MATEMÁTICAS

ANÁLISIS COMBINATORIO

5º SEMESTRE

UNIDAD 1. ¿QUÉ ES EL ANÁLISIS COMBINATORIO?

Clave

05143526

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Unidad 1. ¿Qué es el análisis combinatorio? 3

Presentación de la unidad 3

Competencia específica 3

Logros 4

1.1. Antecedentes 4

1.1.1. Breve reseña histórica y ejemplos 5

1.1.2. Reglas de la suma y el producto 9

1.2. Los números naturales 12

1.2.1. Propiedades de los números naturales 12

1.2.2. Principio de cajas 17

1.3. Combinatoria básica 19

1.3.1. Permutaciones. Definición de factorial 19

1.3.2. Ordenaciones: con y sin repetición 23

1.3.3. Combinaciones. Teorema del binomio y definición de coeficiente binomial 27

Cierre de la unidad 36

Para saber más 37

Fuentes de consulta 38

Figura 2. Posiciones de las personas sentadas en una mesa redonda 22

Unidad 1. ¿Qué es el análisis combinatorio?

Presentación de la unidad

El Análisis combinatorio es una de las áreas más relevantes de las Matemáticas de nuestros días. Ha tenido un progreso extraordinario en el último siglo y una de las principales causas de este fenómeno es la enorme cantidad de aplicaciones que tiene en casi todas las áreas del conocimiento humano.

En esta unidad aprenderás cuál es el objetivo esencial del Análisis combinatorio y algunas de sus principales estrategias de trabajo. Ya en tus cursos de Introducción al álgebra superior e Introducción al pensamiento matemático aprendiste las propiedades de los números naturales y enteros, Inducción matemática y algunas técnicas de conteo que usarás aquí para profundizar en usos más avanzados.

Competencia específica

Utiliza los fundamentos del conteo para resolver problemas que requieran identificar y contar colecciones específicas de objetos, utilizando las propiedades de los números naturales y los conceptos básicos de combinatoria.

Logros

- Comprender los conceptos del análisis combinatorio y sus técnicas de conteo mediante ejercicios y resolución de problemas.
- Diferenciar y aplicar los métodos o tipos de técnicas de conteo, aplicando las fórmulas adecuadas para resolver problemas en diversos ámbitos.
- Emplear los conceptos básicos que se requieren en el estudio de la teoría de gráficas.

1.1. Antecedentes

El Análisis combinatorio es una de las áreas de la matemática moderna de más acelerado desarrollo y esto se debe quizá, a la enorme cantidad de aplicaciones que ha tenido en las comunicaciones, transportes, genética, diseño experimental, calendarización y programación de horarios, entre muchas otras áreas del saber humano. Sin embargo, las Ciencias de la computación y la Teoría de algoritmos han sido, sin lugar a dudas, las más beneficiadas de este proceso. Y es que el desarrollo tecnológico de las computadoras y el inmenso poder de procesamiento que tienen en nuestros días han hecho posible implementar soluciones a problemas combinatorios prácticos de una amplia variedad de campos, soluciones que no habían logrado implementarse hasta muy recientemente, se intensifica entonces la búsqueda de más soluciones a problemas de esta área y su solución permite el avance en computación y Teoría de algoritmos, creando así una acelerada marcha sinfín y una interesante simbiosis entre ramas de las matemáticas que interactúan y se retroalimentan.

Una de las herramientas fundamentales usadas por el Análisis combinatorio es precisamente la combinatoria que es la rama de la Aritmética que se ocupa esencialmente de contar objetos. La mayoría de las veces estos objetos pertenecen a conjuntos discretos (como los números naturales o los enteros) o incluso finitos. Esto hace que los problemas en esta área sean inquietantes por no decir que engañosos: con frecuencia aparentan ser sencillos y pueden ser explicados simplemente sin necesidad de terminología especializada, sin embargo, también pueden ser muy difíciles de resolver. Aunque la combinatoria no es un área nueva de las matemáticas, durante siglos fue relegada. En las siguientes secciones conocerás un poco de la historia de esta versátil área y los dos principios básicos subyacentes a prácticamente todos los resultados combinatorios existentes: las reglas de la suma y el producto.

1.1.1. Breve reseña histórica y ejemplos

El conteo o enumeración de objetos es, a grandes rasgos, el objetivo de la **Combinatoria,** una rama de la aritmética que hasta hace muy poco tiempo –alrededor de un siglo- era considerada como simple recreación matemática. Hasta antes del siglo XX, la actitud generalizada de los estudiosos sugería que **contar objetos** era un asunto ocioso, muy poco formal como para ser tomado en serio, “Las Matemáticas” eran el Cálculo, la Geometría, el Álgebra o sus ramificaciones (las serias por supuesto): Topología, Trigonometría, Geometría diferencial o algebraica, Variable compleja, etc. No fue sino hasta bien entrado el siglo XX, con el advenimiento de las computadoras y el acelerado desarrollo de la tecnología, que esta área, y en general las ramas **discretas**, de las matemáticas comenzaron a ser revaloradas por lo enorme y profundo de sus aplicaciones.

Sin embargo, aún en nuestros días permanece en muchos la idea de que contar **objetos** es algo innecesario: un proceso elemental aprendido en la enseñanza básica y al que después se puede desatender. Como si el conteo fuese una parte simple o poco importante de las matemáticas.

Y ya que la Combinatoria es pieza medular del Análisis combinatorio deberíamos tener suficientemente claro cuál es su objeto de estudio. La combinatoria trata del estudio de: **arreglos, patrones, diseños, conexiones, horarios, calendarizaciones, ordenamientos, configuraciones y asignaciones.**

Actualmente, casi en cualquier actividad humana habrá necesidad de resolver algún problema de naturaleza combinatoria:

- El supervisor de una fábrica que planea **asignaciones** de trabajadores a máquinas o áreas de trabajo,
- El ingeniero eléctrico que analiza diferentes alternativas de **configuraciones** para un circuito eléctrico,
- El banquero que estudia **patrones** para transferencias electrónicas de fondos,
- El ingeniero espacial que investiga cómo tales **patrones** pueden transferirse como mensajes entre satélites distantes,
- El ingeniero industrial que evalúa diferentes **calendarizaciones** de producción que maximicen la eficiencia de la producción,
- El encargado de la elaboración de **horarios** en una universidad que necesita abrir todos los grupos que deben estar disponibles en un semestre de manera que estén disponibles para la mayoría de los estudiantes,
- El químico que considera posibles **conexiones** entre varios átomos y moléculas y **ordenamientos** de átomos dentro de una molécula dada,
- El lingüista que analiza **arreglos** de palabras en alfabetos desconocidos,
- El genetista que estudia **arreglos** de bases dentro de cadenas de ADN, ARN, etc.,
- El estadístico que analiza y compara diferentes alternativas de **diseños** para un experimento.

Y así podríamos seguir enumerando muchos ejemplos más en los que el Análisis combinatorio aporta alguna estrategia para analizar, estudiar y resolver la situación presentada.

Existen tres tipos de problemas básicos que resuelve el Análisis combinatorio:

1. **de existencia:** en este caso se trata de responder a la pregunta ¿Existe algún arreglo (ordenamiento, colección, configuración, etc.) de un cierto tipo?

