MATEMÁTICAS

ANÁLISIS COMBINATORIO

5º SEMESTRE

UNIDAD 2. MÁS ESTRATEGIAS DE CONTEO

Clave

05143526

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Unidad 2. Más estrategias de conteo

Presentación de la unidad

En la Unidad 1 conociste los principales objetivos del Análisis Combinatorio y algunas de sus estrategias elementales.
En esta Unidad profundizarás en la misma línea de conocimiento abarcando ahora el estudio de herramientas más sofisticadas de conteo. Para esto será muy útil que recuerdes lo que aprendiste de Teoría de Conjuntos en Introducción al Pensamiento Matemático y lo referente a Funciones y Polinomios que estudiaste en Introducción al Álgebra Superior.

Competencia específica

Utiliza técnicas más avanzadas del conteo para resolver problemas que requieran identificar y contar colecciones de específicas de objetos, utilizando las propiedades de los números enteros y de los polinomios.

Logros

- Usar el Principio de inclusión-exclusión como herramienta para verificar la veracidad de cierta información.
- Resolver problemas que utilicen principios de inclusión- exclusión.
- Resolver problemas que utilicen funciones generatrices.

2.1. Principio de inclusión y exclusión

Esta es otra de las herramientas fundamentales del Análisis Combinatorio. En esta sección aprenderás a resolver problemas de conteo apoyándote en los conocimientos de Teoría de conjuntos que aprendiste en tus cursos de Introducción al pensamiento matemático e Introducción al álgebra superior.

Es importante que recuerdes las definiciones de **unión e intersección** de conjuntos y que si S es un conjunto finito, la **cardinalidad de S**, denotada como $|S|$, es la cantidad de elementos que hay en S. El **complemento de** S, denotado por $\bar{S}$, es el conjunto formado por los elementos que no pertenecen a S; y $\mathcal{U} = S \cup \bar{S}$, denota el conjunto universal. Finalmente, recuerda también, las **leyes de Morgan** que establecen:

$$\overline{S \cup T} = \bar{S} \cap \bar{T}$$

$$\overline{S \cap T} = \bar{S} \cup \bar{T}$$

2.1.1. Ejemplos introductorios

Ejemplo

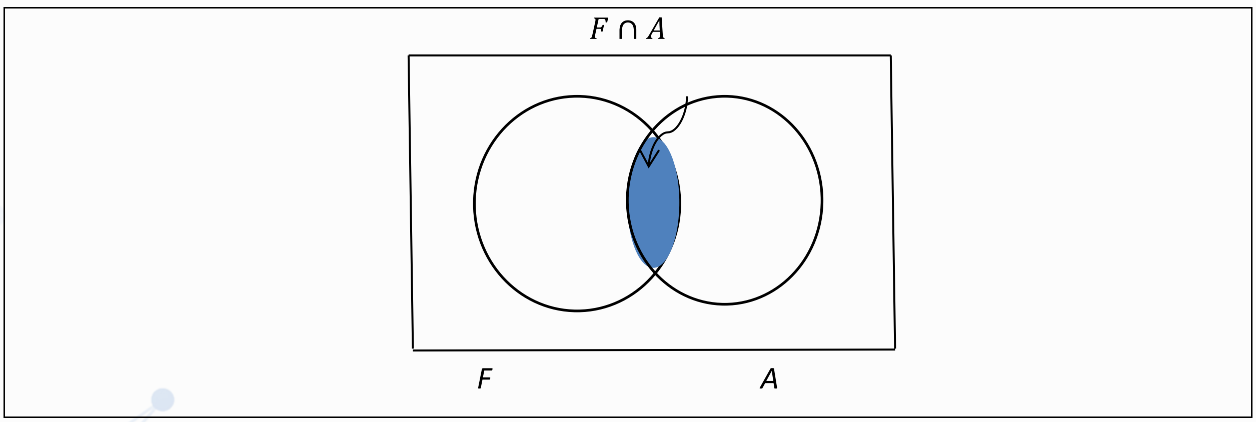
En cierta universidad nacional se promueve el aprendizaje de un segundo idioma, aunque no es una actividad obligatoria. Hay un grupo de 45 estudiantes de primer ingreso en el que 25 de ellos eligen estudiar francés, 15 alemán y 10 estudian ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes eligieron no estudiar un segundo idioma en ese grupo?

Sean F el conjunto formado por los estudiantes que eligieron estudiar francés y A el conjunto formado por los estudiantes que eligieron estudiar alemán, en este caso el universo en el que trabajamos, $\mathcal{U}$, serían todos los estudiantes del grupo dado. Sabemos además que hay 10 estudiantes en la intersección de A y F, es decir,

- $|\ \mathcal{U}\ | = 45$
- $|F| = 25$
- $|A| = 15$
- $|F \cap A| = 10$

Los estudiantes que **sí** eligieron un idioma forman el conjunto $F \cup A$ por los que **no eligieron** estudiar algún idioma están en el complemento de tal conjunto es decir en $\overline{F \cup A}$.

Entonces, si conocemos cuántos estudiantes hay en $F \cup A$ sabremos inmediatamente cuántos hay en $\overline{F \cup A}$



Un primer intento podría inducirnos a pensar que la cardinalidad de $F \cup A$ es la suma $|F| + |A|$, sin embargo, notemos que al contar los elementos de F, contamos una vez a aquellos estudiantes que pertenecen al conjunto $F \cap A$ y cuando contamos los elementos de A, ¡los volvemos a contar! Si solamente sumáramos las cardinalidades de los dos conjuntos, estaríamos contando doblemente a aquellos estudiantes que estudian dos idiomas. Entonces, la manera correcta de encontrar la cardinalidad de $|\ F \cup A\ |$, es mediante la siguiente expresión:

$$|F \cup A| = |F| + |A| - |F \cap A|$$

Tenemos así, que para este ejemplo, hay 30 estudiantes que han elegido estudiar un segundo idioma y por lo tanto 10 que han elegido no hacerlo.

