Matemáticas

Cuarto Semestre

Ecuaciones Diferenciales I

Unidad 3. Transformada de Laplace

Clave
05142422/06142422

Universidad Abierta y a Distancia de México

DCEIT

índice

Índice de figuras

Presentación

En la primera y la segunda unidad aprendiste a utilizar los principios de ecuaciones diferenciales para resolver una ecuación diferencial ordinaria mediante varias técnicas de derivación y, también, a utilizar métodos algebraicos para resolver ecuaciones diferenciales lineales por medio de una ecuación característica. En esta tercera, unidad, aprenderás a utilizar las propiedades de la Transformada de Laplace para determinar una ecuación diferencial en un problema algebraico mediante las operaciones de derivación.

¿Para qué necesitamos la Transformada de Laplace?

Si analizamos el comportamiento dinámico de algunos procesos en la vida cotidiana (por ejemplo: controlar temperatura y humedad en un edificio, o el análisis de la suspensión de un automóvil) puede representarse de manera aproximada por el siguiente modelo general de comportamiento dinámico lineal:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = x(t)$$

La transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil para el análisis de sistemas dinámicos lineales; por ejemplo: en la transportación para controlar el movimiento de un vehículo de un lugar a otro de manera segura, o en la industria, para controlar el proceso de manufactura. Además, permite resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante una transformación en ecuaciones algebraicas y es una herramienta muy útil para resolver problemas que generan ecuaciones diferenciales muy complejas, que a menudo son difíciles de resolver. Este tipo de ecuaciones se origina durante el estudio de circuitos electrónicos, circuitos eléctricos y sistemas de control.

Unidad 3. Transformada de Laplace

Competencia específica

Utilizar las propiedades de la transformada de Laplace para resolver una ecuación diferencial mediante métodos algebraicos.

Logros

- Identificar las propiedades de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales en el origen.

Unidad 3. Transformada de Laplace

3.1. Definición de la Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$; entonces la integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} e^{-st} f(t)dt$$

Representa la Transformada de Laplace de la función $f(t)$

Es decir se hace una transformación de una función "f" que depende de "t" a otra función "F" que depende de "s":

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

Ejemplo:

Calcular la Transformada de Laplace de la función $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt = \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Por lo tanto se tiene que

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

Ejemplo 2:

Calcular la Transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{4t}$

$$\mathcal{L}\{e^{4t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{4t}dt = \int_0^\infty e^{-t(s-4)}dt = \left.\frac{-e^{t(s-4)}}{s-4}\right|_0^\infty = \frac{1}{s-4}$$

Por lo tanto $\mathcal{L}\{e^{4t}\} = \frac{1}{s-4}$

Como la Transformada de Laplace se obtiene a través de una integral, entonces debe cumplir con las mismas propiedades de las integrales. Por lo tanto, una primera propiedad de la transformada de Laplace será la linealidad, es decir;

$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$

3.1.1. Condiciones de existencia de la transformada de Laplace

Si queremos obtener la Transformada de Laplace de funciones como $f(t) = \frac{1}{t}$ o $f(t) = e^{t^2}$ observaremos que la integral no converge, es decir, no existe la transformada de Laplace. Para resolver este tipo de problemas se necesitan condiciones necesarias para garantizar que la transformada de Laplace exista, dichas condiciones son:

a) La función $f(t)$ debe ser continua por tramos en el intervalo $t \geq 0$ (esto significa que la función puede tener saltos de continuidad).