2. **de conteo (o enumeración):** aquí la pregunta a responder es ¿Cuántos de tales arreglos existen?
3. **de optimización:** en este caso se busca encontrar, de entre todos los arreglos existentes, **el mejor**, bajo cierto criterio específico

En este curso nos centraremos principalmente en tratar temas de Análisis combinatorio que tienen que ver con la resolución de problemas de los primeros dos tipos.

Contar es una actividad ancestral

Ciertamente el desarrollo tecnológico ayudó al avance del Análisis combinatorio al entrar en juego herramientas de cálculo poderosas. Antes de la llegada de la computadora, si un problema requería de la elaboración de una cantidad inmensa de cálculos, una vida humana no era suficiente para realizarlos y simplemente se consideraba como insoluble.

La computadora permitió el avance vertiginoso de esta área, pero también recibió sustanciosos frutos de tal avance, ciertamente las Ciencias de la computación han sido de las más beneficiadas con los resultados obtenidos por el Análisis combinatorio y otras áreas teóricas cercanas: la Teoría de gráficas, el Análisis y diseño de Algoritmos, la Geometría computacional y la Teoría de códigos por mencionar sólo algunas.

Sin embargo, la Combinatoria es una actividad humana ancestral. Se tiene registro de permutaciones de arreglos descubiertos en China que datan del año 1100 antes de nuestra era. La expresión binomial $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, aparece en la obra de Euclides del año 300 a.e. para *n=2,* aunque el término **coeficiente binomial** fue introducido por Michel Stifer hasta el siglo XVI, en su obra *Arithmetica Integra,* en donde presenta los coeficientes binomiales hasta *n=17.* Se sabe que en el año 1100 a.e., Rabbi Ibn Ezra conocía la fórmula de este coeficiente y hay evidencia de trabajos chinos, hindús y árabes en los que se también se menciona de una manera incipiente (N., 1962).

El concepto de permutación se puede encontrar en la obra *Sefer Yetzirah (*El libro de la creación*),* un manuscrito hebreo anónimo escrito entre el año 200 y 600. Ya antes un resultado de Xenócrates de Calcedonia (394-314 a.e.) podría contener “el primer intento por registrar la solución de un problema difícil de permutaciones y combinaciones” (Biggs, 1979)

En el siglo XVII Pascal y Fermat estudiaron problemas combinatorios relacionados con juegos, entre otras cosas (el famoso Triángulo de Pascal era conocido ya en China por Chu Shih-Chieh en 1303). Pascal publica, en la década de 1650, un tratado acerca de las relaciones entre coeficientes binomiales, combinaciones y polinomios, resultados que fueron después utilizados por el matemático suizo Jakob Bernoulli para demostrar la forma general del teorema del binomio. La utilización del símbolo $\binom{n}{k}$, inició en el siglo XIX cuando fue introducido por Andreas von Ettinghausen.

Los trabajos de Pascal y Fermat sentaron las bases para el desarrollo de la Teoría de la Probabilidad, en el siglo XVIII Laplace definió la probabilidad de un evento en términos del número de casos favorables a que éste ocurra.

También en el siglo XVIII se produce el nacimiento de la Teoría de gráficas cuando Euler resuelve el famoso problema de **Los puentes de Königsberg***.* En el mismo siglo, se publica el “primer libro de texto” que presenta métodos del Análisis Combinatorio, se trata del *Ars Conjectandi* de Jakob Bernoulli.

En los siglos XVIII y XIX las técnicas combinatorias son aplicadas principalmente para resolver acertijos y juegos, es quizá por esto que esta área perdió su seriedad siendo considerada simple recreación matemática. No obstante, en el siglo XIX Kirchhoff desarrolla un modelo de Teoría de gráficas para representar circuitos eléctricos y Cayley expone técnicas de enumeración para estudiar química orgánica.

1.1.2. Reglas de la suma y el producto

En estos dos principios de conteo están basados la gran mayoría de los resultados que conocerás posteriormente. Sus enunciados son bastante sencillos, esencialmente se basan en la idea de descomponer un problema más complejo en partes o pedazos que puedan ser resueltos de manera más simple para ser posteriormente "acomodados" y llevarnos a una solución del problema original.

Regla de la suma. Si una primera tarea puede realizarse de m formas y una segunda tarea puede realizarse de n formas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces es posible realizar alguna de las dos tareas de $m + n$ formas.

Ejemplo 1. En tu casa deben realizarse ciertas reparaciones: hay una gotera en el techo, un vidrio roto de una ventana y un foco fundido de una lámpara. Además el comité vecinal te pide que colabores con ciertos arreglos en la calle: limpieza de fachadas y colocación de anuncios de seguridad. Tú has pensado dedicar una tarde de la semana para hacer alguna de estas actividades. Solamente te alcanzará el tiempo para hacer una de las actividades ¿de Cuántas formas puedes elegir qué actividad hacer?

Respuesta: hay 3+2=5 formas posibles, las 3 actividades en casa más las dos actividades en la calle.

Otra manera de enunciar este principio es la siguiente:

Si es posible elegir un objeto *A* de *m* formas y otro objeto *B* de *n* formas la elección de *A* o *B* se puede efectuar de *m*+*n* formas.

Observemos que cuando aquí hablamos de "formas" siempre estamos suponiendo que son distintas. Es claro además que la regla puede ampliarse a más de dos tareas siempre que no haya pares de tareas que puedan ocurrir simultáneamente.

En el segundo enunciado cada objeto se elige de un cierto conjunto y los conjuntos son ajenos (no tienen elementos en común). En este caso también es posible hacer elecciones de más de dos objetos si los conjuntos de donde tomamos los objetos son ajenos *2 a 2*, es decir, cada pareja de conjuntos es ajenos.

Ejemplo 2. Si en la biblioteca de la UnADM hay 10 títulos de Matemáticas discretas, 8 de Análisis matemático, 6 de Cálculo integral y 8 de Álgebra entonces, por la regla de la suma un estudiante de esta universidad puede elegir de 10+8+6+8=32 formas distintas algún libro de estos temas.

Ejemplo 3. La cafetería más cercana anuncia que ha incluido pastelería en su menú. Dice que tiene 5 tipos distintos de panqués, 12 clases de galletas y rebanadas de 7 pasteles diferentes.
Por la regla de la suma ahora cada consumidor podrá agregar a su elección de café 5+12+7=24 opciones distintas de pastelería.

Regla del producto. Si una tarea puede realizarse en dos etapas y la primera etapa puede realizarse de m formas y si, para cada una de ellas, la segunda etapa puede realizarse de n formas entonces la tarea completa puede realizarse de mn formas.

Ejemplo 4. Si en la cafetería del ejemplo anterior se ofrecen además 6 bebidas calientes y 5 frías ¿Cuántas elecciones de una bebida y una pieza de pastelería existen?
Claramente ésta es una tarea de dos etapas: en la primera hay que elegir una de entre 6+5=11 posibles bebidas. En la segunda hay que elegir una de entre 24 opciones de pastelería.
En total hay (11)(24)=264 elecciones posibles.

Ejemplo 5. ¿Cuántos números de 3 cifras pueden formarse con los dígitos 1,4 y 7?
Esta tarea tiene tres etapas: la elección de la primera cifra, la elección de la segunda y la elección de la tercera. Cada elección tiene 3 opciones posibles por lo que la respuesta es (3)(3)(3)=27 números cumplen los requisitos.

