Matemáticas

Cuarto Semestre

Ecuaciones Diferenciales I

Unidad 2. Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Clave
05142422/06142422

Universidad Abierta y a Distancia de México

índice

Presentación

En esta unidad utilizaremos nuestros conocimientos adquiridos en la primera unidad para resolver problemas de ecuaciones diferenciales de orden superior. Se utilizarán los determinantes como herramienta para determinar la dependencia lineal de dos o más funciones para la solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas y métodos algebraicos para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales de orden superior.

Competencia específica

Identificar las ecuaciones diferenciales lineales de orden n para encontrar su solución por medio de métodos algebraicos y analíticos.

Logros

- Identificar funciones linealmente dependientes o independientes por medio del Wronskiano y el determinante de Gram.
- Utilizar métodos algebraicos para resolver ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes de orden n por medio de su ecuación característica.
- Identificar y resolver ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas de orden superior.
- Aplicar el teorema de superposición.

Unidad 2. Ecuaciones diferenciales de orden superior

2.1. Funciones linealmente dependientes e independientes

En esta sección primero se tratan los conceptos básicos para poder desarrollar la teoría, de esta manera primero introducimos el concepto de funciones linealmente independientes y funciones linealmente dependientes.

Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$,…, $y_n(x)$ funciones definidas en el intervalo (a, b). Se dice que éstas son linealmente dependientes en el intervalo (a, b) si existen constantes α_1, α_2, α_3,…, $\alpha_n$no todas cero, tales que para todo x en el intervalo (a, b) se tiene que

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

Si la identidad anterior sólo se cumple cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$, entonces se dice que las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$,…, $y_n(x)$ son linealmente independientes.

Ejemplo:

Las funciones de la base estándar del espacio vectorial de los polinomios reales de grado tres son funciones linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Para ver este hecho recuerda que según lo aprendido en álgebra lineal la base mencionada está formada por las funciones $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^2$, $y_4(x) = x^3$. Consideremos la ecuación

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0$$

Si en la ecuación anterior existe al menos un $\alpha_i \neq 0$ entonces queda un poliniomio de grado cuando mucho tres y por el teorema fundamental del álgebra a lo más sólo habrá tres raíces distintas, por lo tanto, la ecuación no se cumplirá para todos los valores del intervalo $(-\infty, \infty)$, por esta razón la única solución es que los valores $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, por tanto las funciones son linealmente independientes.

Para determinar cuándo las funciones son linealmente dependientes existe otro criterio el cual involucra una herramienta que se utilizará más adelante para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales de orden mayor a 1. Dicha herramienta es el determinante de Wronsky o como comúnmente se le conoce el Wronskiano.

Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$,…, $y_n(x)$ funciones que admiten derivada hasta el orden $(n-1)$, entonces se define el Wronskiano de las funciones como

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = det\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Observa que el Wronskiano resulta ser una función de la variable x

Ejemplo

Consideramos las funciones $y_1(x) = x^2 - 2$ y $y_2(x) = \frac{2}{x}$, entonces

$$W[y_1, y_2] = det\begin{pmatrix} x^2 - 1 & \dfrac{2}{x} \\ 2x & \dfrac{-2}{x^2} \end{pmatrix} = -2 + \frac{2}{x^2} - 4 = \frac{2}{x^2} - 6$$

La importancia del Wronskiano se ve en el siguiente teorema.

Teorema:

Si el sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$,…, $y_n(x)$ es linealmente dependiente en el intervalo $[a, b]$, entonces su Wronskiano es cero en $[a, b]$.

Hay que observar que el recíproco de este Teorema no es cierto, es decir, si el Wronskiano de un sistema de funciones es cero no implica que las funciones sean linealmente dependientes, para un ejemplo de este hecho considera las funciones $y_1(x) = 0$ y $y_2(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ en el intervalo $[0,1]$, pues como puedes comprobar estas funciones en dicho intervalo son linealmente independientes pero su Wronskiano es cero.

Una forma alterna para comprobar si un sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$,…, $y_n(x)$ es linealmente independiente en (a, b) se utiliza el determinante de Gramm, el cual se define como

$$\Gamma[y_1, y_2, \dots, y_n] = det\begin{pmatrix} (y_1, y_1) & \cdots & (y_1, y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_n, y_1) & \cdots & (y_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Donde $(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x) y_j(x) dx$ (el producto interno clásico de funciones)

Teorema:

El sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$,..., $y_n(x)$ es linealmente independiente en (a, b) si y sólo si $\Gamma[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$.

