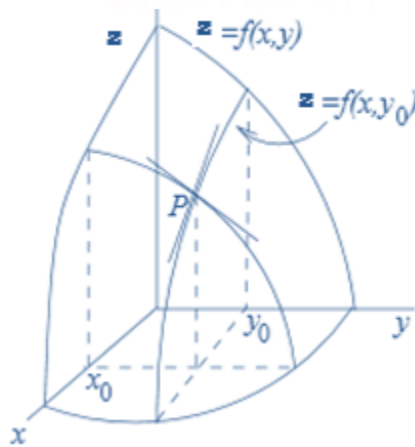


Ilustración 6. Derivada parcial

Recapitulando, tenemos una función de dos variables $z = f(x, y)$. Su gráfica es una superficie en el espacio xyz . Fijamos el valor $y = y_0$ y sólo variamos x . Obtenemos una función de una variable $z = f(x, y_0)$, la *función parcial* para $y = y_0$. Su gráfica es una curva en el plano vertical $y = y_0$, cuya pendiente en el punto P donde $x = x_0$ está dada por la derivada $\frac{d}{dx} f(x, y_0) \Big|_{x_0}$, o $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}$, la **derivada parcial** de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) .

Otras notaciones para la derivada parcial de f con respecto a x

son:

$$f_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_0.$$

La primera es más práctica y conveniente para especificar el punto; la segunda es común en ciencia e ingeniería, donde sólo se trata de las relaciones entre las variables y no se menciona la función explícitamente; la tercera y la cuarta indican el punto usando un solo subíndice.

³ Puedes ver estos videos doblados al español en [Derivadas parciales](#) y [Derivadas parciales 2](#).



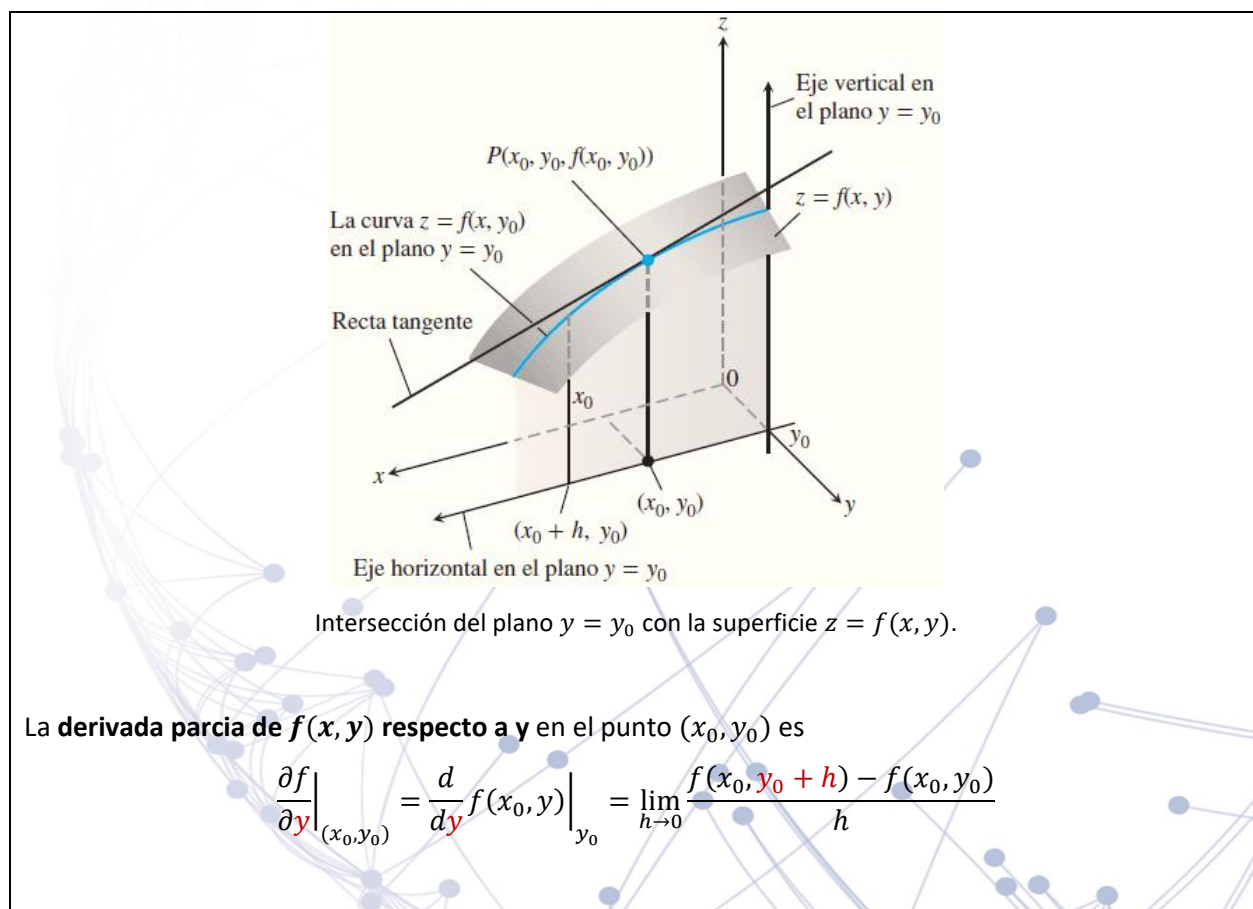
Análogamente, si fijamos $x = x_0$ y sólo variamos y , obtenemos una la *función parcial* para $w = f(x_0, y)$ cuya gráfica es una curva en el plano vertical $x = x_0$, y cuya pendiente en P es la **derivada parcial** de f con respecto a y en el punto (x_0, y_0) . $\frac{d}{dy} f(x_0, y) \Big|_{y_0}$, o $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}$. Otras notaciones son

$$f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_0.$$

Escrita como $\frac{\partial z}{\partial x}$ la derivada parcial nos da la razón de cambio de z con respecto únicamente a x , en el punto (x_0, y_0) : nos dice qué tan rápido cambia w conforme cambia x , cuando y se mantiene constante.

Para funciones de tres o más variables, $z = f(x, y, z, \dots)$, ya no podemos hacer gráficas, pero la idea detrás de la diferenciación parcial es la misma: $\frac{d}{dx} f(x, y_0, z_0, \dots)$ o $\frac{\partial f}{\partial x}$.

De manera más formal definimos las derivadas parciales como sigue:





siempre que este límite exista.

Para una función de más de dos variables sería algo casi idéntico:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0, \dots) = \frac{d}{dy} f(x_0, y, z_0, \dots) \Big|_{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0, \dots) - f(x_0, y_0, z_0, \dots)}{h}$$

y así sucesivamente para las demás variables.