Ejemplo

Un supervisor de una compañía que vende suministro eléctrico debe entregar un informe sobre los empleados de su sección. Ellos son, principalmente, los encargados de tender el cableado en zonas urbanas, y se encargan de cortar grandes árboles, escalar postes y unir cables. La sección incluye 100 empleados por lo que para facilitar el reporte, el supervisor decidió separarlos en conjuntos. Primero hizo una lista con las tres actividades principales de la sección:

A. Cortar árboles grandes
B. Escalar postes
C. Unir cables

Después revisó los perfiles de los empleados y registró a cuáles de estas actividades podía dedicarse cada uno. Una vez que hubo recabado la información reportó las conclusiones siguientes:

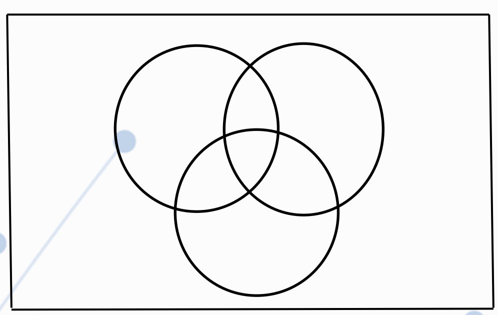
1. Hay 45 empleados que pueden cortar árboles grandes
2. Hay 50 empleados que pueden escalar postes
3. Hay 57 empleados que pueden unir cables
4. Hay 28 empleados que pueden hacer las actividades A y B
5. Hay 20 empleados que pueden hacer las actividades B y C
6. Hay 25 empleados que pueden hacer las actividades A y C

Con esta información el supervisor ¿puede informar cuántos empleados hay que puedan realizar las tres actividades de la sección?

Nuevamente podemos proceder de manera similar a la del ejemplo anterior. Llamemos A al conjunto de empleados que puede cortar árboles, B al de los que pueden escalar postes y C al de los que pueden unir cables. ¿Qué queremos obtener ahora? la cantidad de empleados que pueden realizar cualquiera de las tres actividades, es decir, queremos saber la cardinalidad del conjunto $A \cap B \cap C$ o lo que es lo mismo, $|A \cap B \cap C|$.

Aquí es importante observar que estamos suponiendo que cualquier empleado puede hacer alguna de las tres actividades es decir $A \cup B \cup C$ forma todo el universo de elementos con los que estamos trabajando por lo que ahora $|A \cup B \cup C|^c = 0$ pues tal conjunto es vacío.

Notemos que cuando contamos a los empleados del conjunto A también contamos a los de los conjuntos $A \cap B$ y $A \cap C$, al contar a los de B contamos otra vez a los de $B \cap A$ y $B \cap C$ y al contar a los de C contamos también a los de $C \cap A$ y $C \cap B$. Además, en los tres casos estamos sumando $|A \cap B \cap C|$, como se hace evidente en el diagrama de Venn siguiente:



A B

C

Entonces, al sumar las cardinalidades de los conjuntos A, B y C hemos contado dos veces a los elementos de las intersecciones de cada par de conjuntos y tres veces a la intersección de todos ellos. Restando la cardinalidad de la intersección de cada par resolvemos el primer problema, pero la intersección de cada pareja de conjuntos también contiene a la intersección de los tres, así que al restar las tres cardinalidades anulamos las mismas tres veces que los habíamos contado doble ¿la solución? hay que sumar nuevamente $|A \cap B \cap C|$.

La expresión siguiente concluye las observaciones que hicimos:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |\ C \cap B| + |A \cap B \cap C|.$$

De las observaciones del supervisor sabemos los siguientes datos:

$|A| = 45; |B| = 50; |C| = 57;\ |A \cap B| = 28;\ |C \cap B| = 20;\ |C \cap A| = 25.$

Entonces,

$$100 = |A \cup B \cup C| = 45 + 50 + 57 - 28 - 20 - 25 + |A \cap B \cap C|$$

Por lo que

$$100 - 79 = |A \cap B \cap C|$$

Hay 21 personas que pueden realizar cualquiera de las tres actividades.

Ejemplo

¿Cuántos enteros –positivos- menores que 70 son primos relativos con 70?

Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de enteros entre 1 y 70. Recuerda que un entero m es primo relativo con 70 si no tienen divisores comunes. Como 70= (2)(5)(7), entonces sus divisores primos son 2, 5 y 7, por lo que queremos contar los elementos de $\mathcal{U}$ que no tienen a 2 ni 5 ni 7 como divisor.
Sean los conjuntos:

A. elementos de $\mathcal{U}$ que son divisibles por 2
B. elementos de $\mathcal{U}$ que son divisibles por 5
C. elementos de $\mathcal{U}$ que son divisibles por 7

Lo que buscamos es $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}\ |$. Por las leyes de Morgan $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$, así que mejor obtendremos $|\overline{A \cup B \cup C}|$. Lo haremos de similarmente a como hicimos en el ejemplo 1, encontrando la cardinalidad del complemento, es decir $|A \cup B \cup C|$, pues conociendo este valor, tendremos el buscado: $|\mathcal{U}| - |A \cup B \cup C| = |\overline{A \cup B \cup C}| \ \Rightarrow |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = 70 - |A \cup B \cup C|$.

Siguiendo los razonamientos expresados en los dos ejemplos anteriores se tiene que,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |\ C \cap B| + |A \cap B \cap C|$$

y para este ejemplo, tenemos que,

1. Hay $\frac{70}{2} = 35$ elementos en A.

2. Hay $\frac{70}{5} = 14$ elementos en B.

3. Hay $\frac{70}{7} = 10$ elementos en C.

4. Los elementos de $A \cap B$ son los elementos de de $\mathcal{U}$ que son divisibles por 2 y 5, es decir, se dividen por (2)(5)=10, entonces, hay $\frac{70}{10} = 7$ elementos en $A \cap B$.

5. Los elementos de $A \cap C$ son los elementos de de $\mathcal{U}$ que son divisibles por 2 y 7, es decir, se dividen por (2)(7)=14, entonces, hay $\frac{70}{14} = 5$ elementos en $A \cap C$.

6. Los elementos de $B \cap C$ son los elementos de de $\mathcal{U}$ que son divisibles por 5 y 7, es decir, se dividen por (5)(7)=35, entonces, hay $\frac{70}{35} = 2$ elementos en $B \cap C$.

7. Los elementos de $A \cap B \cap C$ son los elementos de de $\mathcal{U}$ que son divisibles por 2,5 y 7, es decir, se dividen por (2)(5)(7)=70, hay $\frac{70}{70} = 1$, solamente un elemento en $A \cap B \cap C$.

Entonces:

$$|A \cup B \cup C| = 35 + 14 + 10 - 7 - 5 - 2 + 1 = 46$$

Por lo tanto, $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = 70 - |A \cup B \cup C| = 70 - 46 = 24$.