b) La función $f(t)$ debe ser de orden exponencial para $t \geq T$

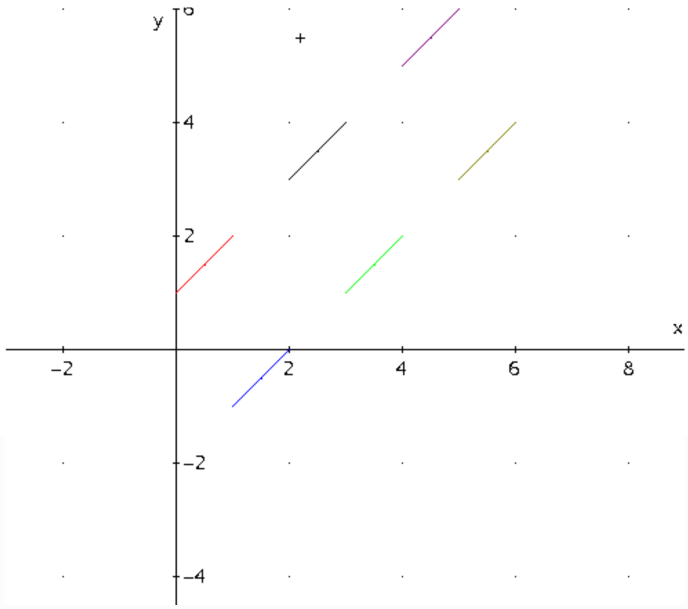

Figura 1. Gráfica de una función que es continua por tramos.

A continuación se analizarán las funciones $f(t) = t, f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = 2\cos t$ mediante sus gráficas, y se compararán con la función exponencial en un mismo sistema de ejes coordenados para ver si son de orden exponencial o no.

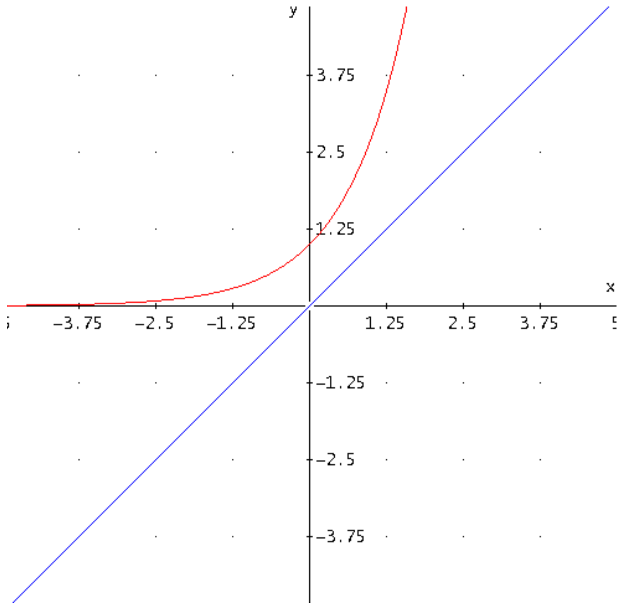

Figura 2. Gráfica de f(t)=t y f(t)=e^(-t)

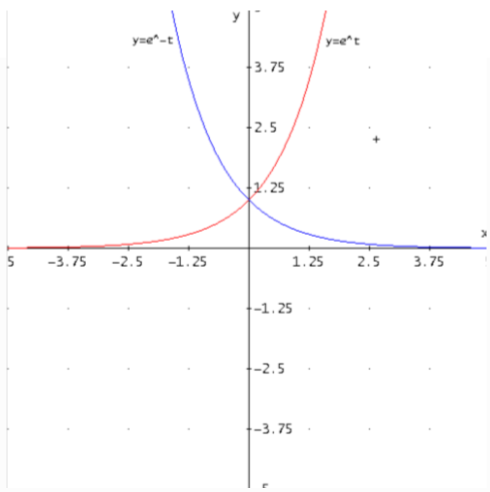

Figura 3. Gráfica de las funciones.

$f(t)=e^{t}$ y $f(t)=e^{-t}$

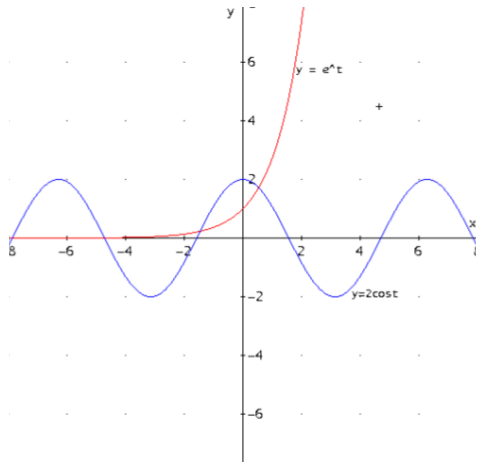

Figura 4. Gráfica de las funciones $f(t)=e^{-t}$ y $f(t)=2\cos t$

Observamos que las funciones $f(t) = t, f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = 2$ sí cumplen con las condiciones de existencia de la Transformada de Laplace, ya que las tres funciones son continuas por tramos en el intervalo $t \geq 0$; además, son funciones de orden exponencial porque las tres funciones crecen más lento que $f(t)=e^{t}$ al encontrarse por debajo de ella.