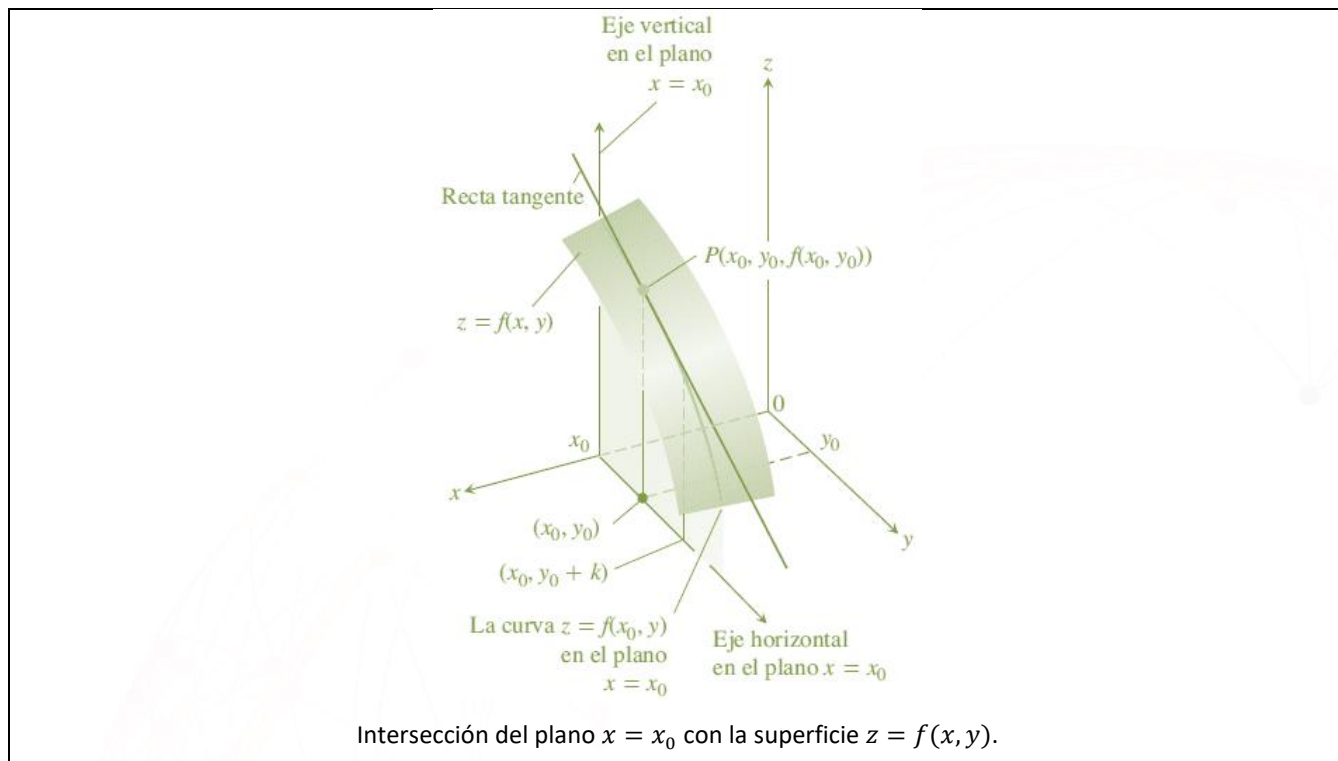
La **derivada parcia de $f(x, y)$ respecto a x** en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{d}{dx} f(x, y_0) \Big|_{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Siempre que este límite exista.

Para una función de más de dos variables sería algo casi idéntico:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, \dots) = \frac{d}{dx} f(x, y_0, z_0, \dots) \Big|_{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, \dots) - f(x_0, y_0, z_0, \dots)}{h}$$



En este enlace puedes ver [Ejercicios resueltos de derivadas parciales](#) de funciones de dos o más variables.

Derivadas parciales de segundo orden

Cuando es posible diferenciar $f(x, y)$ dos veces, calculamos sus derivadas de segundo orden (o segundas derivadas) y se denotan como sigue:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

donde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ y así sucesivamente. Una notación más práctica es la siguiente:

$$f_{xx}, \quad f_{yy}, \quad f_{yx} \quad \text{y} \quad f_{xy}$$

Ejemplo

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(x^2 - 2xy) + 3$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{5}(2x - 2y) & \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{2}{5}x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2}{5} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -\frac{2}{5} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{2}{5} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0\end{aligned}$$

Las derivadas parciales mixtas son iguales

En 3Blue1BrownClips (8 de diciembre de 2015). Rotating graph. [Archivo de video] YouTube.

<http://www.youtube.com/watch?v=pWccSRU3ntM%20> puedes ver la gráfica de esta función.

Teorema de Euler

Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x , f_y , f_{yx} y f_{xy} están definidas en toda una región que no contenga a su frontera y que contenga un punto (a, b) , y todas son continuas en (a, b) , entonces

$$f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b).$$

Casi siempre pasa que las derivadas mixtas coincida, sin embargo sí hay excepciones. Por ejemplo la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ x, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Las derivadas parciales mixtas evaluadas en el origen $(0, 0)$ son 1 y -1 respectivamente. Puedes ver una explicación en Wikipedia (2023). Simetría de segundas derivadas.

http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_of_second_derivatives#Requirement_of_continuity

Derivadas de orden superior

Podemos seguir diferenciando una función tantas veces como sea posible, es decir si existen las derivadas correspondientes. Las derivadas de tercer y cuarto orden serían:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = f_{yyx} \quad y \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) = f_{yyxx}$$



y así sucesivamente. En la notación $\frac{\partial}{\partial x}$ el orden de diferenciación está indicado por el orden de los términos en el denominador de derecha a izquierda. En la notación f_x el orden está indicado por el orden de los subíndices de izquierda a derecha.

Aproximación tangente (linealización)

Hemos visto que $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ nos dice qué tanto cambia f para pequeños cambios en x manteniendo y constante, y que $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ nos dice qué tanto cambia f para pequeños cambios en y manteniendo x constante. ¿Qué pasa si cambiamos ambas variables al mismo tiempo? Ambos efectos se agregarán uno al otro. Entonces si cambiamos x cierta cantidad Δx y cambiamos y cierta cantidad Δy , y digamos que tenemos la función $z = f(x, y)$, entonces ésta cambia Δz , que es aproximadamente $f_x \Delta x + f_y \Delta y$, es decir

$$\Delta z \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y.$$

Ésta es una de las fórmulas más importantes de derivadas parciales. Nuevamente, intuitivamente esto significa que los dos efectos se agregan. Una manera de justificar esta fórmula es en términos de la aproximación por el plano tangente a la gráfica de la función en un punto.

Para una función de una variable, $z = f(x)$, la recta tangente a su gráfica en el punto (x_0, y_0) es la recta que pasa por (x_0, z_0) con pendiente $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{(x_0, z_0)}$.

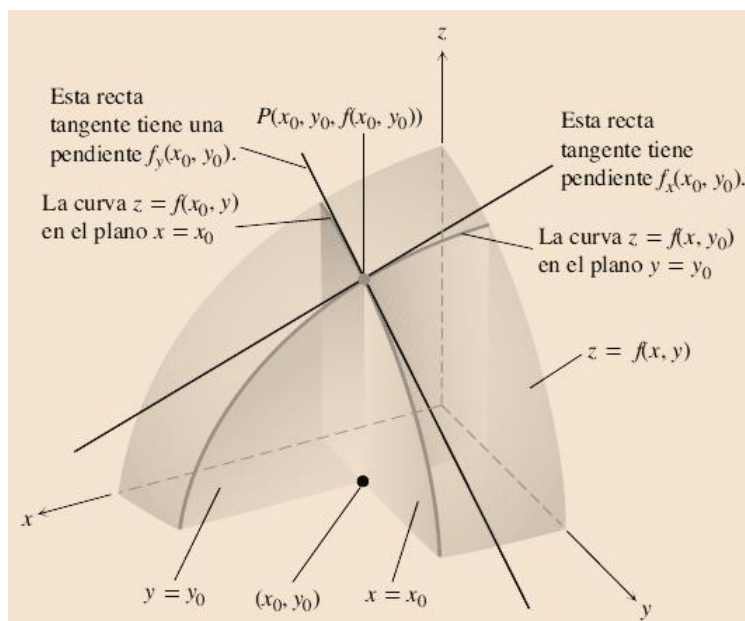


Ilustración 7. Gráfica de la recta tangente

Para una función de dos variables $z = f(x, y)$ el análogo natural es el plano tangente a la gráfica en el punto (x_0, y_0, z_0) . Recuerda que, como se ve en la figura, al tomar las derivadas parciales de la función, geométricamente obtenemos las rectas tangentes a una curva generada al intersectar la gráfica con el plano $x = cte$ y $y = cte$ respectivamente. Estas dos rectas son tangentes a la curva en P y juntas determinan un plano tangente a la superficie. Veamos:

sabemos que f_x y f_y son las pendientes de las dos rectas tangentes a la gráfica.

