MATEMÁTICAS

ANÁLISIS COMBINATORIO

5º SEMESTRE

UNIDAD 3. TEORÍA DE GRÁFICAS

Clave

05143526

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Unidad 3. Teoría de gráficas

Presentación de la unidad

Para concluir tu curso de Análisis Combinatorio conocerás una de las herramientas más versátiles de la matemática, ha demostrado gran eficacia en la modelación de problemas de prácticamente cualquier área del conocimiento humano. Nos referimos al concepto de **gráfica.** Una gráfica es un conjunto de objetos –los vértices- y una relación entre pares de tales objetos—las aristas-, puedes encontrar ejemplos de gráficas en la representación situaciones tan cotidianas como las relaciones interpersonales, el tránsito vehicular, las redes de comunicación, las interacciones moleculares o las estructuras de jerarquización en una empresa, por mencionar sólo algunas.

Las gráficas frecuentemente son representadas mediante dibujos: usamos puntos para representar cada uno de los vértices (los objetos a relacionar) y líneas entre dos vértices para indicar que esos dos objetos están relacionados. En cualquier conjunto sobre el cual pueda definirse una relación es posible definir una gráfica. En esta Unidad aprenderás algunos de los principales resultados de la Teoría de Gráficas.

Competencia específica

Utiliza la Teoría de Gráficas para modelar problemas que puedan ser representados estableciendo relaciones simétricas entre los elementos de conjuntos finitos.

Logros

- Identificar algunos de los conceptos fundamentales de la Teoría de Gráficas.
- Utilizar los resultados básicos de la Teoría de Gráficas.
- Utilizar algunos de estos resultados para modelar situaciones de otros contextos del saber humano obteniendo resultados específicos.

Algunos resultados fundamentales

Ya en tu curso de Matemáticas Discretas conociste un poco de Teoría de Gráficas. Iniciaremos por establecer la terminología y notación básica que será la que usaremos durante la Unidad.

Introduzcamos el de gráfica,

Definición. Una gráfica, G, es una pareja (V, E) donde V es un conjunto finito no vacío y $E \subset V \times V$ es una relación simétrica y no reflexiva sobre los elementos de V.

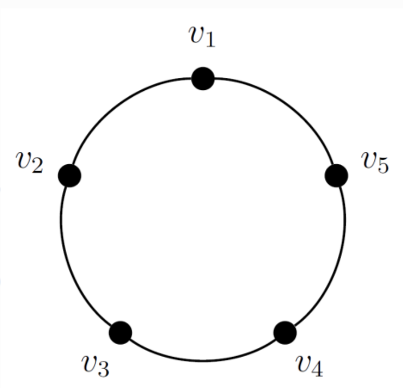
Si la relación E indica que hay una pareja de vértices u, v relacionados entre sí, esta pareja se denomina **arista de** G, como la relación E es simétrica entonces las parejas (u, v) y (v, u) pertenecen a E. De hecho, ambas representan la misma arista, e, por lo que, en lugar de usar parejas ordenadas, la denotaremos como $e = uv$ (o equivalentemente, $e = vu$). En una gráfica G, a V se le llama **conjunto de vértices** y a E **conjunto de aristas.**

Ejemplo. *Sea* $G = (V, E)$ *donde* $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *y* $E = \{v_1v_2,\ v_3v_2,\ v_3v_4,\ v_4v_5,\ v_1v_5\}$.

Llamamos el **orden** y el **tamaño** de G a los valores $|V|$ y $|E|$ respectivamente. La gráfica del ejemplo anterior tiene orden 5 y tamaño 5.

Las gráficas que estudiaremos en este curso no admiten aristas en las que los dos vértices relacionados son el mismo, es decir, en E no habrá aristas de la forma uu. Cuando se trabaja con gráficas generalmente se usan dibujos para describirlas más fácilmente: ponemos un punto para cada vértice y para cada arista una línea –que una precisamente a los vértices relacionados según E - por supuesto el dibujo obtenido no necesariamente es único.

La gráfica definida antes se llama C_5, y algunos de sus dibujos son los que aparecen en la figura 1:



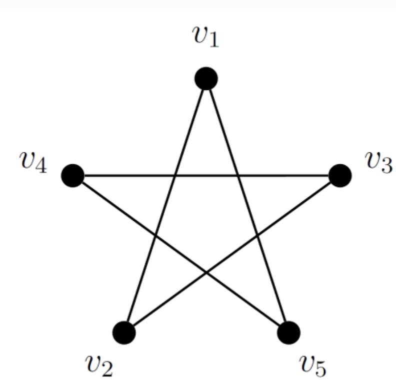


Figura 1. Gráfica C_5

En ocasiones es conveniente especificar explícitamente la gráfica con la que estamos trabajando al referirnos a sus conjuntos de vértices y aristas, los denotamos como $V(G)$ y $E(G)$. Notemos que ya que $E \subset V \times V$ y, en particular el conjunto vacío cumple con ser una relación simétrica y no reflexiva, por lo que el conjunto de aristas de una gráfica puede ser vacío, es decir una gráfica puede no tener aristas, pero, por definición siempre tiene vértices.