Hay 24 enteros positivos menores que 70 que son primos relativos con él (es el conjunto $\{1,3,9,11,13,17,19,23,27,29,31,33,37,39,41,43,47,51,53,57,59,61,67,69\}$)

En la sección 1.3.3 aprendiste a obtener combinaciones con repetición. Retomemos este concepto para resolver los siguientes problemas que, como verás, podrás resolver ahora también usando el Principio de inclusión-exclusión.

Ejemplo

¿De cuántas maneras podemos distribuir siete galletas y 10 naranjas entre cuatro niños si queremos que cada uno reciba al menos una galleta?

Empezamos dando una galleta a cada uno, entonces las otras tres las podemos repartir de

$\binom{3+4-1}{3} = 20$ formas. Serán las combinaciones con repetición de tamaño tres -las galletas que hay que repartir- tomadas de cuatro elementos: el conjunto de niños. Para distribuir las naranjas no tenemos restricción así que serán las combinaciones con repetición de tamaño 10 –las naranjas que hay que repartir- tomadas de cuatro elementos: $\binom{10+4-1}{10} = \frac{13!}{10!3!} = \frac{(11)(12)(13)}{6} = 286$ formas. Por la regla del producto hay en total (20)(286)=5720 formas de distribuir los regalitos entre los niños con los requisitos especificados.

Ejemplo. Determina todas las soluciones **enteras** de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \quad \text{si } x_i \geq 0, \qquad \forall 1 \leq i \leq 4$$

Observa que, por ejemplo $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 1$ y $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 3$, son dos soluciones distintas de la ecuación aunque los enteros utilizados sean los mismos.
Puedes imaginar este problema como si tuvieras que distribuir siete monedas (objetos idénticos) entre cuatro niños (recipientes diferentes). La primera solución indica que se han dado tres monedas a los niños uno y dos, nada al tercero y una al cuarto, mientras que en la segunda el primer niño recibe una, nada el segundo y el tercero y cuarto reciben tres monedas. Tenemos entonces, que cada solución corresponde a una combinación, con repetición, de tamaño siete –las monedas a repartir- de un conjunto de tamaño cuatro –los niños elegidos- de forma que habrá $\binom{7+4-1}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{(8)(9)(10)}{6} = 120$ soluciones que cumplan las condiciones.

Es importante notar la equivalencia de lo siguiente:

(a) El número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r \qquad x_i \geq 0, \qquad 1 \leq i \leq n$$

(b) el número de combinaciones, con repetición, de tamaño $\boldsymbol{r}$ tomadas de $\boldsymbol{n}$ elementos

(c) el número de formas en que $\boldsymbol{r}$ objetos distintos se pueden distribuir entre $\boldsymbol{n}$ recipientes distintos

2.1.2. Definición del principio de inclusión-exclusión

El principio de inclusión-exclusión generaliza el tipo de situaciones que ejemplificamos en la sección anterior. Para dar su enunciado formal, necesitamos introducir un poco de notación de apoyo. No te confundas, simplemente llamaremos de un modo distinto a números que ya conoces.

Consideremos un conjunto finito S y denotemos por $N = |S|$. Supongamos ahora que tenemos una colección de r condiciones sobre los elementos de S. Denotemos a tales condiciones como $c_{1,}c_{2,}c_3 \ldots c_r$. Los elementos de S podrán cumplir una, varias o ninguna de estas condiciones, para cada $1 \leq i \leq r,$ denotaremos por $N(c_i)$ al número de elementos de S que satisfacen la condición c_i. Si $i, j \in \{1,2, \ldots, r\}, i \neq j,$ $N(c_i c_j)$ denota el número de elementos que satisfacen ambas condiciones $c_i\ y\ \ c_j$ -quizá otras más-, análogamente, si $1 \leq i, j, k \leq r$, son tres enteros distintos, $N(c_i c_j c_k)$ denota el número de elementos que satisfacen las tres condiciones: $c_{i,}c_j\ y\ \ c_k$. Es claro que este proceso se extiende fácilmente a cualquier subconjunto de condiciones permitiéndonos describir con precisión la cantidad de elementos que satisfacen todas las condiciones del subconjunto dado.

Denotaremos además para cada $1 \leq i \leq r,$ por $N(\overline{c_i}) = N - N(c_i)$ al número de elementos de S que **no** satisfacen la condición c_i. Si $1 \leq i, j \leq r, i \neq j,$ $N(\overline{c_i}\,\overline{c_j})$ denota el número de elementos que **no satisfacen alguna** de las condiciones $c_i\ o\ \ c_j$. En nuestro español cotidiano, tan lleno de expresiones incoherentes lógicamente, diríamos que $N(\overline{c_i}\,\overline{c_j})$ es la cantidad de elementos que “no cumplen ninguna de las dos condiciones: ni $c_i\ ni\ \ c_j$”. Observa que esto no es lo mismo que $N(\overline{c_i c_j})$ que indicaría el número de elementos que no cumple simultáneamente ambas condiciones $c_i\ y\ \ c_j$. Las extensiones de esta notación para tres o más condiciones también son inmediatas.

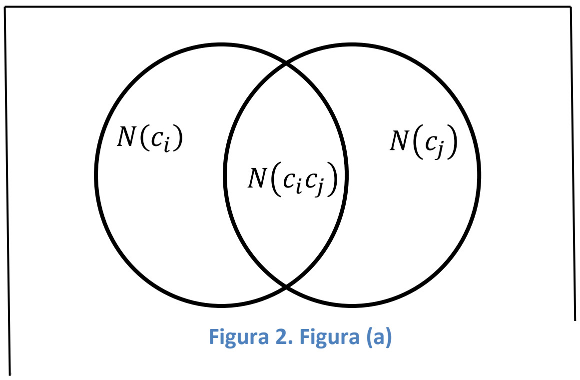


Figura 2. Figura (a)

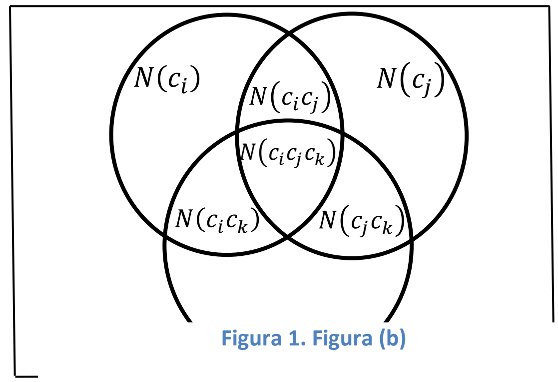


Figura 1. Figura (b)

Con esta notación establecida y con ayuda de los diagramas de Venn de la figura, observamos que en la figura **(a)** cada círculo representa un conjunto de elementos que cumplen una condición, el de la izquierda, S_i, es el conjunto de los que cumplen la condición c_i y el de la derecha, S_j, el de los que cumplen la condición c_j. En la intersección de estos conjuntos están los elementos que cumplen ambas condiciones.