Ejemplo 6. En tu curso de Matemáticas discretas aprendiste a usar el **código binario** que es la representación de números mediante cadenas de bits *(bit: binary digit)*, es decir, sucesiones formadas solamente con los dígitos 1 y 0. ¿Cuántas cadenas de cuatro bits existen?
Hay dos opciones para la primera opción de la cadena: 0 ó 1; dos para la segunda, dos para la tercera y dos para la cuarta. En total (2)(2)(2)(2)=$2^4 = 16$ cadenas de tamaño cuatro.

Ejemplo 7. Las placas de un automóvil en la Ciudad de México constan de 3 números seguidos de 3 letras.

1) Si en las placas no se usa la letra Ñ ¿Cuántas placas se pueden hacer sin repetir letras o dígitos?
   Hay 10 dígitos y 26 letras disponibles (*a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z)*. Si no se pueden repetir ningún dígito o letra, habrá (10)(9)(8)(26)(25)(24)= 11,232,000 placas posibles.

2) ¿y si se permite la repetición?
   Si pueden repetirse dígitos o letras, habrá (10)(10)(10)(26)(26)(26)=17,576,000 placas.

3) Permitiendo repeticiones ¿cuántas placas se pueden hacer usando únicamente vocales y dígitos impares?
   Habrá $5^3 5^3 = 5^6 = 15625$ placas.

Ejemplo 8. En tu curso de Computación I aprendiste que en la memoria principal de cualquier computadora la información se almacena en **celdas de memoria** cada una de las cuales tiene asignada una **dirección** para que los programas puedan acceder a ella. Todas las celdas tienen el mismo número de bits y si una celda tiene k bits, por la regla del producto, es fácil ver que esta celda podrá ser usada para almacenar hasta 2^k direcciones: cada bit tiene dos posibles valores, 0 ó 1, entonces

$$\underbrace{(2)(2)(2)\ldots(2)}_{k\ veces} = 2^k.$$

1.2. Los números naturales

En tus cursos de Introducción al Álgebra superior e Introducción al pensamiento matemático conociste los números naturales, sus operaciones, estructura y algunas de sus más importantes propiedades como el Principio de inducción matemática y el Principio del buen orden.
Es importante que recuerdes estos conceptos para entender los siguientes temas.

1.2.1. Propiedades de los números naturales

El conjunto de los números naturales es $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ y tiene dos operaciones bien definidas: la suma y el producto. Ambas son cerradas, o sea que la suma de dos números naturales es nuevamente un número natural y el producto de dos naturales también es un natural; además son asociativas y conmutativas, esto significa que si $n, m, o \in \mathbb{N}$, se satisfacen:

1) $n + (m + o) = (n + m) + o$

2) $n(mo) = (nm)o$

3) $n + m = m + n$

4) $nm = mn$

Para describir sumas con muchísimos sumandos es frecuente que usemos la notación **sigma**, que nos permite abreviar su escritura. Por ejemplo:

$$1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n=\sum_{k=1}^{n} k$$

Aquí los sumandos están definidos explícitamente, sin embargo, hay ocasiones en los que no los conocemos, pero podemos indicarlos como elementos de alguna sucesión:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Gracias a las propiedades de asociatividad y conmutatividad de la suma de los números, estas sumas (o sumatorias) cumplen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=j+1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{j} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} r a_k = r \sum_{k=1}^{n} a_k$$

De esta misma forma es posible definir sumas con una infinidad de sumandos, se llaman series y ya has tenido oportunidad de conocerlas cuando las estudiaste en tus cursos de Cálculo diferencial e integral. Así, por ejemplo, para la **suma aritmética** que presentamos inicialmente,

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

hay una expresión como serie (suma infinita),

$$\sum_{k=1}^{\infty} k$$

Aquí la diferencia esencial es que la primera suma tiene un valor claramente definido para cada $n \in \mathbb{N}$, pues sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Mientras que, la serie no está definida, es lo que se conoce como una **serie divergente**. En esta unidad y en la siguiente, usarás frecuentemente las siguientes sumas y series y con ellas podrás deducir otras que te serán de mucha utilidad:

	Suma (finita)	Serie (infinita)
Aritmética	$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ en general, si $\{a_i\}$ es una progresión aritmética, $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	$\sum_{i=1}^{\infty} i = \infty$ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$
Geométrica si $-1 < r < 1$	$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ $\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r(1 - r^n)}{1 - r}$	$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1 - r}$ $\sum_{i=1}^{\infty} r^i = \frac{r}{1 - r}$

Estas identidades se pueden demostrar fácilmente usando inducción matemática, que es una de las características más importantes de los números naturales y es utilizada como herramienta para demostrar propiedades que se cumplen en subconjuntos infinitos de números naturales.

Si hay que demostrar que cierta propiedad $\wp$ se satisface en un subconjunto infinito $S \subset \mathbb{N}$, el **Principio de Inducción Matemática** permite realizar la demostración sobre S haciendo uso de las propiedades de $\mathbb{N}$:

- sabemos que los elementos de S están **bien ordenados**, que cada uno de ellos tiene un sucesor y que S tiene un elemento mínimo n_0.

La demostración por inducción consiste en demostrar que $\wp(n_0)$ es verdadera –base de la inducción-, suponer que $\wp(n_k)$ es verdadera para algún $n_k \in S$ –hipótesis de inducción- y demostrarla para $n_k + 1$, el sucesor de n_k es decir, hay que demostrar que $\wp(n_k + 1)$ también es verdadera (usando la hipótesis de inducción).

Los siguientes ejemplos muestran la manera de usar esta herramienta.

Ejemplo 1. Demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Aquí la propiedad $\wp$ que debemos demostrar es que esta identidad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, así que el conjunto S es todo $\mathbb{N}$.

Iniciamos demostrando la validez de la identidad para **n=1:**

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \frac{4}{4} = 1$$

Supongamos ahora que la identidad es cierta para algún $k \in \mathbb{N}$, y demostremos que también lo es para $k+1$, es decir, nuestra hipótesis de inducción será que:

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

y usando esto debemos demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Así que hagámoslo. Partiendo del lado izquierdo de la igualdad, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + \sum_{i=k}^{k+1} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2\big(k^2+4(k+1)\big)}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

■

Hemos demostrado la identidad para todos los naturales.

Ejemplo 2. Demostrar que 4 divide a $5^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora la propiedad $\wp$ por demostrar es que $5^n - 1$ es múltiplo de 4 (eso significa que sea divisible por 4) para todo $n \in \mathbb{N}$. Nuevamente el conjunto S es todo $\mathbb{N}$.