Es importante observar, que, aunque una gráfica pueda tener dibujos diferentes ellos contienen exactamente los mismos vértices y las mismas aristas, por lo que, en efecto definen a la misma gráfica, como puedes observar de los dos dibujos que dimos en la figura 1.

Si $e = uv \in E(G)$ decimos que los vértices u y v son **adyacentes o vecinos** en G y si $uv \notin E(G)$, entonces decimos que u y v **no son adyacentes o no son vecinos** en G. También es frecuente decir que u y v son **incidentes** con e.

Si $uv, vw \in E(G)$ son dos aristas distintas de G, -es decir $u \neq w$- decimos que los aristas uv y vw son **aristas adyacentes o que inciden en un mismo vértice.** En la figura 1 podemos observar que los vecinos de v_1 son $v_2 \; y \; v_5$ mientras que los de v_4 son $v_3 \; y \; v_5$. Entonces las aristas $v_1v_5 \; y \; v_4v_5$ son incidentes en el vértice v_5 mientras que las aristas v_1v_5 y v_2v_3 no son adyacentes.

Definición. Sean G una gráfica y $v \in V(G)$, un vértice en ella. El número de aristas de G incidentes en v se llama **el grado de** v y se denota $\delta(v)$. Al mínimo de los grados de todos los vértices de G se le llama **el grado mínimo de** G y se denota $\delta(G)$; y al máximo de los grados de todos los vértices de G se le llama **grado máximo de** G y se denota $\Delta(G)$.

El grado de un vértice coincide también con el número de vecinos que tenga en G. Un vértice de grado cero –es decir, sin vecinos- se llama **vértice aislado.** La gráfica del dibujo anterior, C_5, tiene la cualidad de que todos sus vértices tienen el mismo grado: 2, por lo que $\delta(C_5) = \Delta(C_5) = 2$; pertenece a una clase especial de gráficas:

Definición. Si G es una gráfica en la que todo vértice v, tiene el mismo grado r, G se llama **regular de grado** r ó r**-regular.**

Entonces C_5, es una gráfica 2-regular. Si G, es r-regular se cumple que $\delta(G) = \Delta(G) = r$. Observa ahora la siguiente gráfica G_1:

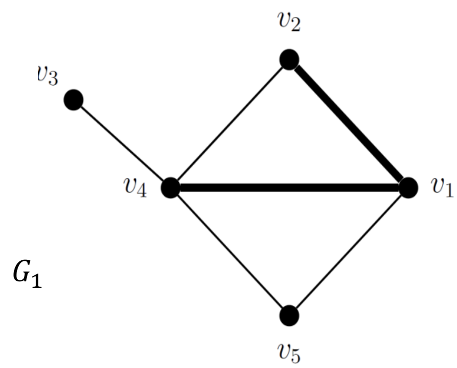


Figura 2. Gráfica G1

En G_1 el vértice v_1 tiene grado 3, v_2 y v_5 tienen grado 2, v_4 grado 4 y v_3 grado 1, por lo que $\delta(G_1) = 1 \;\; y \;\; \Delta(G_1) = 4$. Notemos también que las aristas más gruesas ($v_4v_1 \;\; y \;\; v_2v_1$) son adyacentes, ambas inciden en el vértice v_1. Nota que hay dos vértices que tienen el mismo grado (v_2 y v_5) este no es un hecho aislado, sino un resultado general:

Teorema 1. En toda gráfica G hay dos vértices que tienen el mismo grado.

Demostración. Sea G una gráfica de orden p, supongamos que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$. Dado un vértice de G, ¿qué valores puede tomar su grado? Si consideramos el vértice v_1 puede ocurrir que no sea adyacente a ningún vértice, entonces $\delta(v_1) = 0$, o que tenga exactamente un vecino, entonces $\delta(v_1) = 1$, o que tenga dos vecinos y $\delta(v_1) = 2$, o tres vecinos y $\delta(v_1) = 3$, revisando todas sus opciones, a lo más v_1 podrá tener $p-1$ vecinos –los restantes vértices de G- y entonces $\delta(v_1) = p - 1$.

Así, tenemos que para cada $v_i \in V(G),\; 0 \leq \delta(v_i) \leq p - 1$. Supongamos que todos los vértices de G tuvieran grados distintos. Algo que podemos observar de manera inmediata es que no puede haber, simultáneamente, un vértice de grado cero y uno de grado $p-1$, pues el vértice de grado $p-1$ es vecino de **todos** los demás así que no puede haber un vértice de grado cero.