Entonces, de acuerdo a la notación recién establecida se tiene que:

a. $|S_i| = N(c_i)$, $|S_j| = N(c_j)$ y $|S_i \cap S_j| = N(c_i c_j)$
b. $|\overline{S_i}\,| = N(\overline{c_i})$, $|\overline{S_j}| = N(\overline{c_j})$

Y sabemos por las leyes de Morgan $\overline{S_i \cup S_j} = \overline{S_i} \cap \overline{S_j}$, y $\overline{S_i \cap S_j} = \overline{S_i} \cup \overline{S_j}$, entonces

c. $|\overline{S_i \cup S_j}\,| = N(\overline{c_i}\,\overline{c_j})$ (los que no cumplen ni c_i ni c_j)
d. $|\overline{S_i \cap S_j}\,| = N(\overline{c_i c_j})$ (los que no cumplen simultáneamente ambas c_i *y* c_j)

Aquí, estamos suponiendo que *N=|S|,* y *S* contiene a todos los elementos existentes, entonces obtenemos $N(\overline{c_i}\,\overline{c_j})$ en términos de las demás cardinalidades conocidas:

$$N(\overline{c_i}\,\overline{c_j}) = N - [N(c_i) + N(c_j)] + N(c_i c_j) \qquad \textbf{(*)}$$

Observa que el último término lo hemos sumado porque fue eliminado dos veces al restar el término $N(c_i) + N(c_j)$.

La expresión **(*)** es el **Principio de inclusión y exclusión para dos condiciones.** De manera análoga, siguiendo la misma notación y apoyándonos con la figura **(b)** en que se representa la situación para tres condiciones, se puede obtener esta extensión del principio:

$$N(\overline{c_i}\overline{c_j}\overline{c_k}) = N - [N(c_i) + N(c_j) + N(c_k)] + [N(c_ic_j) + N(c_jc_k) + N(c_ic_k)] - N(c_ic_jc_k)$$

Y por supuesto, es posible generalizarlo para cualquier cantidad *r* de condiciones.
Un corolario inmediato de este principio es el siguiente:

El número de elementos de *S* que satisfacen al menos una de las condiciones c_i, $1 \leq i \leq r$, está dado por $N - N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3} \ldots \overline{c_r})$

Ejemplo.
Determinemos el número de enteros positivos menores o iguales que 100 que no son divisibles entre 2 ó 3.

En este caso $S = \{1,2, \ldots 100\} \Rightarrow N = 100$. Para cada $n \in S$, decimos que n satisface

a. la condición c_1 si n es divisible entre 2
b. la condición c_2 si n es divisible entre 3

Entonces la respuesta al problema planteado será $N(\overline{c_1}\overline{c_2})$.
Contemos:
$N(c_1) = \frac{100}{2} = 50$, porque los 50 enteros positivos 2,4,6,8, 10…98,100 son divisibles entre 2
$N(c_2) = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$, porque los 33 enteros positivos 3,6,9,12, 15…96,99 son divisibles entre 3

$N(c_1c_2) = \left\lfloor\frac{100}{6}\right\rfloor = 16$, porque hay 16 elementos de S que son simultáneamente divisibles entre 2 y 3, y por tanto divisibles entre el mínimo común múltiplo de ellos que es 6.

Aplicando el Principio de inclusión-exclusión, se tiene que:

$N(\bar{c_1}\bar{c_2}) = N - [N(c_1) + N(c_2)] + N(c_1c_2) = 100 - (50 + 33) + 16 = 33$

Estos 33 números forman el conjunto

$\{1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,37,41,43,47,49,53,55,59,61,65,67,71,73,77,79,83,85,89,91,95,97\}$

Ejemplo.

¿De cuántas formas pueden permutarse las 26 letras del alfabeto de tal manera que ninguno de los patrones resultantes sean mil*, san* o *ted*?

¡Ahora S será el conjunto de todas las permutaciones de 26 letras, entonces N=26! Para cada $1 \leq i \leq 3$, diremos que una permutación de *S* satisface la condición c_i si contiene mil*, san* o *tes* respectivamente.

Así, para calcular $N(c_1)$, por ejemplo, contamos el número de formas en que pueden permutarse los 24 símbolos: *mil,a,b,c,d,e,f,g,h,j,k,n,o,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z* entonces $N(c_1) = 24!$ y de manera análoga tendremos que $N(c_2) = N(c_3) = 24!$

Para $N(c_1c_2)$ tenemos ahora 22 símbolos: *mil,san,b,c,d,e,f,g,h,j,k,o,p,q,r,t,u,v,w,x,y,z* que pueden permutarse de 22! formas así que $N(c_1c_2) = 22!$ y, similarmente, obtenemos también $N(c_2c_3) = 22! = N(c_1c_3)$. Por último tendremos que para calcular $N(c_1c_2c_3)$ contamos las permutaciones de los 20 símbolos: *mil,san,ted,b,c,f,g,h,j,k,o,p,q,r,u,v,w,x,y,z* que son 20! Así el número de permutaciones de *S* que no contienen ninguno de los patrones dados será:

$$
\begin{aligned}
N(\overline{c_1}\overline{c_2}\,\overline{c_3}) &= N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)] + [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3)] - N(c_1c_2c_3) \\
&= 26! - (24! + 24! + 24!) + (22! + 22! + 22!) - 20! \\
&= 26! - 3(24!) + 3(22!) - 20!
\end{aligned}
$$

Ejemplo.

En la sección 2.1.1 resolvimos el problema de hallar las soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Usando combinaciones con repetición obtuvimos que $\binom{7+4-1}{7} = 120$. Respondamos ahora a la misma pregunta con las restricción adicional de que $x_i \leq 2,\ \ \forall 1 \leq i \leq 4$.