Iniciamos demostrando la propiedad para *n=1:*

$5^1 - 1 = 4$ Que claramente es múltiplo de 4, por lo tanto, es válida para *n=1.*

Supongamos que la propiedad es cierta para algún $k \in \mathbb{N}$, y demostremos que también lo es para $k+1$, es decir, nuestra hipótesis de inducción será que:

$$5^k - 1 = 4q, \qquad para\ algún\ \ q \in \mathbb{N}$$

Usando este hecho debemos demostrar que:

$$5^{k+1} - 1 = 4r, \qquad para\ algún\ \ r \in \mathbb{N}$$

Hagámoslo:

$$5^{k+1} - 1 = 5(5^k) - 1 = (1+4)(5^k) - 1 = (5^k) + 4(5^k) - 1$$

Por la conmutatividad y asociatividad de la suma, podemos reacomodar los sumandos de esta expresión así:

$$= (5^k - 1) + 4(5^k)$$

Para hacer evidente que por hipótesis de inducción:

$$= 4q + 4(5^k) = 4(q + 5^k)$$

Hemos demostrado que $5^n - 1$ es múltiplo de 4 para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.2.2. Principio de cajas

Una de las herramientas más útiles del Análisis combinatorio es el llamado Principio de cajas, cuyo enunciado dice:

> **Principio de Cajas.** Si *n+1* objetos se acomodan en *n* cajas entonces existe una caja en la que hay al menos dos objetos.

También es conocido como **principio de Dirichlet** o **principio del palomar***:*

- Si *n* palomas se distribuyen en *m* palomares, y *n* > *m*, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.

Demostración.

Evidentemente, el número de cajas es un número natural así que procederemos por inducción. La propiedad $\wp$ a demostrar es el principio de cajas y el conjunto que lo satisface es $\mathbb{N}$. La base de la inducción será demostrar que $\wp(1)$ es válida.

Si *n=1*, tenemos una sola caja y dos objetos. La única manera de acomodarlos es colocando ambos objetos dentro de la caja, con lo que tenemos, trivialmente que el principio se cumple: hay una caja con al menos dos objetos dentro.

Hipótesis de inducción*:* Supongamos que el principio se cumple para *k* cajas, siempre que acomodemos *k+1* objetos en ellas habrá una caja con al menos dos objetos en ella.
Demostremos ahora que el principio también se cumple para *k+1* cajas en las que acomodaremos *k+2* objetos. Hagámoslo:
Tomamos una caja y un objeto cualquiera, no importa- y los separamos de la colección. Una vez separados, en la colección original restan *k* cajas y *k+1* objetos. Por la hipótesis de inducción sabemos que al acomodar los *k+1* objetos en las *k* cajas, habrá una caja con más de un objeto en ella. Ahora devolvamos a la colección la caja y objeto que habíamos separado, con el objeto dentro de la caja, entonces el principio se cumple también para la colección original.

Unos ejemplos de la aplicación de este principio:

1) En cualquier grupo de tres personas al menos dos son del mismo género.
2) Todo mes del año tiene al menos 4 lunes ¿puede algún mes solamente tener 3 días lunes? ¿podría tener 5 ó 6?
3) En cualquier mano de póker siempre hay al menos dos cartas del mismo palo
4) Un grupo de 20 personas tiene al menos dos de ellas que cumplen años el mismo mes.
5) Todo conjunto de seis enteros contiene al menos dos que al dividirse por 5 dan el mismo residuo.
6) En la ciudad de Campeche existen dos personas con la misma cantidad de cabellos en la cabeza.

1.3. Combinatoria básica

En esta sección usarás las estrategias elementales del conteo. Partiremos de un conjunto finito de objetos, con ellos formaremos **sucesiones finitas**, y las contaremos. A estas sucesiones les llamamos **ordenaciones** y pueden ser con repetición o sin repetición. Un caso particular de ellas son las **permutaciones**.

También podemos formar subconjuntos que cumplan ciertas características y contarlos. En este caso el orden en que se encuentren los objetos no importa. A estos subconjuntos les llamamos **combinaciones,** los contarás usando el conocido **Triángulo de Pascal** y el coeficiente binomial

En tu curso de Introducción al álgebra superior ya estudiaste algunos de estos conceptos, por lo que seguramente los recordarás con los ejemplos. Para cada uno de ellos existe una fórmula que brinda el resultado en términos de dos parámetros:
El tamaño del conjunto
El tamaño de la sucesión o subconjunto que se cuenta.
Estas fórmulas te ayudarán a obtener la solución, aunque con frecuencia deberás aplicar tu ingenio y creatividad para encontrar un método de enumeración que sea efectivo. Lo que es muy importante que aprendas en esta parte de la unidad es que para resolver un problema de conteo hay que identificar si hay repeticiones o si el orden importa.

1.3.1. Permutaciones. Definición de factorial

Cuando aprendiste las reglas del producto y la suma en las secciones anteriores, uno de los ejemplos pedía contar todos los números de tres cifras que pueden hacerse con los dígitos 1,4 y 7 ¿Qué ocurre si pide ahora contar solamente aquellos de estos números que no tengan cifras repetidas? Es decir, de los 27 números de tres cifras que pueden formarse con los dígitos 1,4 y 7, ¿Cuántos de ellos tienen las tres cifras distintas?

Veamos, ahora el razonamiento es un poco diferente: antes podemos plantear el problema como una tarea de tres etapas en la que en cada etapa elegimos una cifra. La elección de la primera cifra tiene tres opciones posibles –los tres dígitos disponibles- pero la elección de la segunda cifra tiene solamente dos opciones pues ya no puede usarse el dígito elegido para la primera posición, del mismo modo para le elección de la última cifra queda únicamente una opción: el dígito que no fue elegido ni en la primera ni en la segunda cifra.
Así, la respuesta será (3)(2)(1)=6 hay seis números de tres cifras distintas formados con los dígitos 1,4 y 7.

En realidad, lo que hemos hecho ha sido contar todas las **permutaciones** posibles de los dígitos 1,4 y 7, o sea todas las posibles maneras de acomodarlos linealmente (es decir, alineados, formaditos en una fila). Las listas de estos acomodos son:

$$147, 174,$$
$$417, 471,$$
$$714, 741$$

A las permutaciones también se les suele llamar **ordenaciones** precisamente porque son las maneras posibles de ordenar linealmente *n* elementos. En este ejemplo viste que hay 6 permutaciones de tres números.
Supongamos ahora que cuatro personas tienen cuatro boletos numerados para ir al teatro –estamos suponiendo que los cuatro boletos corresponden a cuatro asientos consecutivos en la misma fila- ¿de cuántas formas pueden sentarse? Observa que nuevamente se trata de un problema de contar permutaciones. Siguiendo un razonamiento similar al anterior:

- 4 opciones para que la primera persona elija un asiento
- 3 opciones para que la segunda persona elija un asiento
- 2 opciones para que la tercera persona elija un asiento
- 1 opción que la cuarta persona elija un asiento

Hay (4)(3)(2)(1)=24 formas diferentes en que estas personas se sienten el día de la función. Esto quiere decir que hay 24 permutaciones de cuatro objetos. ¿Y si ahora quieres contar las permutaciones de 5 objetos? ¿Crees que haya (5)(4)(3)(2)(1)? ¿Te recuerda esto el Principio de inducción matemática?

En general, se tiene que

- El número de permutaciones de ***n*** objetos es ***n(n-1)(n-2)…(3)(2)(1)***

Este número, de gran trascendencia, en el Análisis combinatorio es la factorial **de un número,** y lo presentamos aquí en una agradable definición recursiva:

Definición. Factorial de n. Sea $n \in \mathbb{N}$, definimos:

a. $0! = 1$

b. $n! = (n-1)!\,(n)$

Ejemplo 1. Si tenemos las letras *b, c, e, j, m, s, p,* ¡sabemos que hay 7. formas distintas de acomodarlas linealmente, es decir, 7! permutaciones. ¿Cuántas de ellas inician con la letra *m*? ¿Y cuántas inician con la letra *m* y terminan con la letra *c*?