La ecuación de estas rectas en términos de x y y son las siguientes: Digamos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a$, entonces tenemos una recta con las siguientes condiciones $L_1 = \begin{cases} z = z_0 + a(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$, pues en el plano paralelo al plano xz , cuando y es constante, si x cambia, z cambia a una razón igual a a . Análogamente, si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$, obtenemos la recta $L_2 = \begin{cases} z = z_0 + b(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$.

El plano que determinan está dado por

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

y es un plano tangente a la superficie⁴.

Lo que dice la *fórmula de aproximación* $\Delta z \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$ es que la gráfica de la función "se parece" al plano tangente en ese punto, aunque no es igual, es sólo una aproximación para Δx y Δy pequeños. Si nos vemos en el plano tangente esto sería de hecho una igualdad, Δz sería una función lineal de Δx y de

⁴Otra manera de hacer esto sería dar las ecuaciones paramétricas de estas rectas, obtener vectores sobre ellas, tomar el producto cruz, obtener el vector normal al plano y luego obtener la ecuación del plano usando el vector normal.



Δy , de ahí el nombre de *linealización*. En conclusión, podemos usar la fórmula para estimar cómo cambia el valor de f si cambiamos x y y al mismo tiempo.

En el siguiente [video](#) puedes ver un ejemplo de cómo usar el plano tangente para aproximar.

Optimización

Una aplicación de las derivadas parciales es la optimización, es decir minimizar o maximizar algo. Mira el video [Extremos de funciones de varias variables](#).

Sabemos que para maximizar o minimizar una función de una variable hay que igualar la derivada de la función a cero y analizas qué pasa con la función:

1. Para determinar sus mínimos o máximos locales encontrábamos los puntos críticos, es decir las soluciones a $f'(x) = 0$,
2. y aplicábamos el criterio de la segunda derivada a cada punto crítico x_0 :

$f''(x) > 0$ entonces x_0 es un mínimo local,

$f''(x) < 0$ entonces x_0 es un máximo local.

La idea detrás de esto es que en x_0 la pendiente $f'(x_0) = 0$; si $f''(x_0) > 0$, entonces $f'(x)$ es estrictamente creciente para x cerca de x_0 , así que la pendiente es negativa a la izquierda de x_0 y positiva a la derecha, lo que muestra que x_0 es un punto mínimo. El razonamiento para el punto máximo es similar. Si $f''(x_0) = 0$ el criterio falla y hay que indagar más tomando más derivadas u obteniendo más información de la gráfica. Además de ser un máximo o un mínimo, ese punto puede ser un punto de inflexión. Para funciones de varias variables hacemos algo similar, excepto que tenemos tres, diez, mil variables.

Consideremos una función de dos variables, aunque funcionaría de la misma manera para funciones de más variables. La primera observación es que si tenemos un mínimo local o un máximo local entonces ambas derivadas parciales, es decir f_x y f_y son iguales a cero al mismo tiempo. Veamos por qué: supongamos que $f_x = 0$. Esto quiere decir que cuando varío x en primer orden, la función no cambia. Si observo únicamente el plano paralelo al eje x entonces tal vez estoy yendo sobre un mínimo. Pero si f_y



no es cero entonces de hecho, cambiando y , puedo obtener un valor mayor o menor y eso no sería un máximo o un mínimo. Sería un máximo o un mínimo sólo si permanezco en ese plano.

Ahora, digamos que ambas son cero, ¿es suficiente? Esencialmente lo es porque tengo la fórmula de linealización $\Delta z \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$ que me dice que si ambos términos son cero entonces la función no cambia en primer orden. Claro que habrá términos cuadráticos que cambiarán eso, pues no dice que la función de hecho es constante, sólo dirá que tal vez será cuadrática o de orden mayor en Δx y Δy . La siguiente expresión nos indica que las dos condiciones son equivalentes.

En un mínimo o máximo local $f_x = 0$ y $f_y = 0 \Leftrightarrow$ el plano tangente a $z = f(x, y)$ es horizontal.

Puedes ver que en la expresión $z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$, cuando a y b son cero, z es constante y el plano es horizontal. Sin embargo, estas condiciones son necesarias pero no suficientes. Hay otros tipos de puntos donde las derivadas parciales son cero.

Un punto (x_0, y_0) en el dominio de $f(x, y)$ es un **punto crítico** de f si $f_x = 0$ y $f_y = 0$ o ambas no existen.

Para una función de más variables, todas las derivadas parciales serían cero. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1

¿La función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 2y$ tiene algún máximo o mínimo?

Para responder esto necesitamos calcular las derivadas parciales e igualarlas a cero:

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y + 2 = 0 \\ f_y = -2x + 6y - 2 = 0 \end{cases}$$

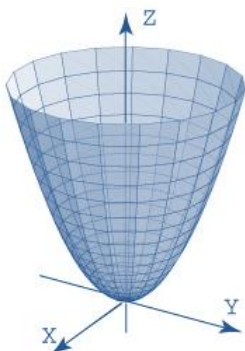
Luego necesitamos resolver estas dos ecuaciones simultáneamente. Para esto podemos sumarlas, de manera que obtenemos que $4y = 0$ y por lo tanto $y = 0$. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos que $2x + 2 = 0$ y por lo tanto $x = -1$. Entonces tenemos un punto crítico: $(-1, 0)$. Pero cómo sabemos si es un máximo o un mínimo. Si tuviéramos una función de una variable, decidiríamos a partir del criterio de la segunda derivada, pero en el caso de dos variables puede complicarse mucho



porque tenemos muchas segundas derivadas, por lo que es mejor tener una condición precisa. Para este ejemplo intentemos deducirlo sin usar las segundas derivadas.