Sea S el conjunto de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \ \Rightarrow N = 120.$ Diremos que una solución x_1, x_2, x_3, x_4 satisface la condición c_i, para $1 \leq i \leq 4$ si $x_i > 2$ (ó $x_i \geq 3$). La respuesta entonces será $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ )$. Notemos que por simetría $N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = N(c_4)$, así que basta calcular uno de ellos, digamos $N(c_1)$. Para esto, consideramos las soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$, porque si a una solución de estas le sumamos 3 a x_1, entonces será una solución de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ que satisface la condición c_1. Tenemos entonces que $N(c_1) = \binom{4+4-1}{4} = 35$, por lo tanto $N(c_i)$=35 para cada $1 \leq i \leq 4$.

De manera similar notemos que $N\left(c_ic_j\right)$, tiene el mismo valor para cada pareja $i, j \in \{1,2,3,4\}, i \neq j$, así que basta calcular $N(c_1c_2)$ y lo obtendremos contando el número de soluciones no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, porque si a una solución de esta ecuación le sumamos 3 a x_1 y 3 a x_2, entonces será una solución de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ que satisface las condiciones $c_1\ y\ c_2$. Tenemos entonces que $N(c_1c_2) = \binom{1+4-1}{1} = 4$, por lo tanto $N\left(c_ic_j\right) = 4$ para cada una de las $\binom{4}{2} = 6$ distintas parejas de condiciones.

Observemos que $N\left(c_i c_j c_k\right) = 0$ para cualquier elección de tres condiciones distintas pues no hay manera de sumar cuatro números enteros positivos distintos, tres de ellos mayores que 2 y que sumen 7. Por la misma razón $N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 0$. Tenemos entonces que:

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ )$$

$$= N - \left(\sum_{1\le i\le 4} N(c_i)\right) + \left(\sum_{1\le i\le j\le 4} N\left(c_i c_j\right)\right) - \left(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4} N\left(c_i c_j c_k\right)\right)$$

$$+ N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 120 - 4(35) + \binom{4}{2} 4 - 0 + 0 = 120 - 140 + 24 = 4$$

Así, de las 120 soluciones enteras no negativas de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Solamente cuatro satisfacen que $x_i \le 2,\ \forall 1 \le i \le 4$. Ellas son $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 2$ y simétricamente, $x_2 = 1, x_1 = x_3 = x_4 = 2$; $x_3 = 1, x_1 = x_2 = x_4 = 2$ y $x_4 = 1, x_1 = x_3 = x_4 = 2$.

2.1.3. Desórdenes

Ponemos ahora nuestra atención en un tipo particular de ordenaciones, aquellas en las que **ningún elemento está en el lugar "correcto" (o natural).**Recuerda que a las ordenaciones de tamaño n de un conjunto de n elementos las conocemos como permutaciones de n elementos.

Una permutación de los números 1,2,3,…,n de modo que el 1 **no** quede en primer lugar, el 2 **no** quede en segundo lugar,…,el i **no** quede en i-ésimo lugar,…,el n **no** quede en n-ésimo lugar, se denomina un **desorden de los números** 1,2,3,…,n

Ejemplo. Describamos los desórdenes de los números 1,2,3,4.

Hay nueve permutaciones de estos números que son desórdenes, ellos son:

2143	3142	4123
2341	3412	4312
2413	3421	4321

Como en total hay 4!=24 permutaciones, entonces las otras 15 no son desórdenes (es decir algún elemento queda en su lugar correcto).

Podemos contar los desórdenes usando el principio de inclusión-exclusión. Supongamos por ejemplo que queremos contar los desórdenes de los números 1,2,3,...,10. Para cada $1 \leq i \leq 10$ decimos que una ordenación de los números 1,2,3,...,10 satisface la condición c_i si el entero i está en el lugar i-ésimo. Denotaremos por d_{10} al número de desórdenes de los números 1,2,3,...,10. Observemos que $d_{10} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3} \ldots \overline{c_{10}})$. Contemos:

$N = 10!$ el número de permutaciones de los números de 1 a 10

$N(c_i) = 9!$ el entero i está en su lugar (el i-ésimo) y contamos las permutaciones de los restantes 9. Hay $\binom{10}{1} = 10$ de estos números: uno por cada condición.

$N(c_i c_j) = 8!$ los enteros $i\ y\ j$ están en su lugar correcto y contamos las permutaciones de los restantes 8 elementos. Hay $\binom{10}{2} = 45$ de estos números: uno por cada pareja de condiciones.

$N(c_i c_j c_k) = 7!$ los enteros $i, j\ y\ k$ están en su lugar correcto y tenemos las permutaciones de los restantes 7 elementos. Hay $\binom{10}{3} = 120$ de estos números: uno por cada terna de condiciones.

$N(c_i c_j c_k c_l) = 6!$ los enteros $i, j, k\ y\ l$ están en su lugar correcto y tenemos las permutaciones de los restantes 6 elementos. Hay $\binom{10}{4} = 210$ de estos números: uno por cada subconjunto de cuatro condiciones.

$N(c_1 c_2 \ldots c_{10}) = 1$ Todos los enteros de 1 a 10 están en su lugar correcto. Hay uno sólo de estos números, representa el conjunto total de las diez condiciones.

Así:

$$d_{10} = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3} \ldots \overline{c_{10}})$$

$$= 10! - \binom{10}{1}9! + \binom{10}{2}8! - \binom{10}{3}7! + \binom{10}{4}6! - \binom{10}{5}5! + \binom{10}{6}4! - \binom{10}{7}3! + \binom{10}{8}2! - \binom{10}{9}1! + \binom{10}{10}0!$$

¡Simplificaremos esta expresión, factorizando un 10! del lado derecho de la igualdad, pero antes, recordemos algo que aprendiste en tus cursos de Cálculo integral y diferencial.

La expresión de la función exponencial como serie de Taylor está dada por

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

de manera que

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \cdots$$

Entonces, simplifiquemos la expresión que obtuvimos para d_{10}:

$$d_{10} = 10!\left(1 - \binom{10}{1}\frac{9!}{10!} + \binom{10}{2}\frac{8!}{10!} - \binom{10}{3}\frac{7!}{10!} + \binom{10}{4}\frac{6!}{10!} - \binom{10}{5}\frac{5!}{10!} + \binom{10}{6}\frac{4!}{10!} - \binom{10}{7}\frac{3!}{10!} + \binom{10}{8}\frac{2!}{10!} - \binom{10}{9}\frac{1!}{10!} + \binom{10}{10}\frac{0!}{10!}\right)$$

$$= 10!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{10!}\right) \approx (10!)(e^{-1})$$

Observa que al calcular $d_4 = 4!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = (3)(4) - 4 + 1 = 9$, obtenemos el resultado que ya conocíamos.

Ejemplo.