Entonces, si hay un vértice de grado $p-1$ se tiene que para cada $v_i \in V(G),\; 1 \leq \delta(v_i) \leq p - 1$ es decir hay $p-1$ valores disponibles para "repartir" entre p vértices, por el Principio de Cajas sabemos que habrá algún valor en el que haya al menos dos vértices, o sea, dos vértices que tengan el mismo grado.

Si ahora analizamos el caso en que existe un vértice de grado cero, entonces no podrá haber un vértice de grado $p-1$ pues al ser este vértice aislado, cualquier otro vértice es vecino de a lo más $p-2$ vértices, entonces ahora se tiene que para cada $v_i \in V(G),\; 0 \leq \delta(v_i) \leq p - 2$, nuevamente tenemos $p-1$ valores disponibles para los grados de p vértices y el Principio de Cajas garantiza que haya al menos dos vértices que tengan el mismo grado. ∎

Otra clase especial de gráficas es la siguiente:

Definición. Si G es una gráfica en la que toda pareja de vértices son adyacentes, G es una **gráfica completa.** Si el orden de G es n denotaremos a la gráfica como K_n

Mostramos aquí los dibujos de K_4 y K_5 :

Figura 3. Figura K4 y K5

Como puedes observar K_n es una gráfica $(n-1)$-regular ¿y cuál es su tamaño? veamos, en cada uno de sus n vértices inciden $n-1$ aristas, entonces sumando los grados de todos los vértices tenemos el producto $n(n-1)$, que contará dos veces el total de aristas de la gráfica: una vez por cada uno de sus vértices incidentes. Así, el tamaño de K_n es $\frac{n(n-1)}{2}$ es decir, $\binom{n}{2}$, el número de subconjuntos de tamaño dos tomados de n elementos, ¡claro! pues cada subconjunto de dos elementos es una arista ya que se tienen todas las adyacencias.

El mismo razonamiento de sumar los grados y dividir el total entre dos funciona en general. Observa que si sumas los grados de la gráfica G_1 obtienes: 3+2+2+4+1=12, dividiendo por 2 se tienen 6 que es el número de aristas de la gráfica según podemos ver en su dibujo.

Teorema 2. En toda gráfica G la suma de los grados de los vértices es igual al doble del tamaño de G. Es decir, si $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_p\}$ y $|E(G)|=q$, entonces

$$\sum_{i=1}^{p}\delta(v_i)=2q$$

Demostración. Es inmediata al observar que sumando los grados de los vértices se cuenta cada arista dos veces: una por cada uno de los dos vértices incidentes en ella.

Corolario 1. Toda gráfica G tiene un número par de vértices de grado impar.

Demostración. Sea G una gráfica de orden p y tamaño q. Si G no tiene vértices de grado impar terminamos pues tiene 0 de tales vértices y 0 es un número par. Supongamos entonces que G tiene $k>0$ vértices de grado impar y sean estos: $v_1,v_2,v_3,\dots,v_k$. Si G además tiene vértices de grado par, los denotaremos como: $u_1,u_2,u_3,\dots,u_m$. Sabemos, por el Teorema anterior que:

$$\sum_{i=1}^{k} \delta(v_i) + \sum_{i=1}^{m} \delta(u_i) = 2q$$

como cada $\delta(u_i),\ i = 1,2, \dots, m$ *es par, entonces*

$$\sum_{i=1}^{m} \delta(u_i)$$

es par, entonces

$$\sum_{i=1}^{k} \delta(v_i) = 2q - \sum_{i=1}^{m} \delta(u_i)$$

es par. Sin embargo, cada uno de los números $\delta(v_i),\ i = 1,2, \dots, k$ es impar, así que k debe ser par: la suma de una cantidad par de números impares es par, por lo tanto G tiene una cantidad par de vértices de grado impar. Y si G no tuviese vértices de grado par, entonces

$$\sum_{i=1}^{k} \delta(v_i) = 2q$$

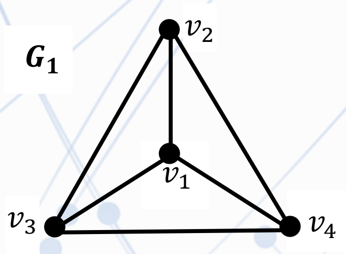
de donde, nuevamente, concluimos que k debe ser par.

Gráficas isomorfas

En cualquier área de las matemáticas algo fundamental es saber cuándo dos objetos que estamos estudiando son el mismo –en algún sentido- o son distintos. Por ejemplo todos consideramos que los números $\frac{100}{20}$ y 5 son iguales aunque ciertamente no son idénticos.