Consideremos el siguiente ejemplo: Sean $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = 2x$ en el intervalo $[0,2]$, entonces

$$(y_1, y_1) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

$$(y_1, y_2) = \int_0^2 2x^2 dx = \frac{16}{3} = (y_2, y_1)$$

$$(y_2, y_1) = \int_0^2 4x^2 dx = \frac{32}{3}$$

Por lo tanto

$$\Gamma[y_1, y_2] = det\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{16}{3} \\ \frac{16}{3} & \frac{32}{3} \end{pmatrix} = \frac{256}{3} - \frac{256}{3} = 0$$

Por lo tanto, el sistema es linealmente independiente.

2.2. Solución general de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes

Antes de resolver las ecuaciones diferenciales primero vamos a clasificarlas en dos tipos, las ecuaciones homogéneas y las no homogéneas, después veremos el teorema de existencia y unicidad que nos va a garantizar la existencia de las soluciones de las ecuaciones para después pasar a los métodos de solución de ecuaciones.

Podemos representar una ecuación diferencial lineal de orden *n* homogénea en su forma más general de la siguiente forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

Donde los coeficientes $a_l(x)$ para $l = 1,2,3, \dots, n$ son funciones reales, con $a_n(x) \neq 0$.

Mientras que:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = g(x)$$

Se le llama ecuación diferencial lineal de orden *n* no homogénea siempre que $g(x) \neq 0$.

Ejemplo:

La ecuación

$$3y'' + 2y' - 4y = 0$$

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea $g(x) = 0$.

Por otra parte, la ecuación

$$y''' + 2y'' - 4y' - y = e^{2x}$$

Es una ecuación diferencial ordinaria lineal de tercer orden, no homogénea $g(x) \neq 0$

Teorema de existencia y unicidad:

Sea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

Una ecuación diferencial de orden superior, si los coeficientes $a_i(x)$, con $i = 0,1, \dots, n$ y $g(x)$ son funciones continuas en un intervalo $[a, b]$.

Sea $f\left(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) = y^\wedge(n)$, si f es continua con respecto a $x, y', \dots y^{n-1}$ en un dominio D y tiene derivadas parciales continuas $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{n-1}}$ entonces existe una única solución $y(x)$ que satisface condiciones iniciales.

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_{0, \dots,} y^{n-1}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

Donde los valores $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ se encuentran en D.

Este teorema nos ayudará a justificar que los métodos que veremos tienen solución única.

Otro teorema muy importante para nuestros propósitos es el teorema de superposición de soluciones, el cual se enuncia a continuación.

Teorema:

Si las funciones $y_1, y_2, \dots, y_k$ son soluciones de a ecuación diferencial lineal homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

En un intervalo I, entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k$$

es la solución general de la ecuación diferencial en I, donde c_i, $i = 1, \dots, k$ son constantes.

Ejemplo:

Las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ y $y_3 = e^{3x}$ definidas en el intervalo $-\infty < x < \infty$ son funciones que satisfacen la ecuación diferencial homogénea:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Por el principio de superposición, la solución general será la combinación lineal:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

Ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden n

En esta sección veremos el método para resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas de orden n con coeficientes de constantes, es decir ecuaciones de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Asociado con la última ecuación se tiene una ecuación la cual se conoce como la ecuación característica de la diferencial, la cual está dada por

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Observa que la última ecuación se puede ver como calcular los ceros de un polinomio de grado n en la variable λ, conocido como el polinomio característico. Por esta razón existen diversos casos para analizar.

Primero supongamos que las raíces del polinomio característico son todas reales y distintas, entonces el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial está dada por

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

Donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son las raíces del polinomio característico. Entonces la solución general del a ecuación está dada por

$$y_g = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Como un segundo caso supongamos que todas las raíces del polinomio característico son reales, pero algunas de ellas tienen multiplicidad mayor o igual a dos, es decir, si suponemos que las raíces son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, con $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \hat{\lambda}$, es decir la raíz $\hat{\lambda}$ tiene multiplicidad k, mientras que el resto de las $n-k$ raíces son distintas, entonces el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial está dado por

$$e^{\hat{\lambda}_1 x}, xe^{\hat{\lambda} x}, x^2 e^{\hat{\lambda} x}, \dots, x^{k-1} e^{\hat{\lambda} x}, e^{\lambda_{k+1} x}, e^{\lambda_{k+2} x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