En cambio, una función del tipo $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial ya que crece más rápido que la función exponencial y se encuentra por encima de ella, como se observa en la fig. 4:

Por lo tanto, $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$ no existe.

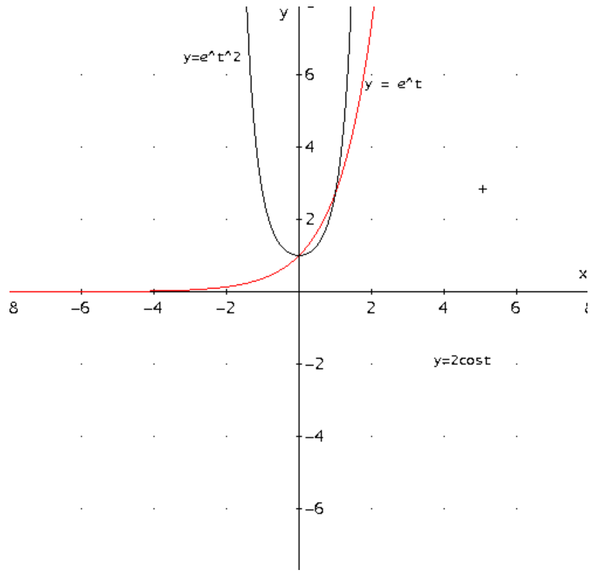

Figura 5. Gráfica de y=e^(t^2) y y=e^t

3.2. Propiedades de la transformada de Laplace

A continuación se muestra una tabla de transformadas de funciones básicas, la cual nos ahorra tiempo en el proceso de cálculo y las cuales puedes comprobar utilizando la definición de la transformada.

a) $\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}$, donde c es una constante
b) $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$
c) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$
d) $\mathcal{L}\{\sin(kt)\} = \frac{k}{k^2+s^2}$
e) $\mathcal{L}\{\sinh(kt)\} = \frac{k}{k^2-s^2}$

f) $\mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{k^2+s^2}$

g) $\mathcal{L}\{\cosh(kt)\} = \frac{s}{k^2-s^2}$

Ejemplo:

Determinar la transformada de la función $f(t) = t^2 + 6t - 3$

$$\mathcal{L}\{t^2 + 6t - 3\} = \mathcal{L}\{t^2\} + 6\mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{3\} = \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{3}{s}$$

Ejemplo:

Determinar $\mathcal{L}\{f(t)\}$, donde $f(t) = \sin(2t) + \cos(2t)$

$$\mathcal{L}\{\sin(2t) + \cos(2t)\} = \mathcal{L}\{\sin(2t)\} + \mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{2}{4+s^2} + \frac{s}{4+s^2}$$

Ejemplo:

Determinar la transformada de la función $f(t) = \sin^2 t$

Recuerda que

$$\sin^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin^2 t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{\cos(2t)}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{4+s^2}\right)$$

Ejemplo:

Determina el valor de $f(t) = \sinh(5t) + \cosh(3t)$

$$\mathcal{L}\{\sinh(5t) + \cosh(3t)\} = \mathcal{L}\{\sinh(5t)\} + \mathcal{L}\{\cosh(3t)\} = \frac{5}{25-s^2} + \frac{s}{25-s^2}$$

3.3. Transformada de Laplace de funciones a tramos

Para calcular la transformada de Laplace de funciones a tramos es necesario calcularla por la definición, para entender mejor este proceso veremos el siguiente ejemplo:

Determinar $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para la siguiente función por tramos:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 4, & t \geq 3 \end{cases}$$

Usando la definición de la transformada se tiene:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^3 0e^{-st}dt + \int_3^\infty 4e^{-st}dt$$

Resolviendo las integrales:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 0 - \frac{4}{s}e^{-st}\Big|_3^\infty = \frac{4}{s}e^{-3t}$$