Queremos entonces determinar bajo qué condiciones podemos afirmar que dos gráficas son "iguales". La importancia de conocer esta igualdad, radica en el hecho de que si G_1 y G_2 son dos gráficas que modelan dos situaciones diferentes entonces existe algo similar sobre las dos situaciones.

Intuitivamente, dos gráficas G_1 y G_2 son la misma si es posible "redibujar" una para que se vea como la otra. Por ejemplo la figura 1 al inicio de esta sección, que muestra dos dibujos distintos de C_5, si no supiéramos que es la misma gráfica al observar ambos dibujos pronto lograríamos establecer la igualdad al llevar un dibujo al otro.



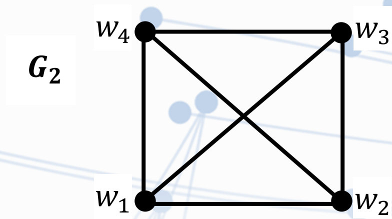


Figura 4. Gráficas G1 y G2

Con la misma idea, las gráficas G_1 y G_2 de la figura 4 diríamos que son "iguales". En realidad, no decimos que gráficas con esta propiedad sean iguales, nos referiremos a ellas como **isomorfas.** Daremos la definición formal de este concepto:

Definición. Sean G_1 y G_2 dos gráficas, un **isomorfismo de** G_1 a G_2 es una función $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ biyectiva tal que $u\ y\ v$ son adyacentes en G_1 si y solamente si $f(u)\ y\ f(v)$ son adyacentes en G_2. Decimos que G_1 y G_2 son **isomorfas** si existe un isomorfismo entre ellas.

Observa que si f es un isomorfismo de G_1 a G_2 entonces f^{-1} es un isomorfismo de G_2 a G_1. Es evidente que gráficas isomorfas deben tener el mismo orden y tamaño.

3.1. Conceptos preliminares y recorribilidad

Una de las clases más importantes de gráficas es la de las gráficas conexas. En esta sección conocerás estudiarás las propiedades de estas gráficas además de los conceptos relativos a la recorribilidad en gráficas.

Definición. Sean $H\ y\ G$ dos gráficas, decimos que H es una **subgráfica de** G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. H se llama **subgráfica generadora de** G si $V(H) = V(G)$.

Ejemplo. En la sección anterior conociste las gráficas $C_5\ y\ K_5$, no es muy difícil observar que $C_5 \subseteq K_5$ y de hecho es una subgráfica generadora.

Definición. Un $\boldsymbol{uv}$**-camino** es una sucesión alternada de vértices y aristas que inicia en el vértice u, termina en v y tal que cada arista conecta al vértice que la precede con el que la sucede. La cantidad de aristas que forman él uv-camino es su **longitud.**

Por lo general las aristas se obvian y se indican únicamente los vértices que forman la sucesión.

Una $\boldsymbol{uv}$**-trayectoria** es un uv-camino que no repite ningún vértice y si sucede que $u = v$, se llama **ciclo.**

Análogamente, la cantidad de aristas que forman una uv-trayectoria o un ciclo es su longitud (o tamaño).

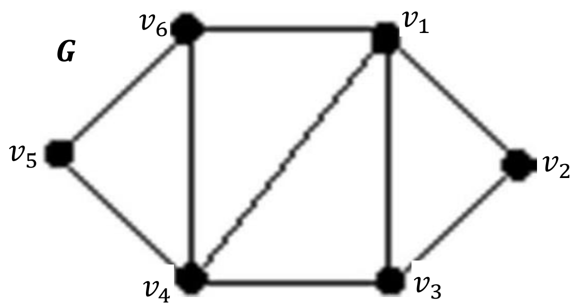


Figura 5. Gráfica G

Ejemplo. *En la gráfica G de la figura 5, $v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_1, v_1, v_1v_6, v_6, v_6v_1, v_1, v_1v_4, v_4, v_4v_6, v_6$ es un v_2v_6-camino de longitud 6. Observa que la arista v_1v_6 aparece dos veces por lo cual no es una v_2v_6-trayectoria. Como dice la definición, las aristas pueden omitirse y podemos describir el camino únicamente como: $v_2, v_3, v_1, v_6, v_1, v_4, v_6$. En esta gráfica v_2, v_3, v_4, v_6 es una v_2v_6-trayectoria de longitud 3 y $v_2, v_3, v_4, v_6, v_1, v_2$ es un ciclo de tamaño 5; $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1, v_2$ es un ciclo generador de G.*

Teorema 3. Sea G una gráfica tal que $\delta(v) \geq 2 \; \forall v \in V(G)$ entonces G contiene un ciclo.