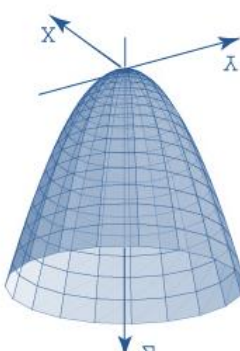
Antes de eso, recordemos la función al principio de esta unidad, $f(x, y) = x^2 + y^2$, la cual tiene un punto crítico que obviamente es un mínimo. Podría ser un mínimo local, porque si tuviéramos una función más complicada hay un mínimo en el origen pero puede haber otra región donde la función baje más. Llamamos a éste *mínimo local* para decir que es un mínimo si se toman valores que están suficientemente cerca al punto. De manera similar podemos hablar de un *máximo local*. Pero hay otro ejemplo de punto crítico, el *punto silla*, un punto que no es ni mínimo ni máximo, porque dependiendo la dirección que se tome puede ser uno u otro. Si nos fijamos en el plano tangente en el origen a la tercera gráfica veremos que es horizontal, pero dependiendo de la dirección que se tome se puede ir hacia arriba o hacia abajo.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



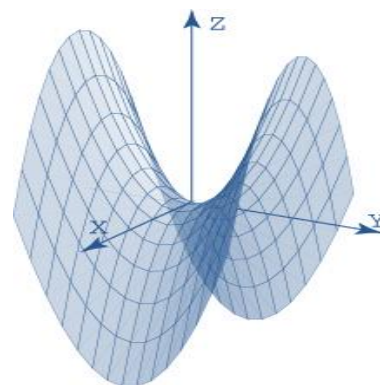
Mínimo local

$$f(x, y) = -(x^2 + y^2)$$



Máximo local

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



Punto silla

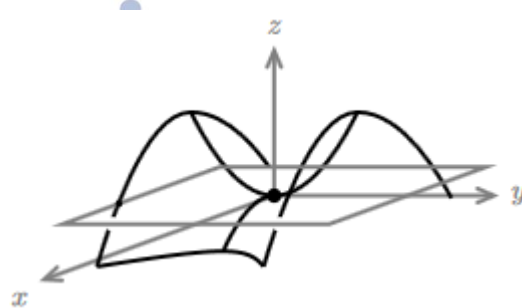
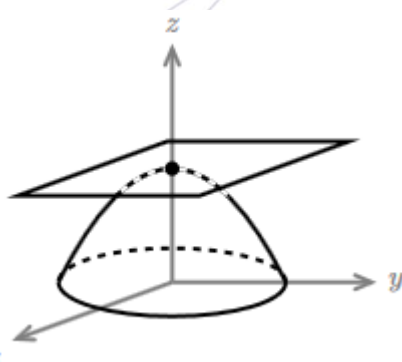
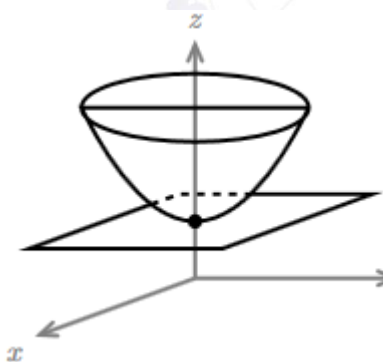


Ilustración 8. Planos tangentes



Regresemos a nuestro ejemplo. Si intentamos expresar $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 2y$ como un cuadrado, obtenemos $f(x, y) = (x - y)^2 + 2y^2 + 2x - 2y$. Estos dos últimos términos podemos introducirlos al cuadrado expresando lo anterior como $f(x, y) = (x - y + 1)^2 + 2y^2 - 1$. Entonces tenemos la suma de dos cuadrados menos 1, entonces $f(x, y) \geq -1 = f(-1, 0)$, por lo tanto $(-1, 0)$ es un mínimo.

Sea $f(x, y)$ definida sobre una región del espacio que contiene al punto (a, b) , entonces

1. $f(a, b)$ es un valor **máximo local** de f si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio suficientemente cercanos a (a, b) .
2. $f(a, b)$ es un valor **mínimo local** de f si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio suficientemente cercanos a (a, b) .

Si la función $f(x, y)$ es diferenciable

3. Un punto crítico (a, b) de $f(x, y)$ es un **punto silla** si para puntos suficientemente cercanos a (a, b) hay puntos (x, y) del dominio donde $f(x, y) > f(a, b)$ y puntos (x, y) del dominio donde $f(x, y) < f(a, b)$



Ilustración 9. valores mínimos



Una función más complicada, como la de la imagen de arriba, tiene varios puntos críticos. La gráfica de la función aquí abajo tiene un máximo y un mínimo, de hecho se pueden ver en sus curvas de nivel.

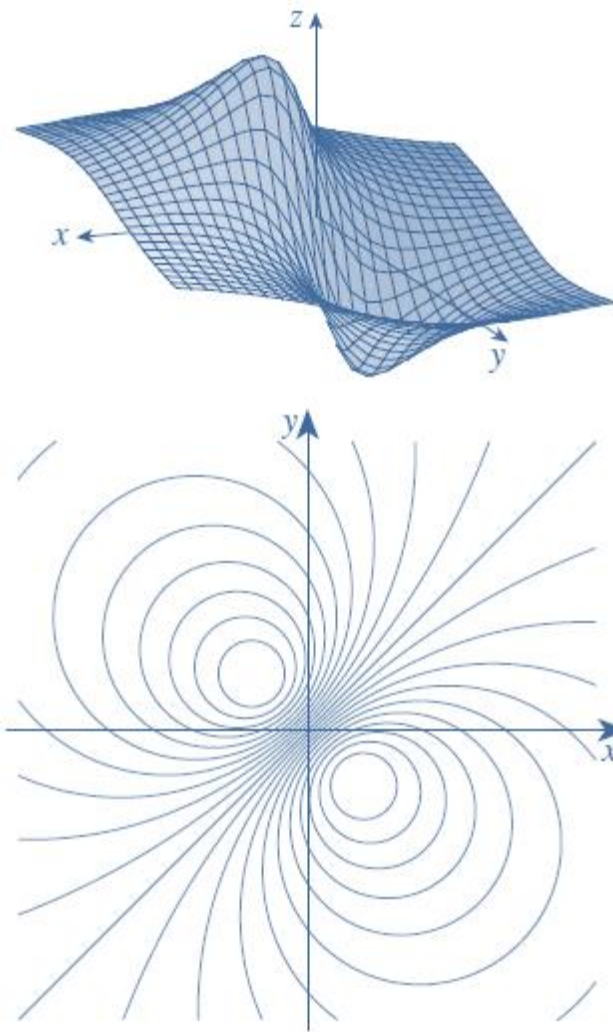


Ilustración 10. Máximo y mínimo

Esta imagen es la de la gráfica de una función con dos máximos y un punto silla entre ellos. Se puede ver el punto silla en sus curvas de nivel por la figura de ocho, que en el centro se interseca a sí misma.⁵

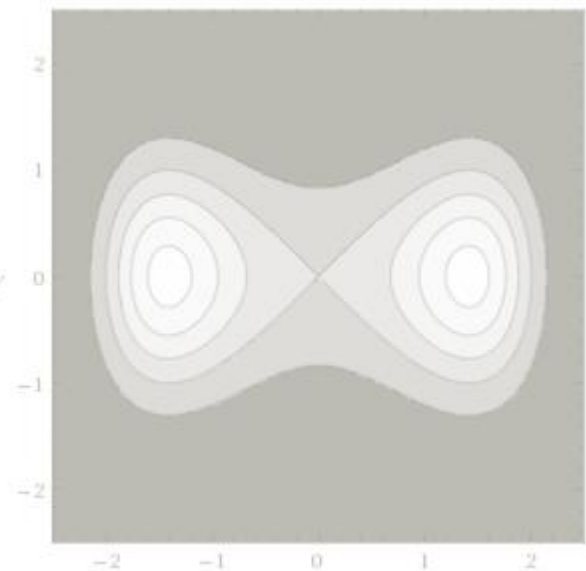
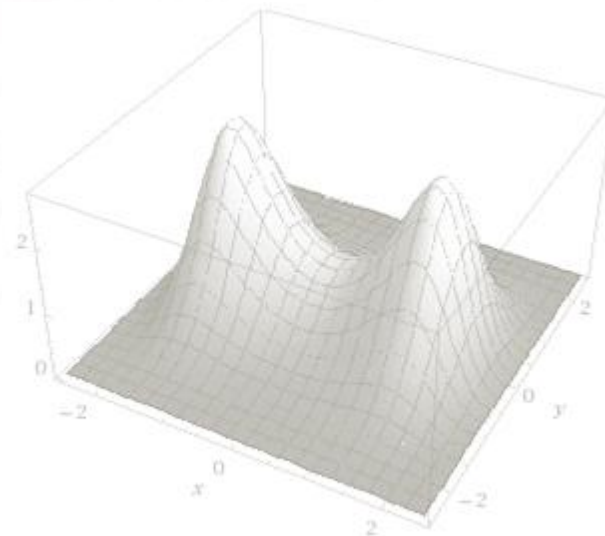


Ilustración 11. dos máximos y un punto

⁵ Esta gráfica fue generada en [WolframAlpha](https://www.wolframalpha.com) con el código `plot exp[-y^2-x^4/4+x^2] x=-2.5..2.5 y=-2.5..2.5 grid=[50,50]`.