Un aspecto importante que debes de notar es que la transformada de Laplace es un operador, es decir, toma funciones de la variable t y da como resultado funciones en la variable s ($\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$), por esta razón surge de manera natural la pregunta ¿Existirá un operador parecido al operador de Laplace que tome funciones en la variable s y entregue funciones en la variable t? O dicho de otra manera, ¿La transformada de Laplace tiene inversa? La respuesta a estas cuestiones es afirmativa, es decir, sí existe la transformada inversa de Laplace, sólo que las herramientas para definirla escapan de este curso, por tal razón sólo diremos como actúa y como realizar operaciones con ella, en particular se tendrá que es lineal en el mismo sentido de la transformada de Laplace. La transformada inversa de Laplace será representada por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Para entender la transformada inversa pensemos en la siguiente idea, si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. Consideremos el siguiente

Ejemplo:

Sea $f(t) = t^2$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3} = F(s)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = t^2 = f(t)$$

De esta manera si observas bien de la tabla anterior se pueden deducir de manera muy simple la transformada inversa de las funciones involucradas ahí.

Aunque hay que hacer una mención más, el cálculo de transformadas inversa es un poco más complicada e interesante que las transformadas directas ($\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$) veamos este hecho con un par de ejemplos.

Ejemplo:

Calcular la transformada inversa de la función

$$F(s) = \frac{1}{s^4}$$

Como puedes observar esta función no aparece en la tabla, pero se parece mucho a la función $\frac{n!}{s^{n+1}} = F(s)$, la cual sí tiene inversa directa cuando $n = 3$, de hecho la diferencia entre estas dos funciones es una constante, por esta razón a nuestra función original la multiplicaremos por 1 para poder completarla y que sea idéntica a la segunda. Así

$$F(s) = \frac{1}{s^4} = \left(\frac{3}{3}\right)\frac{1}{s^4} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{3}{s^4}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)\frac{3}{s^4}\right\} = \left(\frac{1}{3}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^4}\right\} = \left(\frac{1}{3}\right)t^3$$

Ejemplo:

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{25+s^2}\right\}$

En este caso la función $\frac{2}{25+s^2} = F(s)$ tampoco tiene transformada inversa directa, pero al igual que el ejemplo anterior sólo es necesario multiplicar por una constante para completar la transformada. Así

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{25+s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{5}{5}\right)\frac{2}{25+s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)\frac{5}{25+s^2}\right\} = \left(\frac{2}{5}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{25+s^2}\right\} = \left(\frac{2}{5}\right)\sin(5t)$$

3.4. Teoremas de la transformada de Laplace

Para poder entender de mejor manera los dos teoremas de translación, analizaremos primero la siguiente función.

La función escalón unitario $u(t-a)$ se define como:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases}$$

.

Ejemplo:

Traza las gráficas de

a) $u(t)$

b) $u(t-3)$

La grafica de la función del inciso a) será

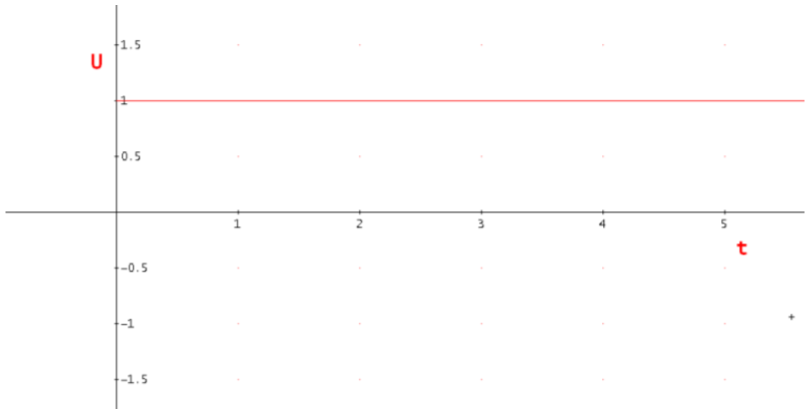

Figura 6. Grafica de la función u(t).

b) La función $u(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<3\\ 1, & t\ge 3\end{cases}$ tiene la siguiente gráfica