Demostración. Notemos primero que para que la hipótesis se cumpla G debe tener al menos 3 vértices. Supongamos entonces que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$, $p \geq 3$ como $\delta(v_1) \geq 2$ existe una arista e_1 incidente en v_1 y con extremo en algún otro vértice digamos v_i, como $\delta(v_i) \geq 2$ existe una arista e_2 incidente en v_i con extremo en algún otro vértice –distinto de v_1- digamos v_j, nuevamente $\delta(v_j) \geq 2$ así que hay otra arista e_3 incidente en v_j, que si es incidente en v_1 ha formado un ciclo de tamaño 3: v_1, v_i, v_j, si no incide en v_1, incidirá en algún vértice v_k distinto de estos tres que también cumple que $\delta(v_k) \geq 2$ por lo que hay otra arista que sale de él. Si incide en alguno de los anteriores hemos formado el ciclo, si no, seguimos alargando la trayectoria con nuevas aristas pues cada vértice "nuevo" cumple la condición de tener al menos dos vecinos. Como la gráfica es finita, este proceso eventualmente termina y llegamos a un vértice que ya habíamos "visitado" en la trayectoria y cerramos el ciclo.■

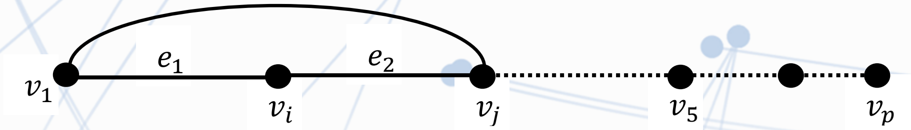


Figura 6. Gráfica finita

Definición. Sean G una gráfica no vacía y $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, decimos que u y v **están conectados** si existe en G una uv-trayectoria.

Decimos que G es una gráfica **conexa** si todo par de vértices de G están conectados y es **disconexa** en otro caso.

Por convención diremos que la gráfica K_1 es conexa. Si H es una subgráfica conexa de G, decimos que es una **componente conexa de** G si no está contenida en otra subgráfica conexa de G que tenga más vértices o aristas que H.

La gráfica G_1 mostrada en la figura 7 tiene cuatro componentes conexas, dos de ellas son solamente vértices aislados pero cada uno cuenta como una componente conexa que es isomorfa a K_1; tales componentes se llaman **componentes conexas triviales.**

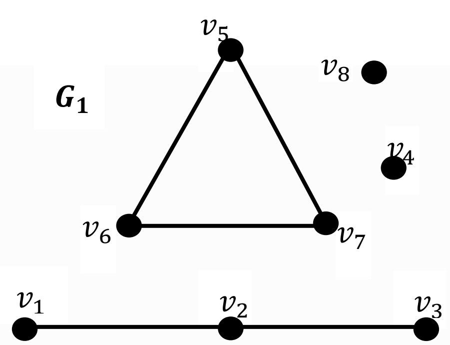


Figura 7. Componentes conexas triviales

Es claro que una gráfica es conexa si y solamente si tiene una sola componente conexa. Determinar cuándo una gráfica es o no conexa es uno de los retos más frecuentes en Teoría de Gráficas. En la siguiente sección estudiarás una clase muy especial de gráficas conexas: los árboles.

Recorribilidad en gráficas

Probablemente el más antiguo problema de Teoría de Gráficas que se conozca –es decir, que se haya resuelto usando estrategias de Teoría de Gráficas como tal- sea el famoso problema de los puentes de *Königsberg*. Este problema introdujo los conceptos siguientes:

Definición. Sea G una gráfica no vacía, **un recorrido euleriano** es un camino cerrado que pasa por todas las aristas de G una sola vez.

Decimos que G es una gráfica **euleriana** si contiene un recorrido euleriano.

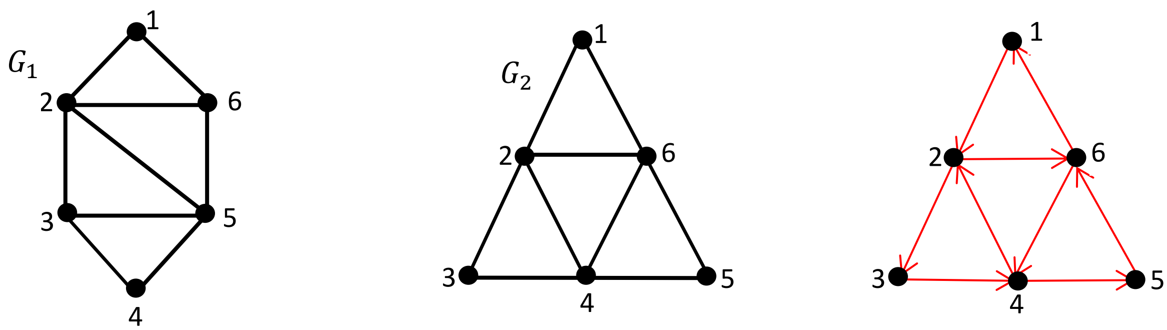


Figura 8. Gráfica Euleriana

Ejemplo. En la figura 8 la gráfica G_1 no es euleriana mientras que G_2 sí lo es. El recorrido 1, 2, 3,4, 2, 6, 4, 5, 6,1 es un recorrido que incluye a todas sus aristas una sola vez. Se indica con flechas rojas.