En una editorial necesitan revisar siete manuscritos para su posible publicación. Contratan a 7 revisores para hacerlo. La gerencia exige que cada manuscrito tenga dos revisiones –hechas por dos personas diferentes- así que la primera semana da un libro a cada persona para que lo lea y los redistribuye al inicio de la segunda semana. ¿De cuántas formas puede hacer las distribuciones de manera que se obtengan las dos revisiones de cada libro?

La primera semana se pueden distribuir los manuscritos de 7 maneras. Con este orden establecido, se numeran los libros y revisores del 1 al 7, así, para la segunda semana necesitaremos una ordenación en la que ninguno de los números quede en su posición natural y sabemos que esto se puede hacer de d_7 maneras. Entonces, por la regla del producto, hay $7!\,d_7 = (7!)^2 e^{-1}$ formas de hacerlo.

2.2. Funciones generatrices

Otra de las herramientas del Análisis Combinatorio que se usan para contar son las funciones generatrices (o generadoras). En secciones anteriores habíamos contado las soluciones enteras de una ecuación como esta:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r \qquad x_i \geq 0, \qquad 1 \leq i \leq n$$

y aprendiste que es precisamente $\binom{r+n-1}{r}$, es el número de combinaciones, con repetición, de tamaño r tomadas de n elementos. Con el principio de inclusión-exclusión pudimos agregar restricciones a la ecuación (por ejemplo, contar solamente soluciones pares, o aquellas en las que algunos elementos son pares y otros están acotados). Ahora, con las funciones generatrices podrás resolver problemas de este mismo estilo pero con otro tipo de restricciones.

2.2.1. Ejemplos introductorios

Hasta ahora hemos visto problemas de conteo relativamente simples, dónde la observación y el uso de la herramienta adecuada permite solucionarlos. Sin embargo, no todos son tan sencillos, para esos usaremos técnicas más elaboradas.

Algo que debemos observar es que cuando contamos combinaciones –con o sin repetición- estamos usando coeficientes binomiales, es decir, coeficientes del Binomio de Newton, entonces, lo que haremos ahora será encontrar un método que nos permita representar un problema de conteo mediante un polinomio para luego de ciertas manipulaciones algebraicas conocer el –o los- coeficiente(s) que respondan al problema de conteo. Esto es lo que está detrás del concepto de función generatriz. Quedará más claro con algunos ejemplos.

Ejemplo.

Margarita quiere regalar 7 libros a sus dos sobrinos, de manera que a uno le toquen al menos 4 y al otro le toquen al menos dos, ¿de cuántas formas puede dárselos?

Construimos un polinomio que represente este problema. Primero asignamos un polinomio que represente las distribuciones para cada sobrino:

- Al primer sobrino le pueden tocar al menos 4 libros, por lo que iniciamos con x^4, al segundo sobrino le deben tocar al menos dos de los 7 libros o sea que al primer sobrino no le podrán tocar más de cinco libros, representamos esto con x^5, y entonces el polinomio para la distribución de libros del primer sobrino será $x^4 + x^5$,

- El polinomio asociado al segundo sobrino tiene como primer término x^2, porque al menos le tocan dos libros; le pueden tocar tres, entonces el segundo término es x^3, y no le pueden tocar 4 ó más porque entonces al primer sobrino le tocarían sólo 3 ó menos libros, incumpliendo uno de los requisitos. Así el polinomio del segundo sobrino será $x^2 + x^3$

El polinomio que representa el problema será el producto de estos dos polinomios:

$$f(x) = (x^4 + x^5)(x^2 + x^3) = x^6 + 2x^7 + x^8$$

y la respuesta está dada por el coeficiente del término de grado 7 de $f(x)$. Es decir, hay dos formas posibles en que Margarita puede regalar los libros a sus sobrinos con las restricciones indicadas. De hecho, al hacer el producto de los polinomios notamos que:

$$f(x) = (x^4 + x^5)(x^2 + x^3) = x^4x^2 + x^4x^3 + x^5x^2 + x^5x^3$$
$$\Rightarrow 2x^7 = x^4x^3 + x^5x^2$$

por lo que ella puede repartir los 7 libros como 4 y 3 o como 5 y 2.

Ejemplo.

Si, con las mismas restricciones, Margarita quisiera repartir ahora 9 libros, ¿de cuántas formas podría hacerlo?

Ahora buscaríamos el coeficiente del término de grado 9 en el polinomio:

$$f(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + x^7)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$
$$= x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}$$

tal coeficiente es 4. Hay cuatro posibles formas de repartir los 9 libros.

Ejemplo.

Ramiro compró 8 manzanas para sus tres hijos, Saúl, María y Rocío. Quiere repartirlas de modo que Rocío tenga al menos tres y Saúl y María al menos dos, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

El polinomio que representa las formas de repartir las manzanas a Rocío es $x^3 + x^4$, pues puede tener al menos 3 pero no más de cuatro para que sus hermanos alcancen al menos dos cada uno. La repartición para Saúl y María tiene el mismo polinomio: $x^2 + x^3$. Buscamos entonces, el coeficiente del término de grado 8 en el polinomio:

$$f(x) = (x^3 + x^4)(x^2 + x^3)^2 = (x^3 + x^4)(x^4 + 2x^5 + x^6) = x^7 + 3x^8 + 3x^9 + x^{10}$$

Hay tres formas de repartir las manzanas cumpliendo las restricciones de Ramiro. Para saber cuáles son estas formas, observemos que el coeficiente de x^8 de $f(x)$ se construyó con los productos $(x^3)(x^2\ x^3)$, $(x^3)(x^3\ x^2)$ y $(x^4)(x^2\ x^2)$. Entonces las reparticiones posibles son:

Rocío	**Saúl**	**María**
3	2	3
3	3	2
4	2	2

En los tres ejemplos descritos, el polinomio $f(x)$, asociado a cada problema, es *la* **función generatriz** que representa las distribuciones de los objetos que se reparten en cada caso. Vimos que en los tres ejemplos la función es un polinomio y el coeficiente del término de grado n, donde n es el tamaño de la repartición- nos dio la respuesta e incluso la manera explícita de describir las reparticiones. En ocasiones es un poco más complicado obtener los coeficientes buscados y solamente nos conformamos con exhibir la función que resuelve el problema.

Ejemplo.