Para contar todas las ordenaciones lineales que inician con *m* dejamos esa letra fija al inicio de la ordenación. Cualquier permutación de las restantes seis letras es una de las que queremos contar, entonces hay 6. Para responder a la segunda pregunta, ahora, fijamos las letras *m* y *c* al inicio y final de la ordenación y nos quedan cinco letras por acomodar, entonces hay 5 ordenaciones que inician con *m* y terminan con *c.*

Ejemplo 2. Una empresa manufacturera requiere cubrir un puesto vacante y a su departamento de selección de personal han llegado las solicitudes de 10 personas que aspiran a ocupar el puesto. Ahora procede entrevistar a los aspirantes, para lo cual se les envían invitaciones para acordar un horario conveniente. Cinco de los aspirantes tienen disponibilidad por la mañana y cinco por la tarde. ¿De cuántas maneras pueden agendarse las entrevistas con los aspirantes al puesto si se desea que se lleven a cabo en un sólo día?

Hay 5 formas de agendar a los aspirantes que prefieren el horario matutino y 5 para agendar a los del turno vespertino. En total (5)(5) Posibles maneras de agendar a los 10 aspirantes el mismo día.

Observa: los valores de n, crecen velozmente.

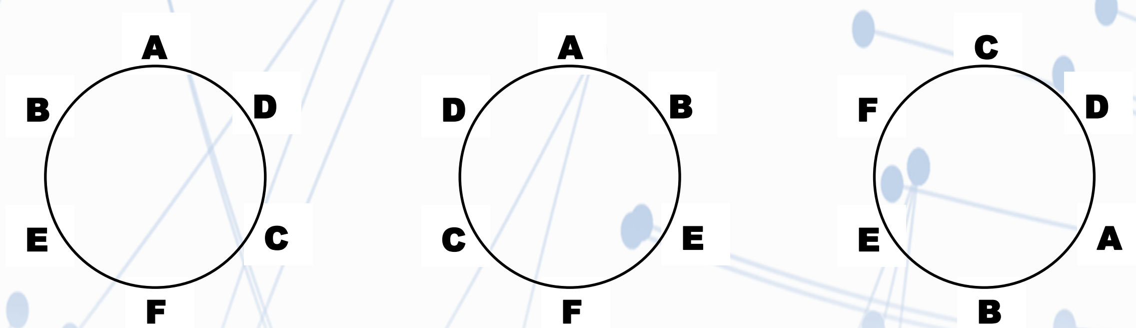
10 = 3,628,800 es el número de segundos que hay en seis semanas

Entonces 11 es mayor al número de segundos que hay en un año, 12 rebasa a los que hay en 12 años y 13 es un número mucho más grande que el total de segundos que tiene un siglo.

Supongamos que ahora queremos contar acomodamientos que no son lineales sino circulares, (por ejemplo, al acomodar personas en una mesa redonda o cuentas en un collar).

Ejemplo 3. Seis personas, que aquí identificamos como A, B, C, D, E, F se sientan en una mesa redonda ¿de cuántas formas distintas pueden hacerlo?

Consideramos dos formas iguales si una puede obtenerse de la otra mediante una rotación, por ejemplo, en la siguiente figura



(a) (b) (c)

Figura 1. Posiciones de las personas sentadas en una mesa redonda

Las formas de sentarse dadas en (b) y (c) serían idénticas mientras que (a) y (b) son distintas.

Sabemos que si la pregunta fuera acerca de las permutaciones (es decir las ordenaciones lineales) la respuesta sería 6 ¿Qué sospechas? ¿Qué haya más ordenaciones circulares que lineales? ¿O que este número sea menor?

Veamos, si tomamos las figuras (b) y (c) desde la parte superior del círculo y nos movemos en el sentido de las manecillas del reloj, obtendremos dos ordenaciones lineales diferentes de las seis letras dadas:

ABEFCD y CDABEF

y como vimos estas dos lineales corresponden a la misma circular. Hay otras cuatro lineales que también corresponden a la misma circular:

BEFCDA, DABEFC, EFCDAB Y FCDABE

(si las dibujas podrás comprobar que, en efecto, son la misma).

Entonces tenemos que cada acomodo circular corresponde a seis permutaciones o sea que

$$6(ordenaciones\ circulares) = número\ de\ permutaciones = 6!$$

De donde, hay $\frac{6!}{6} = 5! = 120$ ordenaciones circulares de seis personas.

1.3.2. Ordenaciones: con y sin repetición

En la literatura puedes encontrar varias palabras para designar lo que aquí llamamos ordenaciones: colocaciones, acomodamientos, disposiciones, distribuciones, variaciones o arreglos son palabras que se usan para describir esencialmente lo mismo (incluso podrías encontrar algunas más infrecuentes como muestras, palabras, cadenas, acomodos, acomodaciones, etc.).

Dado un conjunto finito*, A*, de objetos formamos con algunos de ellos una sucesión **ordenada** y a eso es a lo que llamamos una ordenación de los elementos de *A.* Aquí “ordenada” es la palabra clave pues significa que colocamos ciertos objetos alineados (formados, enfilados) uno a un lado de otro, y eso define a la sucesión. Observa que estamos hablando de ordenaciones lineales, como las de la sección anterior, la diferencia es que ahora no solamente contamos las que se forman con todos los elementos del conjunto sino con cualquier subconjunto de ellos. Además, podemos permitir repeticiones. Así por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ tres ordenaciones de los elementos de *A* de tamaño cinco serían: $aaaba$, $aaaab$, $baaba$.

Ejemplo. ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden hacer con las 26 letras de nuestro alfabeto?

a. si pueden repetirse letras

Por la regla del producto tenemos que hay $(26)(26)(26)(26) = 26^4$ de estas "palabras"

b. si no pueden repetirse letras

Aquí, nuevamente aplicando la regla del producto, tenemos $(26)(25)(24)(23)$ palabras de tamaño cuatro sin letras repetidas.

El primer caso cuenta **las ordenaciones con** repetición de 26 elementos tomados de 4 en 4 y el segundo *las* ordenaciones **sin** repetición de 26 elementos tomados de 4 en 4.

En ambos usamos la regla del producto y, no es muy difícil generalizar para ordenaciones de cualquier tamaño:

- El número de ordenaciones **con** repetición, de tamaño ***r,*** tomados de ***n*** elementos es $\boldsymbol{n^r}$ $\quad \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}$ (suele denotarse como OR_n^r).

- El número de ordenaciones **sin** repetición, de tamaño ***r,*** tomados de ***n*** elementos es $\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$ $\quad \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{n}$ (suele denotarse como O_n^r o también $P(n, r)$).

Nota: las permutaciones de *n* elementos son un tipo particular de ordenaciones sin repetición: las de tamaño *n.* En la sección anterior viste que hay *n* permutaciones, sí en esta fórmula sustituyes *r=n,* obtienes el mismo resultado.

Ejemplo. ¿De cuántas formas puedes acomodar 25 libros en un estante que tiene espacio para 12?

Aquí la respuesta, claramente, será el número de ordenaciones de 25 elementos tomados de 12 en 12: $\frac{25!}{(25-12)!} = \frac{25!}{13!}$ (y que necesitas otro librero).