Observación. Nota que un recorrido euleriano es una subgráfica generadora de G pues al cubrir todas sus aristas, contiene a todos los vértices.

Fue precisamente Euler quien caracterizó a las gráficas que poseen este tipo de recorridos y por eso hoy estos recorridos y esta clase de gráficas llevan su nombre.

Teorema de Euler. Una gráfica G es euleriana si y sólo si es conexa y todo vértice de G tiene grado par.

Demostración.

⇒) Si G es euleriana entonces contiene un recorrido euleriano, de donde es inmediato que G es conexa. El recorrido contiene a todas las aristas así que por cada arista que "llega" a un vértice debe haber otra, que "sale" del mismo por lo que el grado de cada vértice es un número par.

⇐) Supongamos que G es conexa y todos sus vértices tienen grado par. Supongamos que G si tiene aristas, es decir estamos descartando el caso en que $G = K_1$ pues claramente no es euleriana. Procederemos por inducción sobre q el tamaño de G. Entonces el caso más pequeño –la base de la inducción- es $q = 3$ cuando $G = K_3$ que es claramente euleriana. Supongamos entonces que G tiene q aristas, $q > 3$ y como es conexa entonces $\delta(v) \geq 2\ \forall v \in V(G)$ por el Teorema 3 sabemos entonces que G contiene un ciclo γ. Si este ciclo contuviera a todas las aristas hemos terminado si no, consideremos la gráfica $G' = G - \gamma$ es decir, G' es la gráfica que resulta al eliminar de G todas las aristas de γ y eliminar después los vértices aislados.

Puede ser que la gráfica haya quedado disconexa pero como a cada vértice le quitamos exactamente dos aristas, cada una de las componentes conexas no triviales sigue cumpliendo con la hipótesis de inducción así que en cada una de ellas hay un recorrido euleriano que pasa por todas las aristas. Lo único que faltaría sería unir con el ciclo γ todos estos recorridos de cada componente -a los vértices aislados los unimos con el mismo ciclo- de la siguiente forma: Iniciamos en un vértice cualquiera de γ, lo recorremos hasta llegar a un vértice v_i de una componente conexa de G' recorremos esta componente conexa a través del recorrido euleriano que la inducción garantiza que contenga y salimos nuevamente por v_i de esa componente. Continuamos recorriendo γ, hasta llegar a otra componente conexa, volvemos a repetir el proceso hasta terminar con todas las componentes y eventualmente llegamos al vértice en que iniciamos obteniendo así el recorrido euleriano buscado en G. ■

Definición. Sea G una gráfica, un **ciclo hamiltoniano** es un ciclo que pasa por todos los vértices de G, o sea que un ciclo hamiltoniano es un ciclo generador en la gráfica. Una gráfica que tiene un ciclo hamiltoniano se llama **gráfica hamiltoniana.**

En tu curso de Matemáticas Discretas aprendiste la historia de esta clase de gráficas y la razón de su nombre. Aprendiste también que, a diferencia de las gráficas eulerianas que han sido plenamente caracterizadas, la clase de las gráficas hamiltonianas no se conoce totalmente, aunque hay familias “grandes” de gráficas que se sabe que son hamiltonianas.

Figura 9. Gráficas Hamiltonianas

La figura 9 muestra un ciclo hamiltoniano en K_4 y K_5 respectivamente. La gráfica K_n para $n \geq 3$ es hamiltoniana.

En general determinar si una gráfica es o no hamiltoniana es una tarea complicada, sin embargo, se han descubierto algunas condiciones necesarias para que lo sea. El siguiente resultado es uno de los más conocidos en este sentido fue demostrado por Dirac en 1952.

Teorema (de Dirac). Si G es una gráfica de orden $p \geq 3$ y $\delta(v) \geq \frac{p}{2}$ para todo $v \in V(G)$, entonces G es hamiltoniana.