En la gráfica de la derecha, si uno se coloca en el punto silla y se mueve hacia arriba o hacia abajo, es decir en la dirección de y , los valores de la función disminuyen, mientras que si se mueve en la dirección de x aumentan. Entonces se pueden ver fácilmente dónde están los puntos críticos de la función sólo observando su gráfica o sus curvas de nivel. Aunque en las curvas de nivel es necesario saber los valores de z para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo. La cuestión es cómo decidir qué tipo de punto crítico tenemos sin utilizar la gráfica: máximo local, mínimo local, punto silla; y cómo determinamos si existe un máximo o un mínimo global.

El **criterio de la segunda derivada** para máximos, mínimos y puntos silla tiene dos pasos.

1. Encontrar los puntos críticos resolviendo simultáneamente las ecuaciones

$$f_x(x, y) = 0$$

$$f_y(x, y) = 0$$

Como un punto crítico (a, b) es una solución para ambas ecuaciones, ambas derivadas parciales son cero en ese punto, así que el plano tangente a la gráfica de $f(x, y)$ en (a, b) es horizontal.

2. Para determinar si el punto es un máximo o mínimo local, calculamos las tres segundas derivadas en el punto y denotamos los valores por A , B y C (asumiendo que existen y son continuas):

$$A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b), \quad C = f_{yy}(a, b)$$

Ahora, sea (a, b) un punto crítico de $f(x, y)$, y A , B y C definidos como arriba. Entonces

$$AC - B^2 > 0, \quad A > 0 \text{ o } C > 0 \Rightarrow (a, b) \text{ es un punto mínimo};$$

$$AC - B^2 > 0, \quad A < 0 \text{ o } C < 0 \Rightarrow (a, b) \text{ es un punto máximo};$$

$$AC - B^2 < 0 \Rightarrow (a, b) \text{ es un punto silla};$$

Si $AC - B^2 = 0$ la prueba es inconclusa y hay que encontrar otra manera de determinar el comportamiento de f en (a, b) . Observa que si $AC - B^2 > 0$ entonces $AC > 0$, por lo que A y C deben tener el mismo signo. En el siguiente ejemplo puedes ver cómo encontrar los puntos críticos de una función y determinar de qué tipo son.

Ejemplo 2.



Encuentra los puntos críticos de $z = 12x^2 + y^3 - 12xy$ y determina su tipo.

Calculamos fácilmente las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} z_x &= 24x - 12y & A = z_{xx} &= 24 \\ z_y &= 3y^2 - 12x & B = z_{xy} &= -12 \\ & & C = z_{yy} &= 6y \end{aligned}$$

Para encontrar los puntos críticos resolvemos simultáneamente las ecuaciones $z_x = 0$ y $z_y = 0$:

$$\begin{aligned} z_x = 0 &\Rightarrow y = 2x \\ z_y = 0 &\Rightarrow y^2 = 4x \end{aligned} \Rightarrow 4x^2 = 4x \Rightarrow x = 0.1 \Rightarrow \begin{aligned} (x, y) &= (0, 0) \\ (x, y) &= (1, 2) \end{aligned}$$

Hay dos puntos críticos: $(0,0)$ y $(1,2)$. Para determinar su tipo, usamos el criterio de la segunda derivada: tenemos $AC - B^2 = 144y - 144$ entonces:

en $(0,0)$ tenemos $AC - B^2 = -144$, entonces es un punto silla;

en $(1,2)$ tenemos $AC - B^2 = 144$ y $A > 0$, por lo tanto es un punto mínimo.

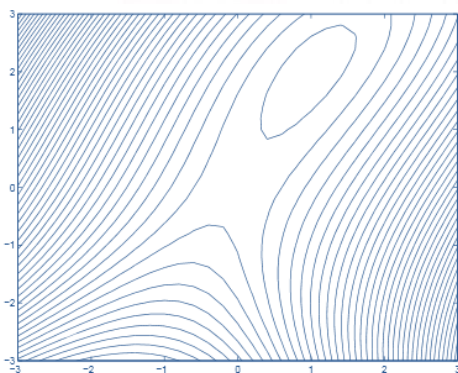


Ilustración 12. Curvas de nivel

La gráfica de las curvas de nivel está dada por la imagen a la izquierda, lo que confirma lo anterior. Observa que el comportamiento de las curvas de nivel cerca del origen puede determinarse usando la aproximación $z \approx 12x^2 - 12xy$. Esto muestra que las curvas de nivel cerca de $(0,0)$ se ven como las de la función $x(x - y)$: la familia de hipérbolas $x(x - y) = c$, con asíntotas dadas por la hipérbola degenerada $x(x - y) = 0$, es decir, el par de rectas $x = 0$ (eje y) y $x - y = 0$ (la diagonal

$y = x$).

3.3. Regla de la cadena, Gradiente y Derivadas direccionales

Diferencial total y Regla de la Cadena

En esta sección estudiaremos más a detalle cómo se comportan las funciones de varias variables, cómo calcular o estimar sus variaciones en direcciones arbitrarias, para lo que necesitaremos más herramientas. Para esto recordemos el concepto de derivación implícita del cálculo de una variable. Usamos derivación implícita para relacionar cambios infinitesimales en y con cambios infinitesimales en



x . Digamos que tenemos una función $y = f(x)$, entonces a veces escribimos $dy = f'(x)dx$. Por ejemplo, consideremos la función $y = \sin^{-1}(x)$, entonces podemos escribir $x = \sin(y)$ y con esto podemos encontrar la derivada de $\sin^{-1}(x)$ escribiendo $dx = \cos(y) dy$. Esto implica que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, una fórmula que seguramente es conocida. Ahora usaremos este tipo de notación para funciones de varias variables, daremos las reglas para manipularlas y veremos qué podemos hacer con ellas.

La **diferencial total**, opuesto a derivada parcial, incluye todas las contribuciones que pueden provocar que el valor de la función f cambie. Supongamos que tenemos una función de tres variables, x , y , z . Entonces escribimos

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Ahora ¿qué es este objeto, qué son los elementos en cada lado de esta igualdad? Se llaman *diferenciales*.

Es importante aclarar que **df no es lo mismo que Δf** , este último es un número una vez que se tenga una pequeña variación de x , una pequeña variación de y y una pequeña variación de z , es decir Δx , Δy y Δz son números y Δf se vuelve un número. df no es un número, no podemos darle un valor particular.

Todo lo que se puede hacer con un diferencial es expresarlo en términos de otros diferenciales.