En un gran vitrolero hay una **cantidad ilimitada** de caramelos de colores: rojo, verde, amarillo y azul (aquí con “cantidad ilimitada” entenderemos que hay disponibles muchísimos caramelos de cada color, o al menos más de 24 de cada tipo) ¿de cuántas maneras puede un niño seleccionar

24 caramelos de modo que tenga un número par de caramelos rojos y al menos 6 caramelos azules?

Los polinomios asociados a la selección de cada color son:

- rojo: $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots x^{24}$ iniciamos desde 1 porque es el coeficiente de x^0 que es par y por tanto una posibilidad es que no se escoja ningún caramelo rojo.
- azul: $x^6 + x^7 + x^8 + \cdots x^{24}$
- verde: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots x^{24}$ aquí también podría no seleccionarse ningún verde
- amarillo: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots x^{24}$ podría no seleccionarse ningún caramelo amarillo

La respuesta a este problema está dada por el coeficiente de x^{24} en la función generatriz:
$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots x^{24})^2(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots x^{24})(x^6 + x^7 + x^8 + \cdots x^{24})$

Ejemplo.
¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ si $x_i \geq 0$, para todo $1 \leq i \leq 4$?

En la sección 2.1.1 viste que este problema es equivalente al de repartir 25 monedas de un peso –objetos idénticos- entre cuatro niños. Aquí describiremos las posibles reparticiones para cada niño con el polinomio $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{24} + x^{25}$ (como antes, el 1 aparece indicando la posibilidad de la repartición vacía: que al niño dado no le toque ninguna moneda). Y entonces, la respuesta al problema será el coeficiente de x^{25} en la función generatriz:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{25})^4$$

También podemos obtener la misma respuesta mediante el coeficiente de x^{25} en la función generatriz:

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{25} + x^{26} + \cdots)^4$$

la diferencia es que aquí el planteamiento quedaría dado de forma similar al ejemplo de los dulces: se quieren repartir 25 monedas de un peso entre 4 niños, tomándolas de una colección "ilimitada" –o muy grande- de monedas. Mientras que $f(x)$ es un polinomio, $g(x)$ es una serie de potencias, en la que los coeficientes de los términos de grado k, con $k \geq 26$ no se usan. Sin embargo, muchas veces será más fácil hacer cálculos con series de potencias que con polinomios.

2.2.2. Definiciones y técnicas de cálculo

En esta sección conocerás el concepto de función generatriz y analizarás algunos ejemplos relacionados con series infinitas.

Definición. Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números reales. La función

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Es la **función generatriz** de la sucesión dada. Decimos entonces que la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es **generada** por la función $f(x)$.

Ejemplo.

En la sección 1.3.3 revisaste la identidad binomial, de la cual puedes obtener fácilmente que si $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r$$

Observa que $\binom{n}{r} = 0\ \forall r > n$, así que $f(x) = (1+x)^n$ es la función generatriz de la sucesión $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}, 0,0,0, \ldots$

Ejemplo.

En la sección 1.2.1 recordaste la serie geométrica, en sus versiones finita e infinita.

- La suma finita, si $|x| < 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \qquad si\; n \in \mathbb{N}$$

Entonces $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ es la función generatriz de la sucesión 1,1,1,…1,0,0,0,… con los primeros $n + 1$ términos iguales a 1 y después una infinidad de 0's.

- La serie infinita, si $|x| < 1$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1 - x}$$

Entonces $f(x) = \frac{1}{1-x}$ es la función generatriz de la sucesión 1,1,1,…

Con estos resultados podemos obtener otros inmediatos:

a. la función generatriz de la sucesión 1,7,21,35,35,21,7,1,0,0,0,… es $f(x) = (1 + x)^7$
b. la función generatriz de la sucesión 1,1,0,1,1,1,… es $g(x) = \frac{1}{1-x} - x^2$ observa que estamos usando el hecho de que $f(x) = \frac{1}{1-x}$ es la función generatriz de la sucesión 1,1,1,1,1,…
c. la sucesión 1,1,1,3,1,1,1,… es generada por la función $h(x) = \frac{1}{1-x} + 2x^3$
d. la sucesión asociada a la función generatriz $f(x) = (1 - x)^3$ es 1,-3,3,-1,0,0,0,…
e. la sucesión asociada a la función $f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4) + (1 - 3x + 3x^2 - x^3)$ es 1,-2,4,0,1,0,0,0,… (sugerencia: efectúa la suma y agrupa términos semejantes)

En la primera unidad estudiaste la definición clásica del coeficiente binomial:

$$\text{Si } n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\; y\; 0 \leq r \leq n \;\Rightarrow \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Queremos ahora extenderla para el caso en que $n, r \in \mathbb{Z}$, para esto, observa que:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{[n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)]}{r!}$$

Únicamente eliminamos factores comunes en numerador y denominador. Así, definimos:

Si $n, r \in \mathbb{N}\ y\ 0 \le r \le n$

$$\binom{\boldsymbol{-n}}{\boldsymbol{r}} = \frac{[-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-r+1)]}{r!}$$

$$= (-1)^r(n)(n+1)(n+2)\dots(n \mp r-1)/r!$$

$$= \frac{(-1)^r(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}$$

Ejemplo.

Completando el ejemplo 1, podemos ver de manera inmediata que si $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^{-n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \dots + \binom{-n}{n}x^n$$

que según la generalización que acabamos de hacer quedaría como

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r$$

así que $f(x) = (1+x)^{-n}$ es la función generatriz de la sucesión $\binom{-n}{0}, \binom{-n}{1}, \binom{-n}{2}, \dots, \binom{-n}{n}, 0,0,0, \dots$

Representada también como $\binom{n-1}{0}, -\binom{n}{1}, \binom{n+1}{2}, -\binom{n+2}{3}, \dots, (-1)^n\binom{2n-1}{n}, 0,0,0, \dots$

Ejemplo.

¿Cuál es el coeficiente de x^5 en $(1+3x)^{-8}$?

Haciendo $y = 3x$ y usando el resultado expuesto en el ejemplo anterior, tenemos:

$$(1+3x)^{-8} = (1+y)^{-8} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-8}{r} y^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-8}{r} (3x)^r$$

Entonces, el coeficiente buscado es el del sumando correspondiente a $r = 5$, es decir, $$\binom{-8}{5} 3^5 = (-1)^5 \binom{8+5-1}{5} 3^5 = -\binom{12}{5}(243) = -792$$

Ejemplo.

Encuentra el coeficiente de x^{11} en $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$.