Demostración. Sea G una gráfica de orden $p \geq 3$ y $\delta(v) \geq \frac{p}{2}$ para todo $v \in V(G)$, notemos que G debe ser conexa. Sea $P = v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ una trayectoria de longitud máxima en G, es decir, que cualquier otra trayectoria en G tiene longitud menor o igual que la de P. Por esta maximalidad tenemos que todos los vecinos de v_1 y todos los vecinos de v_k deben pertenecer a P (pues de otro modo la trayectoria podría extenderse). Entonces al menos $\frac{p}{2}$ de los vértices $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ son adyacentes a v_k y al menos $\frac{p}{2}$ de los vértices $v_2, v_3, \dots, v_k$ son adyacentes a v_1. Es decir existen al menos $\frac{p}{2}$ aristas $v_i v_k$ y al menos $\frac{p}{2}$ aristas $v_1 v_{i+i}$ con $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$. El principio de cajas nos garantiza que exista alguna $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$ que cumpla ambas propiedades, es decir, hay en P una arista $v_i v_{i+1}$ tal que $v_i v_k \in E(G)\ y\ v_1 v_{i+i} \in E(G)$.

El ciclo $\gamma = v_1, v_{i+1}, P, v_k, v_i, P, v_1$ -formado desde v_1 al seguir por la arista $v_1 v_{i+i}$, luego por la trayectoria P hasta v_k siguiendo por la arista $v_i v_k$ y nuevamente P hasta volver a v_1- es hamiltoniano pues como G es conexa si γ tuviese un vecino "fuera" este vecino junto con una trayectoria generadora de γ formarían una trayectoria de longitud mayor a la de P, contradiciendo la maximalidad (figura 12). ■

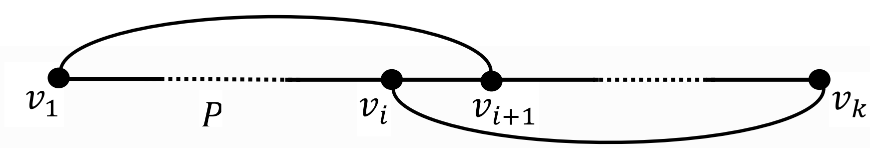
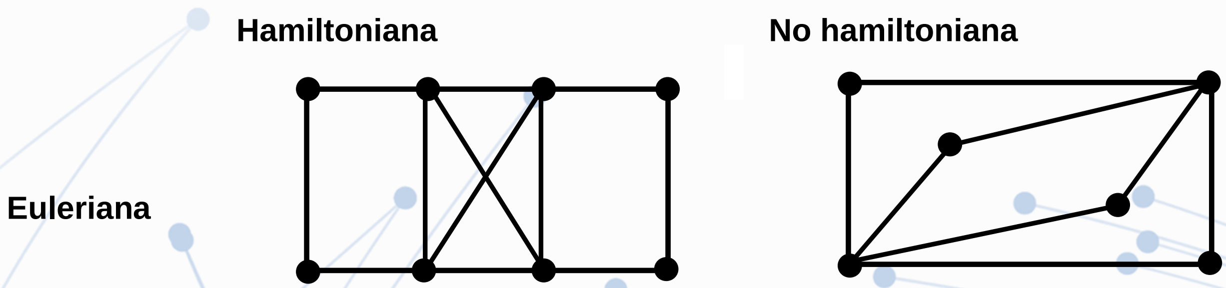
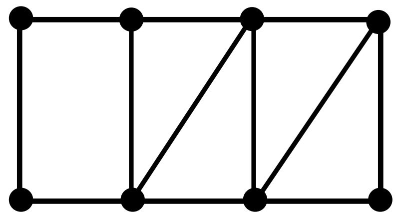


Figura 10. Gráfica demostración

En (Harary, 1969, p. 69) aparece la figura 13 con ejemplos de gráficas que te muestran como estas propiedades, aparentemente similares, son totalmente independientes.



No Euleriana



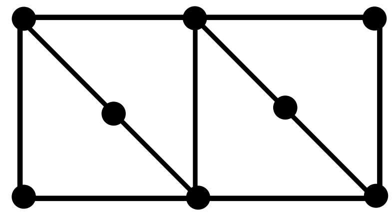


Figura 11. Ejemplos de Gráficas

3.1.2. Árboles

Un problema clásico de conexión es el siguiente: supongamos que se desea establecer un sistema ferroviario para comunicar n ciudades, se conocen los costos de construir una vía férrea entre cualquier pareja de las ciudades dadas y se desea que la construcción sea lo más económica posible pero que garantice que los potenciales pasajeros tengan la posibilidad de trasladarse entre cualquier pareja de ciudades. ¿Cómo debería construirse este sistema?