Ejemplo. El número de permutaciones de las letras de la palabra EUCALIPTO es 9. Si solamente usamos cuatro de ellas el número de "permutaciones", es decir, ordenaciones de tamaño cuatro será $\frac{9!}{5!} = (6)(7)(8)(9) = 3024$. Y si se permiten repeticiones habrá $9^4 = 6561$ de estas. ¿Cuántas ordenaciones de tamaño 11 se pueden hacer con las letras de la palabra EUCALIPTO?

Si las ordenaciones son sin repetición la respuesta es cero, pues no tenemos letras suficientes para formar una ordenación de tamaño once. Para obtener las ordenaciones con repetición usamos la fórmula y tendremos que hay 9^{11} de ellas, ¡más de 31 mil millones!

Ejemplo. ¿Cuántas permutaciones hay de las letras de la palabra ALA?
A diferencia del ejemplo anterior, ¡aquí la respuesta no es 3 pues no tenemos que ordenar cuatro letras distintas. Hay solamente tres:

1) L A A
2) A L A
3) A A L

Siguiendo un razonamiento similar al del ejemplo 3 de la sección anterior, contaremos estas ordenaciones haciendo uso de la fórmula que ya conocemos para permutaciones. Veamos: sabemos que si las tres letras fuesen distintas habría 3=6 permutaciones, "distingamos" momentáneamente las dos A's mediante un subíndice. Entonces por cada una de las ordenaciones recién listadas, tenemos dos con las A's distinguidas:

1) L A A: L A_1 A_2 y L A_2 A_1

2) A L A: $A_1 L A_2$ y $A_2 L A_1$

3) A A L: $A_1 A_2 L$ y $A_2 A_1 L$

Es decir,

$$2(\textit{número de permutaciones de las letras } A, L, A) = (\textit{número de permutaciones de los símbolos } A_1, A_2, L)$$

Por lo tanto la respuesta, en este caso es $\frac{3!}{2} = 3$.

Esta misma idea se puede generalizar para dar un principio general para calcular permutaciones de conjuntos con elementos repetidos (indistinguibles).

Si existen n elementos de r tipos diferentes, de manera que:

1) $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$
2) los elementos del mismo tipo son indistinguibles entre sí

el número de permutaciones de los n objetos es

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

Ejemplo. ¿Cuántas permutaciones hay con las letras de la palabra LABORATORIO?

Por el razonamiento anterior vemos que existen:

$$\frac{11!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 1{,}663{,}200$$

¿En cuántas de ellas aparecen juntas las tres letras O?

Para contar estas, consideramos las permutaciones de “el símbolo” OOO y las letras L,A,A,B,R,R,T,I

$$\frac{9!}{2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 90{,}720$$

Contando funciones entre conjuntos finitos

Considera dos conjuntos finitos A y B de cardinalidades n y r respectivamente. En tu curso de Introducción al Álgebra superior aprendiste el concepto de función. Ahora queremos contarlas

¿Cuántas funciones hay de A a B? (es decir, que tomen a A como dominio y a B como codominio).

Veamos: una función de A en B asocia a cada uno de los *n* elementos de A un elemento de B, su imagen, o sea que hay *r* posibles imágenes para cada elemento de A, por la regla del producto, tendremos:

$$\underbrace{(n)(n)(n)\dots(n)}_{r\ veces} = n^r$$

Funciones de A en B, es decir, tantas como ordenaciones con repetición de tamaño *r* y es evidente que no hay restricciones para los valores de *n* y *r,* (salvo que sean enteros positivos).

¿Cuántas de estas funciones son inyectivas? pues como ahora no podemos “repetir imágenes” una vez que hemos elegido un elemento en B, este queda “eliminado” de las opciones para nuestras elecciones siguientes estamos hablando entonces de ordenaciones sin repetición de tamaño *r* y aquí sí se requiere que $0 \leq n \leq r$. Hay, entonces, $\frac{n!}{(n-r)!}$, funciones inyectivas.

Finalmente, ¿Cuántas funciones son biyectivas? Aquí tenemos una nueva restricción, como ya has debes saber, $|A| = |B|$ si y sólo si hay una biyección entre ellos, por lo tanto, solamente existen estas funciones si $0 \leq n = r$, en tal caso, estaríamos contando ordenaciones sin repetición de tamaño *n,* es decir permutaciones, hay *n!* de estas funciones.

1.3.3. Combinaciones. Teorema del binomio y definición de coeficiente binomial

Una tortería ofrece en un anuncio colocado en su entrada que tiene más de 500 variedades de tortas. Un inspector de Profeco ve el anuncio y sospecha que posiblemente el dueño esté engañando a su clientela, así que decide investigar.

El menú de la tortería ofrece a sus clientes la opción de elaborar “una torta a su antojo” con la selección que prefieran de los ingredientes siguientes:

Champiñones, salchicha, salami, quesillo, tocino, pimientos, berenjena, jamón y pavo.

¿Es cierto lo que ofrecen los torteros? ¿o debería sancionarlos el inspector?

Antes de responder a estas preguntas, responde a otras más sencillas. Si $A = \{a, b\}$ ¿cuántos subconjuntos tiene *A*? Veamos:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

Tiene cuatro. ¿Y si $A = \{a, b, c\}$?, ¿Cuántos subconjuntos tiene? en este caso serán ocho:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

En general -y lo puedes demostrar por inducción- un conjunto de *n* elementos, tiene 2^n subconjuntos (la cardinalidad del conjunto potencia)

Si *A* es un conjunto, P^A, el **conjunto potencia de A,** es la colección de todos los subconjuntos de *A*.

Ahora sí respondamos las preguntas iniciales. La lista de ingredientes que la tortería pone a disposición de su clientela consta de nueve elementos. Cada torta puede pensarse como un subconjunto de esta colección: la selección particular que el cliente haya hecho. Así, habrá $2^9 = 512$ posibles selecciones y por tanto 512 posibles modelos de tortas. El inspector no podrá multar a los torteros.

Los subconjuntos de un conjunto son las combinaciones o selecciones que son posibles hacer con sus elementos. Llamamos **una combinación (o selección) de tamaño** *r* a un subconjunto de *r* elementos. Aquí el orden no importa, claramente los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{b, a\}$ son el mismo.

Ya sabemos que en un conjunto de tamaño *r*, hay *r* permutaciones de sus elementos, observa que cada una de ellas es una ordenación sin repetición de tamaño *r* del conjunto total.

Entonces se tiene que:

$$r!\,(número\ de\ combinaciones\ de\ tamaño\ r\ tomadas\ de\ n\ elementos)\ =$$

$(número\ de\ ordenaciones \sin repetición\ de\ tamaño\ r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

y así,

❖ El número de combinaciones de tamaño $\boldsymbol{r}$ tomadas de $\boldsymbol{n}$ elementos es

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}}$$

$0 \leq r \leq n$

Este símbolo $\binom{n}{r}$, que se lee "las combinaciones de *n* en *r*" (o "las selecciones de *n* en *r*") es **el coeficiente binomial de *n* en *r*,** objeto de profundos estudios y añeja historia como pudiste enterarte en la reseña histórica al inicio de esta unidad.