Y la solución general de la ecuación diferencial está dada por

$$y_g = c_1 e^{\hat{\lambda}_1 x} + c_2 x e^{\hat{\lambda} x} + c_3 x^2 e^{\hat{\lambda} x} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{\hat{\lambda} x} + c_{k+1}\, e^{\lambda_{k+1} x} + c_{k+2} e^{\lambda_{k+2} x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Para un tercer caso supongamos que algunas de las raíces son complejas, para propósitos prácticos supongamos lo siguiente, aunque el caso general se sigue de manera inmediata; sean $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \lambda_3 = \gamma + i\eta, \lambda_4 = \gamma - i\eta$ y que el resto de las raíces son reales (no olvides que si un número complejo es raíz de un polinomio su conjurado también es raíz del polinomio, por esa razón se escribieron así las raíces), entonces el sistema fundamental de soluciones está dada por

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x), e^{\gamma x}\cos(\eta x), e^{\gamma x}\sin(\eta x), e^{\lambda_5 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

Y la solución general será

$$y_g = c_1 e^{\alpha x}\cos + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + c_3 e^{\gamma x}\cos(\eta x) + c_4\, e^{\gamma x}\sin(\eta x) + c_5 e^{\lambda_5 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Finalmente, si algunas de las raíces del polinomio son complejas y de multiplicidad mayor o igual a dos, entonces se combinan las reglas anteriores para obtener un sistema general de la forma

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$
$$, e^{\lambda_{k+1}x}, e^{\lambda_{k+2}x}, \dots, e^{\lambda_n x}.$$

Y por tanto su solución general será

$$y_g = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + c_3\, xe^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_4 xe^{\alpha x}\sin(\beta x) + \cdots$$
$$+ \cdots + c_{2k-1}x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_{2k}x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x) +$$
$$+ c_{2k+1}e^{\lambda 2_{k+1}x} + c_{2k+2}e^{\lambda_{2k+2}x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Ejemplo

Consideremos la ecuación $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$, entonces su ecuación característica es

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Y resolviendo la última expresión por división sintética se tiene que las raíces son

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$$

Que son todas reales y distintas, por lo tanto, están en el primer caso, por tanto la solución general será

$$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{3x}$$

Ejemplo

Dada la ecuación $y''' + 9y'' + 24y' + 20 = 0$, su ecuación característica es

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 24\lambda + 20 = 0$$

Y calculando las raíces mediante división sintética se tiene que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -5$$

Por lo tanto, existe una raíz de multiplicidad 2 que es -2, por lo tanto, se debe de utilizar el segundo caso, de esta manera la solución general será

$$y_g = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3e^{-5x}$$

Ejemplo

Consideremos la siguiente ecuación

$$y''' - 5y'' + 8y' + 13y = 0,$$

Entonces su ecuación característica es

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda + 13 = 0$$

Y de nuevo por división sintética se tiene que las raíces son

$$\lambda_1 = 3 + 2i, \lambda_2 = 3 - 2i, \lambda_3 = 3$$

Por lo que estamos en el tercer caso, pues hay dos raíces complejas

Y en este caso la solución general será

$$y_g = c_1e^{3x}\cos(2x) + c_2e^{3x}\sin(2x) + c_3e^{3x}$$

Ejemplo

Dada la ecuación

$$y^5 - 2y^4 + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$$

su ecuación característica es

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Y sus raíces son $\lambda_1 = \lambda_2 = i, \lambda_3 = \lambda_{\,4} = -i, \lambda_5 = 2$, por lo cual hay raíces complejas de multiplicidad 2, por lo que es el último caso de nuestro análisis, por lo cual la solución general será

$$y_g = c_1e^{0x}\cos x + c_2e^{0x}\sin x + c_3xe^{0x}\cos x + c_4xe^{0x}\sin x + c_5e^{2x}$$

2.3. Definición y solución de ecuaciones diferenciales lineales de orden n homogéneas y no homogéneas

Si tenemos a y_p como la solución particular de una ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = g(x)$$

En un intervalo $[a, b]$ y además tenemos que la función:

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

Es la solución general de la ecuación homogénea:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