Podemos pensar estos diferenciales como marcadores de posición donde pondremos otras cosas, aunque sí está la idea de cambios en x , y , z y f . Una manera de explicarlo es que representan cambios infinitesimales, pero otra manera más acertada es que son marcadores de posición para poner valores y obtener la aproximación tangente. Por ejemplo, si reemplazamos los símbolos dx , dy , y dz por números Δx , Δy y Δz entonces obtendremos una cantidad numérica. $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$ será una

aproximación lineal para Δf , la aproximación por el plano tangente. Otra cosa que la notación sugiere que podemos hacer es dividir todo entre alguna variable de la que todo dependa. Digamos que x , y y z dependen de un parámetro t , entonces variarán, a cierta razón, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$. Y lo que nos dirá la diferencial es la razón de cambio de f como función de t cuando reemplazamos estos valores de x , y y z , obtendremos $\frac{df}{dt}$ dividiendo todo entre dt en $df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$.

Entonces lo que podemos hacer es:

1. Codificar cómo afectan a f los cambios en x , y y z .



2. Poner marcadores para variaciones pequeñas Δx , Δy y Δz para obtener la fórmula de aproximación $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$.
3. Dividir entre algo como dt para obtener una razón de cambio $\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt}$, donde $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$. Esta última expresión es la *regla de la cadena*.

Una justificación de la regla de la cadena usando diferenciales es la siguiente: tenemos $df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$. Sabemos que si x es una función de t , entonces $dx = x'(t) dt$, lo mismo para y y para z , $dy = y'(t) dt$ y $dz = z'(t) dt$. Si reemplazamos esto en la fórmula obtenemos $df = f_x x'(t) dt + f_y y'(t) dt + f_z z'(t) dt$. Ahora tenemos una relación entre df y dt : $df = (f_x x'(t) + f_y y'(t) + f_z z'(t)) dt$, lo que quiere decir que la razón de cambio de f con respecto a t debería ser ese coeficiente. Si dividimos entre dt entonces obtenemos la regla de la cadena.

Una mejor manera de justificarla es la que sigue. Si cambiamos x un poco, si cambiamos y un poco y si cambiamos z un poco, entonces habrá un cambio en f aproximado por $\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$. Esto es cierto para cualquier cambio en x , y y z , en particular pensemos en los cambios que obtendremos si pensamos en x , y y z como funciones del tiempo y el tiempo cambia en Δt . Dividimos todo por Δt , lo cual podemos hacer porque estamos dividiendo números: $\frac{\Delta f}{\Delta t} \approx \frac{f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z}{\Delta t}$. Entonces si $\Delta t \rightarrow 0$ tenemos la derivada de f con respecto a t : $\frac{\Delta f}{\Delta t} \rightarrow \frac{df}{dt}$. Similarmente $\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{dx}{dt}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t} \rightarrow \frac{dy}{dt}$ y $\frac{\Delta z}{\Delta t} \rightarrow \frac{dz}{dt}$. Esto quiere decir que si tomamos el límite cuando Δt tiende a 0, $\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt}$, pues aunque teníamos el símbolo $\approx$ conforme las variaciones son cada vez más pequeñas eventualmente llegamos a la igualdad. En el siguiente Ejemplo puedes ver en que consiste obtener la diferencial total de una función y su derivada usando la regla de la cadena.

Ejemplo

- 1) Encuentra la diferencial total de $f(x, y, z) = ze^{(x+y)}$ en $(0,0,1)$.

La diferencial total en el punto (a, b, c) es $df = f_x(a, b, c) dx + f_y(a, b, c) dy + f_z(a, b, c) dz$. En este caso,

$$f_x = ze^{(x+y)},$$

$$f_y = ze^{(x+y)},$$

$$f_z = e^{(x+y)}$$



Sustituyendo en el punto $(0,0,1)$ obtenemos $f_x(0,0,1) = 1$, $f_y(0,0,1) = 1$ y $f_z(0,0,1) = 1$. Por lo tanto

$$df = f_x + f_y + f_z.$$

- 2) Supongamos que $f(x, y, z) = ze^{(x+y)}$ y que $x = t$, $y = t^2$ y $z = t^3$. Calcula $\frac{df}{dt}$ y evalúala en $t = 2$.

Usamos la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= (ze^{(x+y)})(1) + (ze^{(x+y)})(2t) + (e^{(x+y)})(3t^2) \end{aligned}$$

En $t = 2$ tenemos $x = 2$, $y = 4$ y $z = 8$. Por lo tanto

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_2 = 8e^6 + 8e^6(4) + e^6(12) = 52e^6.$$

En resumen, la regla de la cadena nos dice que el cambio en la función f está provocado por cambios en x , y y z , y que x , y y z cambian en las razones $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$, y esto provoca que la función cambie en consecuencia. Las derivadas parciales nos dicen qué tan sensible es f a cambios en cada variable.

Gradiente

El gradiente de una función de varias variables $f(x, y)$ denotado por ∇f , "empaqueta" toda la información de sus derivadas parciales en un vector:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

El **vector gradiente** (o **gradiente**) de una función f en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$, es el vector

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

obtenido al evaluar las derivadas parciales de f en P_0 , es decir

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} = (x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (x_0, y_0) \end{bmatrix}$$



El gradiente de una función también se denota como $\text{grad } f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle f_x, f_y \rangle$. El símbolo ∇ es llamado *nabla*.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son las razones de cambio en las direcciones $\hat{i}$ y $\hat{j}$, y podemos ver al gradiente de f como la colección de todas sus derivadas parciales en un vector. Por ejemplo, si $f(x, y) = x^2 - xy$, $\nabla f = \begin{bmatrix} 2x - y \\ -x \end{bmatrix}$. La misma idea aplica, aunque el dominio sea tridimensional o 10000000-dimensional: el gradiente de f es un vector en ese espacio que apunta en la dirección que hace crecer a la función f más rápidamente en cada punto, es decir que hay un vector para cada punto (x_0, y_0) en el dominio de la función y forman un campo vectorial.

En particular ∇f es una función vectorial para la que se cumple lo siguiente:

- Estos vectores gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ son perpendiculares a las curvas de nivel.
- Si ∇f es una función vectorial con dos variables de entrada, puede visualizarse como un campo vectorial, como mencionamos antes. Este espacio es un subconjunto del dominio de f , que es el plano xy en el caso de funciones de dos variables.
- ∇f es la "derivada completa" de una función de varias variables.
- Si nos colocamos en el punto (x_0, y_0) en el dominio de f , el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ nos dice en cuál dirección deberíamos movernos para aumentar el valor de f más rápidamente. Es decir que el gradiente de f evaluado en (x_0, y_0) apunta en la dirección del ascenso más rápido.
- La magnitud del vector $\nabla f(x_0, y_0)$ nos dice cuál es la pendiente en esa dirección.

En [Gradiente 1](#)⁶ puedes ver un ejemplo de cómo calcular el gradiente de una función de dos variables.

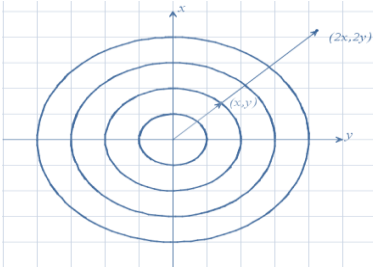
Retomando la regla de la cadena para una función de tres variables (funciona de la misma manera para una función de dos variables), podemos simplificar la notación usando el gradiente:

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt} = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

⁶ El video original está en inglés y subtítulado: [Gradient 1](#)



donde, como ya sabemos, $\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$ es el gradiente de f en algún punto (x, y, z) ; y $\frac{dr}{dt} = \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \rangle$ es el vector velocidad.