Observa que la definición hace evidente que:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Entonces, para el planteamiento de la tortería, se tiene que hay

- $\binom{9}{1} = \binom{9}{8} = 9$ modelos de torta con un ingrediente y 9 con ocho ingredientes
- $\binom{9}{2} = \binom{9}{7} = 36$ modelos de torta con dos ingredientes y 36 con siete ingredientes
- $\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84$ modelos de torta con tres ingredientes y 84 con seis ingredientes
- $\binom{9}{4} = \binom{9}{5} = 126$ modelos de torta con tres ingredientes y 126 con seis ingredientes

Por supuesto hay un sólo modelo de torta que incluye los nueve ingredientes y entonces hay en total: 2(9)+2(36)+2(84)+2(126)+1=511 modelos de tortas (¡¿no eran 512?!)

Lo que sucede es que en nuestro conteo original incluíamos **todos** los subconjuntos de la lista de ingredientes, esto agregaría una torta más: la torta vacía, aquella en la que no elegimos ningún ingrediente de la lista. Contando también esta torta, tenemos las 512.

Con el coeficiente binomial ya trabajaste en tus cursos anteriores para construir el **Triángulo de Pascal**, que como aquí, te ha servido para contar los subconjuntos de tamaño r de un conjunto de n elementos. Estos coeficientes son los elementos del renglón $n+1$ del triángulo.

Lo que comprobamos con el ejercicio de la tortería se verifica para cada uno de los renglones del triángulo de Pascal:

La suma del número de subconjuntos de todos los tamaños posibles de un conjunto de n elementos es 2^n

$$2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$$

Otra prueba –esta vez combinatoria- de que ésta es la cardinalidad del conjunto potencia.

Nota: al considerar subconjuntos formados con n elementos, es necesaria la condición $0 \leq r \leq n$, pues no puede haber subconjuntos de cardinalidad menor que cero ni mayor que n.

Ejemplo. En las instrucciones para realizar un examen dice: “Responde 7 de las 10 preguntas siguientes” ¿de cuántas formas distintas se puede responder el examen?

Como no hay más restricciones cualquier subconjunto de 7 preguntas será una buena selección para responder el examen. Hay $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{(8)(9)(10)}{6} = 120$ formas posibles de responderlo.

Ejemplo. Si a las instrucciones para responder el examen se agrega la restricción “tres preguntas deben ser de las primeras cinco y cuatro de las últimas cinco” ahora ¿de cuántas formas distintas pueden responder el examen?

Hay $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{(4)(5)}{2} = 10$ formas de elegir las primeras tres preguntas y $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5}{1} = 5$ formas de elegir las otras cuatro. Por la regla del producto, habrá 50 maneras de responderlo.

Ejemplo. De una asociación de 36 miembros se desea formar cuatro comités que se encarguen de varias tareas. La intención es que todos los miembros participen en algún comité así que se decide que cada comité tenga exactamente nueve elementos, ¿de cuántas formas es posible elegir estos cuatro comités?

Hay $\binom{36}{9} = \frac{36!}{9!27!}$ formas de elegir el primer comité, $\binom{27}{9} = \frac{27!}{9!18!}$ formas de elegir el segundo, $\binom{18}{9} = \frac{18!}{9!9!}$ formas de elegir el tercero y $\binom{9}{9} = \frac{9!}{9!0!} = 1$ forma de elegir el cuarto. Por la regla del producto habrá $\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}\binom{9}{9} = \left(\frac{36!}{9!27!}\right)\left(\frac{27!}{9!18!}\right)\left(\frac{18!}{9!9!}\right)\left(\frac{9!}{9!0!}\right) = \frac{36!}{9!9!9!9!}$ formas de elegir los cuatro comités.

Cuando construiste el Triángulo de Pascal aprendiste también la *Fórmula de Pascal:*

Fórmula de Pascal.

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Demostración. Aunque esta identidad puede ser comprobada algebraicamente, daremos aquí una demostración combinatoria (más interesante visualmente). Supongamos que $n \geq 2$.

Sean A un conjunto con n elementos y sea $x \in A$ un elemento fijo del conjunto. Los subconjuntos de tamaño r formados con elementos de A son solamente de dos tipos:

- los que contienen a x,
- y los que no contienen a x

Observa que de los primeros hay $\binom{n-1}{r-1}$, pues por cada conjunto de $r-1$ elementos de $A - \{x\}$,

Agregándole el elemento x, se tiene un subconjunto de A de tamaño r que sí contiene a x.

De los segundos hay $\binom{n-1}{r}$, los subconjuntos de tamaño r formados con elementos de $A - \{x\}$.

Claramente, la suma de estas dos cantidades nos dará el número buscado.

■

Observa que esta fórmula proporciona una definición recursiva del coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ para $n \geq 2$. Calculando los valores mínimos del coeficiente tenemos:

- $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1} = 1$
- $\binom{1}{0} = \frac{1!}{1!(1-0)!} = \frac{1!}{1!1!} = \frac{1}{1} = 1$
- $\binom{1}{1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} = \frac{1!}{1!0!} = \frac{1}{1} = 1$

De aquí inferimos varias cosas interesantes:

- El conjunto vacío –aquel que tiene cero elementos- tiene únicamente un subconjunto: él mismo
- Cualquier conjunto de cardinalidad uno –con un sólo elemento- consta de exactamente dos subconjuntos: uno de cardinalidad cero -el vacío- y uno de cardinalidad uno, él mismo.
- El coeficiente binomial $\binom{n}{r} \in \mathbb{N}$ para cualesquiera valores de r y n

Este último resultado, que pudiera parecer obvio, suena un poco insólito al observar su definición como cociente ¿no te parece?

Los elementos del renglón $n+1$ del Triángulo de Pascal son precisamente los coeficientes de la **Identidad binomial de grado $\mathbf{n}$**:

Identidad Binomial.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

De esta expresión es de donde el número $\binom{n}{r}$ ha tomado su nombre. Conocida y estudiada por muchos desde hace siglos, la identidad binomial fue generalizada por Newton en el año 1665 como una serie en la que para n también puede tomar valores reales. Por esto, a la serie infinita se le conoce como **Binomio de Newton:**

Binomio de Newton.

$$(a+b)^x = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{x}{r} a^r b^{x-r}$$

$x \in \mathbb{R}$

En este curso únicamente trabajaremos con la identidad binomial.

Ejemplo. El coeficiente del término x^3y^4 en el desarrollo de $(x+y)^7$ es $\binom{7}{3} = 35$.

Ejemplo 5. El coeficiente del término a^5b^3 en el desarrollo de $(2a-3b)^8$ es $\binom{8}{5}2^5(-3)^3$.

Dos corolarios inmediatos de la identidad binomial son los siguientes:

- $(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$
- $(1-1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(-1)^n = 0$

Combinaciones con repetición

Ya antes hemos visto que si se tienen n objetos, hay n^r ordenaciones con repetición de tamaño r de esos objetos. Hay un planteamiento similar para el caso de las combinaciones es el caso de las **combinaciones (o selecciones) con repetición***.* Lo puedes pensar como una situación en la cual debes elegir de un conjunto de n objetos un subconjunto de tamaño r, pero cada vez que "sacas" un objeto (como si lo sacaras de una caja o bolsa) inmediatamente después lo vuelves a meter, así que en la siguiente selección podrías repetir el objeto elegido. Con algunos ejemplos quedará más claro este concepto.