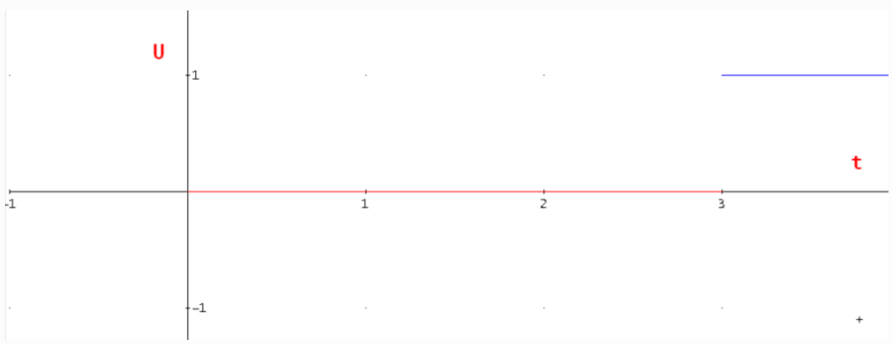

Figura 7. Gráfica de la función $u(t-3)$

De acuerdo con las gráficas anteriores, la función escalón unitario al ser combinada con otras funciones definidas para $t\ge 0$, "corta" una parte de sus gráficas; en este caso, la gráfica se corta en el intervalo [0,3] y en la gráfica de la siguiente función se corta en el intervalo $[0,2\pi]$.

$f(t)=\sin t\, u(t-2\pi)$, si $t\ge 0$, entonces se tiene que

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<2\pi\\ \sin t\,, & t\ge 2\pi\end{cases}$$

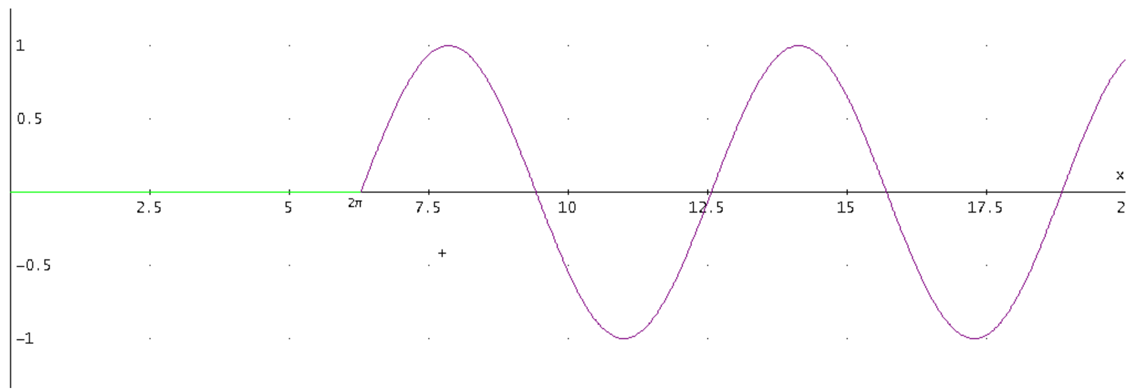

Figura 8. Gráfica de la función f(t).

De manera directa se tiene que la transformada de Laplace de la función unitario es

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Recuerda que en este caso

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = u(t)$$

Ahora ya estamos preparados para enunciar los dos teoremas de translación

Primer Teorema de Traslación

Si a es un número real cualquiera y $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{as}f(t)\} = F(s-a)$$

Este teorema también se conoce como translación en la frecuencia.

Ejemplo:

Determinar $\mathcal{L}\{f(t)\}$ si $f(t) = e^{2t}\cos 2t$, entonces por el primer teorema de translación se tiene que

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cos 2t\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\}|_{s\to s-2} = \frac{s}{4+s^2}\Big|_{s\to s-2} = \frac{s-2}{4+(s-2)^2}$$

Ejemplo 2:

Determinar la transformada inversa de la función $F(s) = \frac{3}{(s-6)^5}$

Entonces por el primer teorema de translación se tendrá que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-6)^5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s)^5}\right\}\Big|_{s\to s-6} = \frac{3}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s)^5}\right\}\Big|_{s\to s-6} = \frac{3}{4!}e^{6t}t^4$$

Segundo Teorema de la Traslación

Este teorema también se le conoce como traslación en el tiempo o eje t y establece que si f es función continua en tramos, a es una constante cualquiera y $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Ejemplo:

Determinar la transformada de la función $f(t-3)u(t-3)$, si $f(t) = e^{2t}$

Entonces

$$f(t-3)u(t-3) = e^{2(t-3)}u(t-3)$$

Por el segundo teorema de translación:

$$\mathcal{L}\{f(t-3)u(t-3)\} = \mathcal{L}\{e^{2(t-3)}u(t-3)\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{e^{2t}\} = e^{-3s}\frac{1}{s-2}$$

Ejemplo:

Determinar la transformada inversa de la función

$$F(s) = e^{-2s}\frac{s}{4-s^2}$$

Por el segundo Teorema de translación se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{s}{4-s^2}\right\} = \cosh(t-2)u(t-2)$$

3.4.1. Transformada de una derivada

El siguiente teorema será de mucha ayuda en ecuaciones diferencial con valores iniciales, pues dará una forma alterna a calcular soluciones de ecuaciones diferenciales con valores iniciales. Supongamos que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y que $f(t)$ es una función derivable n veces, entonces

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Y más generalmente

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \mathcal{L}\{(\sin t)'\} = s\mathcal{L}\{\sin t\} - \sin 0 = \frac{s}{s^2+1}$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial con valor inicial

$$y'' + 2y' + 4y = 0,$$

Con $y(0) = 1$ y $y'(0) = -2$

Solución Primero aplicamos la transformada de Laplace a toda la ecuación y obtenemos

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 4y\}=\mathcal{L}\{0\}=0$$

Y de las propiedades de la transformada y la transformada de una derivada se tiene que

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + 2[sY - y(0)] + 4Y = 0$$

$$[s^2Y - s + 2] + 2[sY - 1] + 4Y - s = 0$$

$$(s^2 + 2s + 4)Y = s$$

Por lo tanto:

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+2s+4)} = \frac{s}{(s+1)^2+3}$$

De esta manera se tiene que la solución a la ecuación será:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2+3}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2+3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)^2+3}\right\}$$

$$= e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3}\right\} - \frac{e^{-t}}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{s^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right\}$$

$$= e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}x\right) - \frac{e^{-t}}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x)$$

Así la solución a la ecuación diferencial con valores iniciales será

$$y(t) = e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}x\right) - \frac{e^{-t}}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}x)$$

3.4.2. Derivada de una transformada

A continuación conoceremos un caso contrario al anterior, es decir; el resultado previo nos permitía calcular la transformada de una derivada, ahora veremos cómo calcular la derivada de una transformada, pues como puedes observar, las funciones $F(s)$ que se obtienen después de aplicar la transformada de Laplace a funciones $f(t)$ son derivables, por tal razón se tiene el siguiente resultado:

Teorema (Derivada de una transformada)

Supongamos que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y que $F(s)$ es una función derivable, entonces

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\} = -F'(s)$$

Y más generalmente

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s).$$

El resultado anterior visto en la trasformada inversa de Laplace dice que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^n(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

Veamos un par de ejemplos para ver cómo utilizar estos resultados

Ejemplo:

Calcular la transformada de la función $f(t) = \text{t}\sinh(3t)$

Consideremos la función $f_1(t) = \sinh(3t)$ entonces

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \frac{3}{s^2 - 9} = F_1(s)$$

Combinando este último hecho con el teorema de la derivada de una transformada se tiene que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{tf_1(t)\} = -F_1'(s) = \left(\frac{3}{s^2 - 9}\right)' = \frac{-6s}{(s^2 - 9)^2}$$

3.4.3. Teorema de transformada de una integral

Para finalizar con las propiedades de la transformada de Laplace, vamos a ver como calcular la transformada de una integral, este resultado es muy importante para poder encontrar soluciones a ecuaciones integrodiferenciales, es decir, ecuaciones en donde la función incógnita se deriva y se integra en una misma ecuación. Para este propósito se necesita un resultado previo, el cual se conoce como el teorema de convolución, además, con este teorema también se podrán calcular transformadas inversas sin métodos algebraicos, pero el costo por quitar los métodos algebraicos será el calcular integrales.

Dicho lo anterior, comencemos con definir que es la convolución entre dos funciones.

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones, se define la convolución entre ellas como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(\tau - t)d\tau$$

Ejemplo:

Si $g(t) = t$ y $f(t) = e^{-t}$ entonces

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t e^{-\tau}(t - \tau)d\tau = t\int_0^t e^{-\tau}d\tau - \int_0^t e^{-\tau}(\tau)\tau d\tau$$

resolviendo las últimas integrales se tiene que

$$(f*g)(t) = 1 - e^{-t}$$

La siguiente propiedad de la convolución la puedes demostrar con un simple cambio de variable.