Asociada en el intervalo. Entonces la solución general de la ecuación no homogénea en el intervalo $[a, b]$ se define como:

$$y_g = y_h + y_p$$

En resumen, la solución general será:

y=solución general a la ecuación homogénea + cualquier solución particular

Ecuaciones lineales no homogéneas de coeficientes constantes

Método de Coeficientes indeterminados

El método de coeficientes indeterminados nos ayuda a encontrar soluciones particulares de ecuaciones no homogéneas de coeficientes constantes, pero sólo cierto tipo de ecuaciones en donde la función $g(x)$ es muy particular, la siguiente tabla muestra las formas que puede tener la función $g(x)$ y como debe de ser la solución particular de la ecuación.

$g(x)$	Raíces de la ecuación característica	Forma de la solución particular ($K = máx(m, n)$)
$P_n(x)$ (polinomio de grado n)	El 0 no es raíz	$\widetilde{P_n(x)}$ (polinomio de grado n)
	El 0 es raíz de multiplicidad s	$x^s\widetilde{P(x)}$
$P_n(x)e^{\alpha x}$ (α es un número real)	El número α no es raíz	$P_n\widetilde{(x)e}^{\alpha x}$
	El número α es raíz de multiplicidad s	$x^s P_n(x)e^{\alpha x}$
$P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)$	Los números $\pm\beta i$ no son raíces	$\widetilde{P_k(x)}\cos(\beta x) + \widetilde{Q_k(x)}\sin(\beta x)$
	Los números $\pm\beta i$ son raíces de multiplicidad s	$x^s\left(\widetilde{P_k(x)}\cos(\beta x) + \widetilde{Q_k(x)}\sin(\beta x)\right)$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$	Los números $\alpha \pm \beta i$ no son raíces	$\left(\widetilde{P_k(x)}\cos(\beta x) + \widetilde{Q_k(x)}\sin(\beta x)\right)e^{\alpha x}$
	Los números $\alpha \pm \beta i$ son raíces de multiplicidad s	$x^s\left(\widetilde{P_k(x)}\cos(\beta x) + \widetilde{Q_k(x)}\sin(\beta x)\right)e^{\alpha x}$

Veamos un ejemplo para ilustrar como se utiliza la tabla anterior

Ejemplo:

Sea

Resolver la siguiente ecuación por el método de los coeficientes indeterminados:

$$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 3x + 6$$

Paso 1:

Se determina la ecuación homogénea:

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

La ecuación característica será:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Las raíces son:

$\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$

Por lo tanto, la solución a la ecuación homogénea será

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$$

Paso 2:

Identificamos que la función $g(x)$ tiene la forma de un polinomio de grado dos, por lo tanto estamos en el primer caso de nuestra tabla, ahora solo hay que identificar si el cero es o no solución de la ecuación característica, pues de eso depende como proponer la solución particular. En este caso el cero no es solución a la ecuación característica, por lo tanto y_p tendrá la misma forma de $g(x)$, es decir:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Derivando dos veces obtenemos que:

$$y_p' = 2Ax + B$$
$$y_p'' = 2A$$

Si sustituimos en la ecuación original:

$$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 3x + 6$$
$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3x + 6$$
$$2Ax^2 + 2Bx + 6Ax + 2A + 3B + 2C = 2x^2 - 3x + 6$$

Factorizando la expresión del lado izquierdo:

$$2Ax^2 + x(2B + 6A) + (2A + 3B + 2C) = 2x^2 - 3x + 6$$

Igualando ambos miembros de la igualdad tenemos las siguientes ecuaciones:

$$2A = 2, \qquad 2B + 6A = -3, \qquad 2A + 3B + 2C = 6$$

Resolviendo el sistema se tiene que

$$A = 1, \qquad B = \frac{-9}{2}, \qquad C = \frac{35}{4}$$

Por lo tanto.

$$y_p = x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{35}{4}$$

Así, la solución general será:

$$y_g = y_h + y_p = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{35}{4}$$

Ejemplo:

Consideremos la ecuación

$$y'' + 3y' = xe^{-3x}$$

Paso 1:

La ecuación homogénea es

$$y'' + 3y' = 0$$

Y su ecuación característica es

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

Resolviendo la ecuación se tiene que sus raíces son

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -3$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación homogénea es

$$y_h = c_1e^{0x} + c_2e^{-3x} = c_1 + c_2e^{-3x}$$

Paso 2:

Ahora identificamos que la función $g(x)$ tiene la forma de la segunda fila de nuestra tabla, es decir, es un polinomio de grado uno multiplicado por una exponencial, por lo tanto, sólo nos resta identificar la forma de la solución particular, para ello observamos que las raíces de la ecuación característica son ceo y menos tres. Como $\alpha = -3 = \lambda_2$ entonces de acuerdo con la tabla la solución particular lleva multiplicado x elevado a la multiplicidad de la λ_2 que en este caso es uno, así la solución que se propone es

$$y_p = x(Ax + B)e^{-3x}$$

Derivando dos veces esta expresión te tiene que

$$y'_p = e^{-3x}[-3Ax^2 + x(2A - 3B) + B]$$

$$y''_p = e^{-3x}[9Ax^2 + x(-14A + 3B)]$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación original se tiene que

$$y'' + 3y' = xe^{-3x}$$

$$e^{-3x}[9Ax^2 + x(-14A + 3B)] + 3e^{-3x}[-3Ax^2 + x(2A - 3B) + B] = xe^{-3x}$$

Simplificando del lado izquierdo de la ecuación se tiene que

$$e^{-3x}[x(8A - 6B) + 3B] = xe^{-3x}$$

Cancelando la exponencial en ambos lados de la última ecuación y por la igualdad entre polinomios se tiene que

$$8A - 6B = 1, \quad 3B = 0$$

Por lo cual se tiene que

$$A = \frac{1}{8}, \ \ B = 0$$

De esta manera la solución particular será

$$y_p = \ x\left(\frac{1}{8}x\right)e^{-3x} = \frac{1}{8}x^2e^{-3x}$$

Y de esta manera la solución general de la ecuación será

$$y_g = y_h + y_p = c_1 + c_2e^{-3x} + \frac{1}{8}x^2e^{-3x}$$

En los siguientes párrafos veremos un método para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas, pero con coeficientes variables y también de coeficientes constantes, pero en las cuales no se puede aplicar el método visto en la sección anterior. Dicho método se conoce como variación de parámetros. También analizaremos unas ecuaciones llamadas las ecuaciones de Euler.

Primero comenzaremos con el estudio de las ecuaciones de Euler, pues, aunque no son de coeficientes constantes se pueden aplicar cambios de variables para reducir las ecuaciones a ecuaciones de coeficientes constantes.

En general una **ecuación de Euler** tiene la forma

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

Donde $a_i, i = 1,2, \dots, n$ son contantes.

Para resolver este tipo de ecuaciones existen dos métodos, el primero de ellos consiste en hacer el siguiente cambio de variable

$$x = e^t$$

Mientras que en la segunda forma se hace el cambio de variable

$$y = x^k$$

Veamos con un ejemplo como aplicar ambos métodos

Ejemplo

Considera la ecuación

$$x^2 y'' + x y' - 20y = 0$$

Y consideremos el siguiente cambio de variable

$$x = e^t$$

Entonces

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

Y de manera similar

$$y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dy}\right)$$

Y sustituyendo estos valores en la ecuación original se tiene que

$$x^2y'' + xy' - 20y = 0$$

Se transforma en

$$(e^{2t})e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dy}\right) + (e^t)e^{-t}\frac{dy}{dt} - 20y = 0$$

Simplificando se tiene que

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 20y = 0$$

Esta última ecuación es una ecuación homogénea de coeficientes constantes.

Calculando su solución se tiene que

$$y_g = c_1e^{2\sqrt{5}t} + c_2e^{-2\sqrt{5}t} = c_1(e^t)^{2\sqrt{5}} + c_2(e^t)^{-2\sqrt{5}}$$