Ejemplo. En la tortería de "las más de 500 variedades de tortas", también ofrecen tres variedades de hot dogs: regular, picante y super dog. ¿De cuántas formas es posible ordenar seis de ellos?

Observa que aquí no importa el orden y es evidente que deben repetirse. En la tortería codifican los pedidos colocando en primer lugar el número de hot dogs regulares que se piden, después una raya: | seguido del número de hot dogs picantes que se piden, otra raya, y finalmente el número de super dogs solicitados. Por ejemplo, estas serían dos órdenes posibles:

2|3|1

3||3

||6

La segunda opción no ordenó ningún hot dog picante y en la tercera todos fueron super dogs. Podemos entonces manejar estas selecciones mediante un "truco": ponemos un símbolo (digamos que *) por cada hot dog indicado en la orden y raya que separa los tipos. Las tres órdenes anteriores se verían así:

|*|*

||

||******

Entonces, cada orden de hot dogs consistirá de una sucesión de los símbolos | y *. Y recíprocamente, para cada sucesión de estos símbolos tendremos una orden de hot dogs: los * antes de la primera | serán los hot dogs regulares –si no hay entonces no se incluyen de este estilo en la orden-, los * entre la primera y segunda raya serán los hot dogs picantes y los que estén después de la tercera raya serán los super dogs, en cada caso, si no hay ningún * en la sección correspondiente entonces no se incluyen hot dogs de este estilo en la orden.

Tenemos entonces una correspondencia biyectiva entre las órdenes de hot dogs y las sucesiones de los símbolos | y *. Para este caso, contar cuántas de estas sucesiones hay es fácil: hay tantas como todos los subconjuntos de tamaño dos de ocho elementos. Son las ocho posiciones de cada sucesión que codifica las órdenes de seis hot dogs y cada subconjunto de tamaño dos indica las posiciones de las rayas. Aquí la respuesta será:

$$\binom{8}{2} = 28 = \binom{8}{6}$$

Ejemplo. Siete estudiantes desean elegir del menú alguno de las siguientes opciones: hot dog picante, torta de pavo, hamburguesa de queso o sándwich de atún. ¿Cuántas compras diferentes son posibles?

Siguiendo el mismo razonamiento del ejemplo anterior, ahora queremos hacer selecciones de tamaño siete de entre cuatro clases de objetos. Necesitaremos tres rayas para separarlos, así que cada selección estará determinada por una sucesión de 7+3=10 símbolos * y |. Cada subconjunto de tamaño 3 de entre los 10 elementos de la sucesión nos dará una posible manera de colocar las rayas en la sucesión y por tanto una posible compra. Habrá en total,

$$\binom{10}{3} = 120 = \binom{10}{7}$$

En general tenemos que cuando queremos elegir **con repetición $\mathbf{r}$ de $\mathbf{n}$** objetos distintos, estamos considerando las ordenaciones de r * y $n-1$ |, y el número es:

- ❖ El número de combinaciones de tamaño $\boldsymbol{r}$ tomadas de $\boldsymbol{n}$ elementos **con repeticiones** es

$$\frac{(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}{\boldsymbol{r}!\,(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!} = \binom{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}$$

$0 \leq r \leq n$

Ejemplo. ¿De cuántas formas se puede elegir una docena de donas de entre cinco variedades disponibles si queremos llevar al menos una de cada modelo?

Eligiendo una de cada modelo nos quedarían aún siete donas por elegir de los cinco tipos disponibles. Aplicando la fórmula anterior para $r = 7\ y\ n = 5$, se tiene que hay,

$\binom{7+5-1}{7} = 330$ Formas posibles.

Ejemplo. Un dominó es una delgada pieza rectangular (puede ser de madera, plástico, marfil, etc.) cuya cara superior está dividida en dos cuadrados. Cada cuadrado es blanco o contiene entre uno y seis puntos. ¿Cuántas caras de dominó distintas son posibles?

Aplicando la fórmula anterior para $r = 2\ y\ n = 7$, se tiene que hay: $\binom{2+7-1}{2} = 28$

Cierre de la unidad

En esta unidad, revisaste la forma en que se establecen los números reales y su importancia dentro del análisis combinatorio. Mencionamos los antecedentes e hicimos un recordatorio sobre la inducción matemática y la forma de cómo aprender a contar.

Aprendiste también cómo los números naturales, permiten jugar con conjuntos de números, a través de la combinatoria básica. La forma de como agrupar conjuntos de números dentro de situaciones cotidianas, tomando en cuenta la repetición o no de ellos.

Para ello es necesario que tomes en cuenta la siguiente tabla, que nos indica que en un problema de conteo siempre hay que identificar si el orden importa o no. Si existiese cualquiera de los dos casos, debemos tomar las siguientes consideraciones:

En un problema de conteo siempre hay que identificar si el orden importa o no.

¿El orden importa?	¿Con repetición?	Concepto	Fórmula
sí	sí	Ordenaciones con repetición	$n^r, \quad n, r \geq 0$
sí	no	Ordenaciones sin repetición	$\frac{n!}{(n-r)!}, \quad 0 \leq r \leq n$
no	no	Combinaciones	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \quad 0 \leq r \leq n$
no	sí	Combinaciones con repetición	$\binom{r+n-1}{r}, \quad 0 \leq r \leq n$

Estas indicaciones que te acabo de mencionar en la tabla anterior son de mucha importancia dado que se utilizarán en la segunda unidad, donde revisaremos otras estrategias de conteo, mucho más específicas que te permitirán resolver problemas de conteo más complejas.

Para saber más

Te sugiero revisar la página en el siguiente enlace, para revisar contenidos de progresiones aritméticas.

S.a. (2020). Sucesiones y series. Disfruta las matemáticas. Las matemáticas son divertidas. Mtmlsafe.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/sucesiones-series.html

Te recomiendo leer este libro que menciona varios conceptos sobre los números reales, sus propiedades y la forma de cómo se expresan en diferentes situaciones. Su consulta la puedes verificar en diversos repositorios especializados.

Magnus, H. (1997). El diablo de los números. Ediciones Siruela. Madrid.

Fuentes de consulta

Básica

- Alks091. (25 de octubre de 2011). Tutorial de inducción matemática completa. [Archivo de Vídeo]. Youtube.https://www.youtube.com/watch?v=gQuj5w6d2Cs
- CEDU. (14 de julio de 2015). Uninorte. Técnicas de conteo. [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://youtu.be/_3aOsueffUw
- Grimaldi, R. P. (1998) *Matemáticas Discreta y Combinatoria*,(3ª edición) México. Editorial Prentice Hall.
- Johnsonbaugh, R, (2005) *Matemáticas Discretas*, 6a Edición. Mexico. Editorial Pearson Educación.
- Prof. Moreno. (14 de marzo de 2014). Principio del palomar. [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=ui4VrQ0P3Bg
- S.a. (s.f.) Inducción matemática. UNAM. https://www.matem.unam.mx/~max/AS1/N6.pdf
- Sáenz de Cabezón, Eduardo. (21 de octubre de 2015). El principio de inducción matemática. [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=5HuMMTTfAGs&feature=share
- Villalpando, R.F (s.f). Apuntes para la materia de matemáticas discretas. http://seraace.com/files/notas_mat_dis.pdf