Observa que

$$(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = x^2(1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{x^2}{1-x}$$

factorizando y usando la identidad de la serie geométrica, entonces el coeficiente de x^{11} en $f(x)$ es el coeficiente de x^{11} en $$\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^4 = \frac{x^8}{(1-x)^4} = x^8(1-x)^{-4}$$

así que el coeficiente buscado es el coeficiente de x^3 en $(1-x)^{-4}$, es decir, $$\binom{-4}{3}(-1)^3 = (-1)^3\binom{4+3-1}{3}(-1)^3 = \binom{6}{3} = 20$$

Nota que incluso es posible describir una “regla general” para determinar los coeficientes de todos los grados en $f(x)$:

- si $0 \leq n \leq 7$, el coeficiente de x^n en $f(x)$ es 0;

- si $n \geq 8$, el coeficiente de x^n en $f(x)$ es el coeficiente de x^{n-8} en $(1-x)^{-4}$, que es $\binom{-4}{n-8}(-1)^{n-8} = \binom{n-5}{n-8}$.

En la tabla siguiente hacemos un resumen de las dentidades que, hasta este momento, hemos obtenido. Te serán de utilidad posteriormente.

Para cada $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$,

(1)	$(1+x)^n$	=	$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}x^r$
(2)	$(1+ax)^n$	=	$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \binom{n}{2}a^2x^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^nx^n = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}a^rx^r$
(3)	$(1+x^m)^n$	=	$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + \binom{n}{n}x^{nm} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}x^{rm}$
(4)	$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$	=	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n}x^i$
(5)	$\frac{1}{1-x}$	=	$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}x^i$
(6)	$\frac{1}{(1-x)^n}$	=	$\binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-1)^r x^r$ $= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r$
(7)	$\frac{1}{(1+x)^n}$	=	$\binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}x^r = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r$

Tabla 1.Resumen de las identidades

Ejemplo.

¿De cuántas formas se pueden seleccionar r objetos de entre n distintos objetos si se permite la repetición?

La selección de cada uno de los objetos es representada mediante la serie geométrica $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$, pues el primer sumando representa la opción de no elegir ninguno, el segundo la de elegir uno, el tercero la opción de elegir dos,.. así de manera subsecuente.

Entonces, la función generatriz asociada a la selección de los n distintos objetos será:

$(\text{Grimaldi, 1997})= \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$

y por la identidad (6) de la Tabla 1:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

Tal como habías aprendido en la Unidad 1 cuando estudiaste combinaciones con repetición.

Ejemplo.

¿De cuántas formas puede distribuir un entrenador de tenis 28 pelotas de tenis a cuatro jugadores de forma que cada uno reciba al menos tres pero no más de ocho?

Las distribuciones posibles para cada jugador están dadas por la expresión $x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$, como hay cuatro jugadores, la función generatriz que se obtiene es $f(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4$. Y ahí, buscamos el coeficiente de x^{28}. Observa que:

$$f(x) = \left(x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)\right)^4 = x^{12}\,(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$$

$$= x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = x^{12}(1-x^6)^4\,(1-x)^{-4}$$

Así que el coeficiente buscado es el de x^{16} en $(1-x^6)^4\,(1-x)^{-4}$. Desarrollemos esta expresión ayudándonos con las identidades de la Tabla 1:

$$(1-x^6)^4\,(1-x)^{-4} =$$

$$= \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \binom{4}{3}x^{18} + \binom{4}{4}x^{24}\right]\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-1)x + \binom{-4}{2}(-1)^2x^2 \dots\right]$$

$$= [1 - 4x^6 + 6x^{12} - 6x^{18} + x^{24}]\left[1 - \binom{4}{1}x + \binom{5}{2}x^2 - \binom{6}{3}x^3 + \binom{7}{4}x^4 \dots\right]$$

Ha quedado como el producto de un polinomio de grado 24 –con solamente cinco términos no nulos- y un "polinomio infinito" ¿cómo se forma el coeficiente de x^{16} en esta expresión? Veamos, los factores que participan en la formación de este coeficiente son:

del polinomio de grado 24	**del polinomio infinito**
1	$\binom{19}{16}x^{16}$
$-4x^6$	$\binom{13}{10}x^{10}$
$6x^{12}$	$\binom{7}{4}x^4$

Observa que estos son todos los términos que formarán el término de grado 16 en la expresión que estamos analizando, los otros dos términos del polinomio finito no participan pues tienen grado mayor que 16. Entonces, el coeficiente de x^{16} será: $\binom{19}{16} + (-4)\binom{13}{10} + 6\binom{7}{4} = 969 - 1124 + 210 = 55$.

Hay 55 formas de distribuir las pelotas de tenis con estas restricciones.

Cierre de la unidad

En esta unidad has aprendido a usar estrategias eficaces de conteo, como son el Principio de inclusión-Exclusión, su definición, y propiedades, además de su aplicación en funciones generatrices.

Existen más herramientas que te ayudan a realizar un conteo, pero estas son las fundamentales y suficientes para que tengas el conocimiento sobre estrategias de conteo En la unidad tres revisaremos la teoría de gráficas, su concepto, su recorrido, arboles, planaridad y coloración.

Para saber más

Si quieres tener más información sobre los temas vistos en la unidad puedes revisar estos recursos:

Aquí puedes revisar contenidos sobre inclusión y exclusión.

- JDM (2008). Método de inclusión-exclusión. Matetam. http://www.matetam.com/de-consulta/books/metodo-inclusion-exclusion

En la siguiente consulta, te muestra contenidos sobre combinatoria

- Calmaestra (2007). Unidad didáctica: Combinatoria, Álgebra. Descartes 3D. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Combinatoria/combinatoria.htm

En la siguiente consulta, te muestra el programa Wolfram, sobre funciones generatrices.

- Weisstein, Eric W. "Función generadora". De MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/GeneratingFunction.html

Fuentes de consulta

Básica

- Biggs, N. L. (1979). The Roots of Combinatorics . Historia Mathematica 6, 109-136.
- Grimaldi, R. (1997). Matemáticas, Discreta y Combinatoria. México: Prentice Hall.
- Florence, N. D. (1962). Games, Gods and Gambling. New York: Hafner Press.
- Roberts, F. (1984). Applied Combinatorics. USA: Prentice Hall.
- UCAM Universidad Católica de Murcia. (18 de junio de 2015). Matemática Discreta – Principio de inclusión y exclusión I. Jesús Soto. [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=cx-zcOhmBcY
- Villalpando, R.F (s.f). Apuntes para la materia de matemáticas discretas. http://seraace.com/files/notas_mat_dis.pdf