Veamos dos ejemplos de que el gradiente es perpendicular a las superficies de nivel de una función.

Ejemplo 1: $w = a_1x + a_2y + a_3z$. Su gradiente es $\nabla w = \langle w_x, w_y, w_z \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Las superficies de nivel de esta función son $a_1x + a_2y + a_3z = cte$ y estas superficies son planos. El vector normal a un plano es precisamente $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, el gradiente de w .

De hecho, es el único caso que necesitamos analizar porque el gradiente de una función en un punto siempre será un vector normal (perpendicular) al plano tangente a la gráfica de la función en ese punto. Pero veamos otro ejemplo en el siguiente ejemplo

Ejemplo 2: $w = x^2 + y^2$. Las curvas de nivel de esta función son círculos con ecuación $x^2 + y^2 = cte$.

Entonces sus curvas de nivel se ven como esto:

Ilustración 13. Superficie de nivel

Su gradiente es $\nabla w = \langle w_x, w_y \rangle = \langle 2x, 2y \rangle$. Tomemos un punto (x, y) y dibujemos el vector gradiente. Aquí en (x, y) dibujamos el vector $\langle 2x, 2y \rangle$ en azul, que es paralelo al vector de posición $\langle x, y \rangle$ en verde, tiene dos veces su magnitud y es perpendicular al círculo.

Demostrar esto es sencillo utilizando la regla de la cadena. Consideremos la función $f(x, y, z)$ y el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ (es decir $f(x_0, y_0, z_0) = c$).

Sea $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ una curva en la superficie de nivel con $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ y sea $g(t) = f(x(t), y(t), z(t)) = c$. Diferenciando esta ecuación con respecto a t obtenemos

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_P \frac{dx}{dt} \bigg|_{t_0} + \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_P \frac{dy}{dt} \bigg|_{t_0} + \frac{\partial f}{\partial z} \bigg|_P \frac{dz}{dt} \bigg|_{t_0} = 0$$

que en forma de vector es

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_P, \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_P, \frac{\partial f}{\partial z} \bigg|_P \right\rangle \cdot \left\langle \frac{dx}{dt} \bigg|_{t_0}, \frac{dy}{dt} \bigg|_{t_0}, \frac{dz}{dt} \bigg|_{t_0} \right\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla f|_P \cdot \mathbf{r}'(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

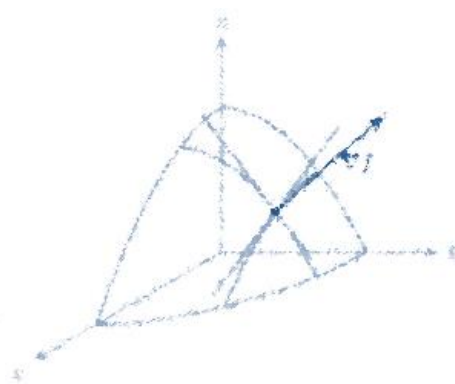


Ilustración 14. Vectores

Como el producto punto es 0, demostramos que el gradiente es perpendicular a la recta tangente a cualquier curva de nivel.

Una aplicación de lo anterior es obtener el plano tangente a cualquier curva o superficie.

Por ejemplo digamos que queremos encontrar el plano tangente de la superficie con ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, cuya gráfica está a la izquierda, en el punto $(2,1,1)$. Una

manera que ya conocemos es despejar z para obtenerla como una función de x y de y , y conocemos la aproximación por el plano tangente para una función de dos variables. Sin embargo, conociendo el gradiente, conocemos el vector normal al plano tangente, pues tienen el mismo vector normal. Digamos que $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ es la superficie de nivel $w = 4$ de $w = x^2 + y^2 - z^2$. El gradiente de esta función es $\nabla w = \langle w_x, w_y, w_z \rangle = \langle 2x, 2y, -2z \rangle = \langle 4, 2, -2 \rangle$ en el punto dado. La ecuación es $4x + 2y - 2z = 8$, pues reemplazando el punto $(2,1,1)$ en $4x + 2y - 2z$ obtenemos 8.

Derivadas direccionales

Si tenemos una función $f(x, y)$, y un vector $\mathbf{u}$ en el espacio de entrada de la función, la derivada direccional de f a lo largo de $\mathbf{u}$ nos dice la razón a la que f cambia mientras la entrada de la función con vector velocidad $\mathbf{u}$. En este sentido, las derivadas parciales son derivadas direccionales en la dirección de x y de y . Mira el video [Derivada Direccional](#) donde explican a grandes rasgos este concepto y los vistos anteriormente.

Consideremos la función $w = f(x, y)$ y fijemos un vector unitario $\mathbf{u}$ y un punto P_0 in el plano.

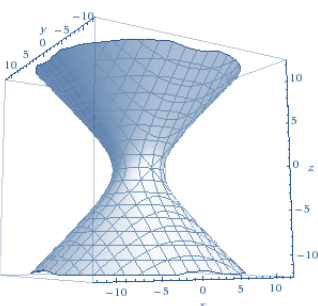


Ilustración 15. gradiente perpendicular



La **derivada direccional** de w en P_0 en la dirección de $\mathbf{u}$ está definida como

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{P_0, \mathbf{u}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta s}$$

Δw es el cambio en w provocado por un paso de longitud Δs en la dirección de $\mathbf{u}$ (en el plano xy).

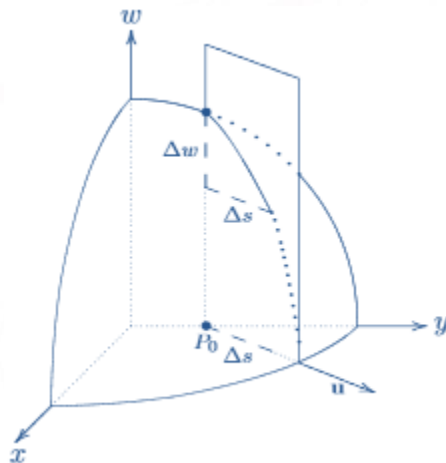


Ilustración 16. gráfica derivada parciales

Teorema. Si las derivadas parciales de $f(x, y)$ están definidas en P_0 , entonces

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{P_0, \mathbf{u}} = \nabla w(P_0) \cdot \mathbf{u}$$

Dem.

La siguiente figura representa el cambio de posición desde P_0 resultante de tomar un paso de tamaño Δs en la dirección de $\mathbf{u}$.

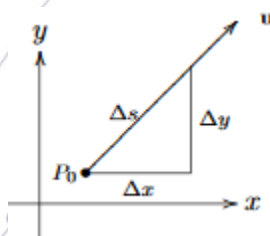


Ilustración 17. Cambio de posición

Como $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ tenemos que $\langle \frac{\Delta x}{\Delta s}, \frac{\Delta y}{\Delta s} \rangle$ es un vector unitario, por lo que $\mathbf{u} = \langle \frac{\Delta x}{\Delta s}, \frac{\Delta y}{\Delta s} \rangle$.

La aproximación tangente en P_0 es



$$\Delta w \approx \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{P_0} \Delta x + \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{P_0} \Delta y$$

Dividiendo esta aproximación entre Δs obtenemos

$$\frac{\Delta w}{\Delta s} \approx \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{P_0} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{P_0} \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

Podemos reescribir esto como un producto punto

$$\frac{\Delta w}{\Delta s} \approx \left\langle \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{P_0}, \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{P_0} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\Delta x}{\Delta s}, \frac{\Delta y}{\Delta s} \right\rangle$$

En este producto punto el primer término es $\nabla w(P_0)$ y el segundo es $\mathbf{u}$, por lo tanto

$$\frac{\Delta w}{\Delta s} \approx \nabla w(P_0) \cdot \mathbf{u}$$

Tomando el límite obtenemos la igualdad.