Y recordando que

$$x = e^t$$

Entonces la solución a nuestra ecuación será

$$y_g = c_1(x)^{2\sqrt{5}} + c_2(x)^{-2\sqrt{5}}$$

Ahora resolvamos la misma ecuación, pero con el cambio de variable

$$y = x^k$$

Entonces

$$y' = kx^{k-1}$$

$$y'' = (k^2 - k)x^{k-2}$$

Y sustituyendo estos valores se tiene que

$$x^2y'' + xy' - 20y = 0$$

$$x^2(k^2 - k)x^{k-2} + xkx^{k-1} - 20x^k = 0$$

Simplificando el lado izquierdo se tiene que

$$x^k(k^2-20)=0$$

Como buscamos soluciones de la forma $y=x^k$, entonces se debe de tener que

$$(k^2-20)=0$$

Resolviendo esta última expresión se tiene que $k_1=2\sqrt{5}, \quad k_2=-2\sqrt{5}$, por lo tanto, la solución general será

$$y_g=c_1x^{k_1}+c_2x^{k_2}=c_1(x)^{2\sqrt{5}}+c_2(x)^{-2\sqrt{5}}$$

Variación de parámetros

Supongamos que tenemos una ecuación de la forma

$$y^n+a_1(x\,)y^{n-1}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

Y supongamos que se conoce la ecuación general de la ecuación homogénea correspondiente $(f(x)=0)$, entonces sea

$$y_h=c_1y_1+\cdots+c_ny_n$$

La solución homogénea. Se busca una solución de la ecuación diferencial de la forma

$$y_g=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\cdots+C_n(x)y_n$$

Donde $C_i(x)$, $i=1,\ldots,n$ son funciones de la variable x.

Para determinar los valores de $C_i(x)$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c}
y_1{C'}_1+y_2C_2'+\cdots+y_n{C'}_n=0\\
{y'}_1{C'}_1+{y'}_2C_2'+\cdots+{y'}_n{C'}_n=0\\
{y''}_1{C'}_1+{y''}_2C_2'+\cdots+{y''}_n{C'}_n=0\\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots\\
y_1^{(n-1)}{C'}_1+y_2^{(n-1)}C_2'+\cdots+y_n^{(n-1)}{C'}_n=f(x)
\end{array}$$

Resolviendo el sistema con respecto a $C_i'(x), i=1,\ldots,n$, se tendrá que $\frac{dC_i}{dx}=\varphi_i(x)$ y resolviendo estas últimas ecuaciones por separación de variables se tiene que

$$C_i(x)=\int\varphi_i(x)dx+C_i$$

Un caso simple de analizar es cuando la ecuación original es de orden dos, es decir una ecuación de la forma

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

Pues en este caso si se resuelve el sistema correspondiente se tendrá que las soluciones de las $C_i(x)$ serán

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]} dx + C_1$$

Y

$$C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]} dx + C_2$$

Donde y_1, y_2 son las funciones de la ecuación homogénea y $W[y_1, y_2]$ es el Wronskiano de las funciones.

Ejemplo:

Consideremos la ecuación

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

En este caso $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, mientras que la ecuación homogénea es

$$y'' + y = 0$$

Resolviendo la ecuación homogénea se tiene que su solución es

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Por lo tanto $y_1 = \cos x$, $\quad y_2 = \sin x$. Entonces el Wronskiano de las funciones y_1, y_2 será

$$W[y_1, y_2] = det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1$$

Así podemos calcular los coeficientes $C_1(x)$ y $C_2(x)$ con las fórmulas vistas, es decir

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]} dx + C_1 = -\int dx + C_1 = -x + C_1$$

Y

$$C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]} dx + C_2 = \int \cot x \, dx + C_2 = \ln|\sin x| + C_2$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación

$$y_g = (-x + C_1)\cos x + (\ln|\sin x| + C_2)\sin x$$

Cierre de la unidad

Esta unidad fue muy extensa debido a que se necesitan bases sólidas para comprender los temas que se abordarán en la unidad III y en cursos avanzados de Ecuaciones Diferenciales. Es todo un reto el poder entender todos los métodos para resolver Ecuaciones Diferenciales, la única opción que se tiene es el practicar mucho hasta poder dominar los temas. Te invitamos a que pongas todo tu interés en el estudio y que siempre tengas tu ánimo en alto.

Fuentes de consulta

Básica:

- Espinosa, Canals, Muños, Pérez, Prado, Darío, Ulín (2010), *Ecuaciones diferenciales ordinarias,* México: Reverte.
- Kiseliov, Krasov, Makarenko, (2002), *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, México: Quinto Sol.
- Larson, R., (2009), *Matemáticas II Cálculo integral*. México: Mc Graw Hill.
- Picón, P., (2006), *Análisis conjunto,* México: Porrúa.
- Zill, D., (2008), *Ecuaciones diferenciales,* México: Mc Graw Hill.