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones, entonces

$$(f*g)(t) = (g*f)(t)$$

Por otra parte, otros resultados muy importantes conforme a la convolución son los relacionados a la transformada de Laplace, y estos dicen lo siguiente

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones tales que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, entonces se tiene que

a) $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$
b) $\mathcal{L}^{-1}\{(F*G)(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = f(t)g(t)$

Estos resultados vistos con la transformada inversa se tiene que

a) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f*g)(t)$
b) $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = (F*G)(s)$

Ejemplo:

Sean $F(s) = \frac{1}{s^2}$ y $G(s) = \frac{2}{s^2+4}$

Entonces por el inciso a) de la transformada inversa se tendrá que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2}\right)\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f*g)(t)$$

Donde $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = t$ y $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) = \sin(2t)$

Por lo tanto al calcular

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(\tau - t)d\tau = \int_0^t \sin(2\tau)\,(t-\tau)d\tau$$

Se tendrá que

$$(f*g)(t) = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}$$

Un caso particular pero interesante del inciso a) es cuando la función $g(t) = 1$, pues en ese caso se puede calcular la transformada de una integral. De hecho se tiene que si $g(t) = 1$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)1d\tau\right\} = \mathcal{L}\{(f * 1)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{1\} = \frac{F(s)}{s}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Este resultado junto con el teorema de transformada de derivada nos ayudará a resolver problemas de ecuaciones integrodiferenciales como las que aparecen en el análisis de circuitos RCL.

Ejemplo:

Calcular la transformada de Laplace de la integral

$$\int_0^t \cosh(\tau)\, d\tau$$

Sin realizar la integral.

Para resolver esta transformada consideremos $f(t) = \cosh(t)$, entonces $\mathcal{L}\{\cosh(t)\} = \frac{s}{s^2-1}$

De esta manera se sigue del resultado previo que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cosh(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s^2 - 1}$$

Resuelve la siguiente ecuación

$y'(t) + \int_0^t y\,(\tau)d\tau = t$, con valor inicial $y(0) = 0$

Para resolver la ecuación primero aplicamos la transformada de Laplace en ambos lados, así

$$\mathcal{L}\left\{y'(t) + \int_0^t y\,(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{t\}$$

Separando la trasformada del lado izquierdo en dos y aplicando los teoremas de transformada de una derivada y transformada de una integral se tendrá que

$$sY - y(0) + \frac{Y}{s} = \frac{1}{s}$$

Simplificando se tiene que

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Por lo tanto la solución a la ecuación integrodiferencial será

$$y(t) = \mathcal{L}\{Y(s)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sinh t$$

Cierre de la unidad

En esta unidad, por medio de ejemplos y ejercicios, aprendiste a utilizar las propiedades de la Transformada de Laplace para determinar una ecuación diferencial en un problema algebraico mediante las operaciones de derivación. Ahora puedes identificar sus propiedades para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales en origen y utilizarlas para determinar la suma de las transformadas en cada término mediante un operador lineal y, además, analizar cómo afecta a las Transformadas una traslación en las variables, así como los cambios en escala.

Puede parecer complejo, pero con la práctica te darás cuenta de que hasta es divertido y que al trabajar (o jugar) con números, estás desarrollando tus capacidades intelectuales. Por ello, te invitamos a continuar tus estudios con perseverancia.

Para saber más

	Tareasplus (5 de marzo de 2012). Transformada de Laplace de la función constante. [Archivo de video] YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=gSWBrZQGxpQ

Fuentes de consulta

Básica

- Espinosa, Canals. Muños, Pérez, Prado, Darío, Ulín (2010), *Ecuaciones diferenciales ordinarias,* México: Reverte.
- Kiseliov, Krasov, Makarenko, (2002), *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, México: Quinto Sol.
- Larson, R., (2009), *Matemáticas II Cálculo integral*. México: Mc Graw Hill.
- Picón, P., (2006), *Análisis conjunto,* México: Porrúa.
- Zill, D., (2008), *Ecuaciones diferenciales,* México: Mc Graw Hill.