En la siguiente sección puedes ver dos ejemplos

Ejemplo 1 (algebraico)

Sea $w = x^3 + 3y^2$. Calcula $\frac{dw}{ds}$ en $P_0 = (1,2)$ en la dirección de $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Solución. Calculamos todos los componentes necesarios:

- i. $\nabla w = \langle x^2, 6y \rangle \Rightarrow \nabla w|_{(1,2)} = \langle 3, 12 \rangle$
- ii. $\mathbf{u}$ debe ser un vector unitario, entonces $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$
- iii. $\frac{dw}{ds} \Big|_{P_0, \mathbf{u}} = \nabla w|_{(1,2)} \cdot \mathbf{u} = \langle 3, 12 \rangle \cdot \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle = \frac{57}{5}$.

Ejemplo 2 (geométrico)

Sea $\mathbf{u}$ la dirección de $\langle 1, -1 \rangle$. Usando la imagen de abajo estima $\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_P$, $\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_P$ y $\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_P$.

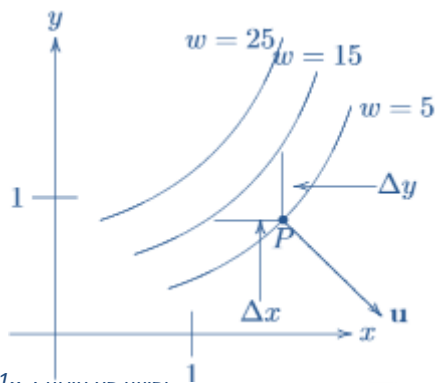


Ilustración 1a. Curva de nivel

Midiendo desde P de una a otra curva de nivel en la dirección de x vemos que $\Delta x \approx -0.5$.

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_P \approx \frac{\Delta w}{\Delta x} \approx \frac{10}{-0.5} = -20$$

De la misma manera obtenemos

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_P \approx 20$$

Midiendo en la dirección de $\mathbf{u}$ obtenemos que $\Delta s \approx -0.3$

$$\Rightarrow \left. \frac{dw}{ds} \right|_{P, \mathbf{u}} \approx \frac{\Delta w}{\Delta s} \approx \frac{10}{-0.3} = -33.3$$

Antes mencionamos que la dirección que da la máxima razón de cambio es en la dirección del gradiente. La demostración utiliza el teorema anterior. Sea θ el ángulo entre Δw y $\mathbf{u}$. Entonces la forma geométrica del producto punto dice que

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\mathbf{u}} = \nabla w \cdot \mathbf{u} = |\nabla w| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla w| \cos \theta$$

Es obvio que $\left. \frac{dw}{ds} \right|_{\mathbf{u}}$ es máxima cuando $\theta = 0$, es decir cuando ∇w y $\mathbf{u}$ están en la misma dirección.

Material de apoyo

Aquí te sugerimos algunos materiales a través de los que podrás tener una idea de cómo es la modelación matemática de un fenómeno como el cambio climático, su complejidad y al mismo tiempo su sencillez.

- Madrid, C. (2017). Las matemáticas del cambio climático. Encuentros Multidisciplinares, Universidad Complutense de Madrid. <http://www.encuentros-multidisciplinares.org/Revistan%BA26/Carlos%20M.%20Madrid%20Casado.pdf>

En este texto se "estudian los fundamentos científicos y filosóficos de la teoría del cambio climático" bajo la perspectiva de las matemáticas.



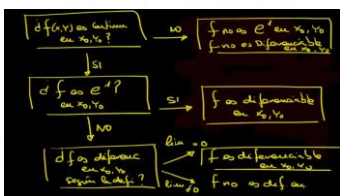
Finalmente te damos otro vistazo a un texto, pero esta vez del tipo de problemas que se tratan en la Meteorología, para reforzar la idea de la interrelación entre áreas de conocimiento y de la importancia de la aplicación de las matemáticas en ellas.

- García, P., R. (2005). Problemas resueltos de meteorología. Universidad de Huelva.

<https://www.uhu.es/gem/docencia/meteo-ccaa/descargas/problemas.pdf>

Aprendo observando

Estos videos constituyen material extra:



Canal Mistercinco (29 de junio de 2014).

Continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de una función. [Archivo de video] YouTube.

https://www.youtube.com/watch?v=V_a8M74zwO4



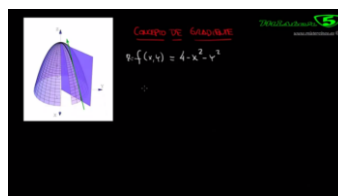
¿QUÉ SON LOS FRENTE FRÍOS?

UNAM Global Tv. (30 de enero de 2026). ¿QUÉ SON LOS FRENTE FRÍOS? [Archivo de video].

YouTube.

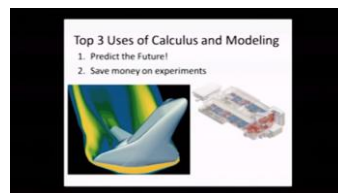
<https://www.youtube.com/watch?v=egTRnzw>

CFk



Canal Mistercinco (24 de febrero de 2013). Vector gradiente de una función. Derivadas parciales. [Archivo de video] YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=B6Z5Y62MhYE>



TEDx Talks (20 de abril de 2012). What is Claculus used for? | Jeff Heys | TEDxbozeman. [Archivo de video] YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=Idra8rVS1I>

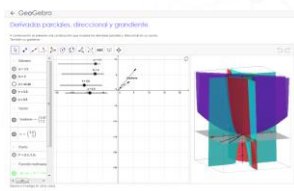


Listas de reproducción:

- Academática (2009). Cálculo Multivariable. [Archivo de video] YouTube Playlist.
<https://www.youtube.com/playlist?list=PL78556CF32ABD3C44>

Aprendo haciendo

En esta sección te proponemos algunos recursos interactivos complementarios.



Zamudio (s.f.) *Derivadas parciales, gradiente y derivadas direccionales*. GeoGebra.

[tps://www.geogebra.org/m/zaJ6hjWN](https://www.geogebra.org/m/zaJ6hjWN)

Aprendo leyendo

[Vector fields](#) (*Campos vectoriales*).

[Formal definition of the directional derivative](#) (*Definición formal de derivada parcial*).

Cierre de la unidad

En esta unidad hemos estudiado las funciones de varias variables y algunos conceptos relacionados como las curvas de nivel, las derivadas parciales, la regla de la cadena y el gradiente. Las funciones de varias variables permiten explicar el comportamiento de resultados que dependen de dos o más variables. Conociendo las propiedades de las funciones variables es posible establecer operadores entre ellas, como las derivadas parciales. Estas permiten observar variaciones de una función frente a variaciones de sus variables dependientes, similarmente a como sucede con la derivada ordinaria de funciones reales.



Fuentes de consulta

Básica

- Auroux, D. (2010). *18.02SC Multivariable calculus* [Curso en línea]. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. <https://ocw.mit.edu>.
(Licencia Creative Commons BY-NC-SA)
- Khan Academy. (2010). *Multivariable calculus* [Curso en línea].
<https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus>
- Thomas, G. (2005). *Cálculo: Varias variables*. Pearson Educación.