El sistema ferroviario puede ser representado mediante una gráfica G: sus vértices son las ciudades involucradas y dos vértices son adyacentes si corresponden a ciudades entre las que es posible colocar una vía férrea económica. Claramente es necesario que G sea conexa pues si para $u, v \in V(G)$ existe una uv-trayectoria significará que es posible trasladarse en tren de la ciudad representada por el vértice u a la representada por el vértice v, y si esto sucede para cualquier pareja de vértices de G pues entonces el sistema ferroviario cumplirá con su cometido de conectar a toda pareja de ciudades de la colección. Además, es preciso notar que G también debe ser una gráfica **a cíclica** –es decir, sin ciclos- veamos porqué: si G contiene un ciclo $\gamma = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ entonces entre cada pareja de vértices del ciclo hay dos trayectorias en G, por ejemplo entre los vértices v_1 y v_k existe la v_1v_k-trayectoria: $v_1, v_2, \ldots, v_k$ y la arista v_kv_1 que es otra trayectoria entre ellos. Pero la intención es construir el sistema ferroviario más económico y si existen dos trayectorias distintas entre este par de vértices alguna de ellas debe ser más económica ó si ambas cuestan lo mismo entonces podemos, arbitrariamente, elegir una sola de ellas y tener la posibilidad de construir dos sistemas ferroviarios del mismo costo ambos cubriendo el requisito de conexión y a cíclicos –y ambos más baratos que el que incluye el ciclo- por lo que la gráfica que modela la solución a este problema es a cíclica y conexa.

Definición. Un **árbol** es una gráfica acíclica y conexa.

Si una gráfica no es conexa pero cada una de sus componentes es acíclica se llama **bosque.**

La figura 14 muestra todos los árboles hasta orden 6.

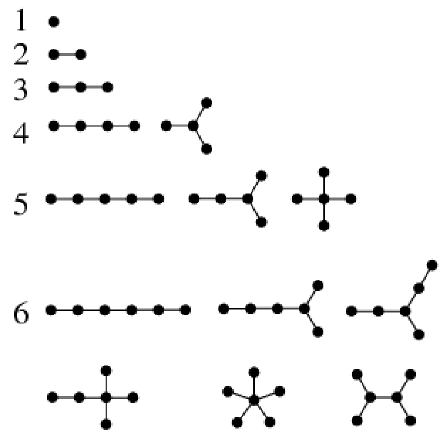


Figura 12. Árboles hasta orden 6

Definición. Una arista de una gráfica G se llama **puente** si al eliminarla el número de componentes conexas de G se incrementa. Análogamente un vértice de G se llama **vértice de corte** si al eliminarlo el número de componentes conexas de G se incrementa.

Observa en la figura 15 que las dos aristas del árbol son puentes y v_2 es el único vértice de corte del árbol.

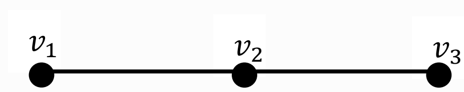


Figura 13. Árbol

Los vértices de grado uno de un árbol se llaman **vértices terminales (pendientes, hojas)**, el único árbol que no tiene vértices terminales es K_1, -el árbol de orden uno- que es vacío, pero cualquier árbol que si tenga aristas siempre tiene vértices terminales.

Un corolario inmediato del Teorema 3 que estudiaste en la sección anterior es justamente que en cualquier árbol existe un vértice terminal: si todo vértice tuviera grado al menos 2 la gráfica tendría un ciclo y entonces no sería un árbol. El siguiente resultado afirma que, de hecho, siempre hay al menos dos de estos vértices (como viste también en los árboles de la figura 14).

Teorema 4. Todo árbol con al menos una arista tiene al menos dos vértices terminales.

Demostración. Procederemos por inducción sobre el orden del árbol. Sean $G=(V,E)$ un árbol y $|V|=p$. Como G sí tiene aristas $p\geq 2$ entonces nuestro caso base es $p=2$, es decir cuando $G=K_2$ que claramente tiene dos vértices terminales y por tanto cumple el resultado.

Supongamos que para cierta $k \geq 2$, fija, todo árbol de orden k, cumple el Teorema y demostremos que se cumple para G de orden $k+1$.

Como ya hemos observado, G sí tiene un vértice terminal, llamémosle v, y consideremos la gráfica $G' = G - v$ es decir la que se obtiene al eliminar de G al vértice v junto con su única arista incidente. G' es nuevamente un árbol de orden al menos dos –porque G tiene orden $k+1 \geq 3$- y por lo tanto cumple con la hipótesis de inducción, entonces existen en G' al menos dos vértices terminales, digamos u y w. Al volver a la gráfica original G quizá uno de estos vértices deje de ser terminal si es que fuese adyacente a v pero seguramente quedará uno de ellos siendo vértice terminal en G, y junto con el vértice v que tomamos al iniciar, son los dos vértices terminales que buscamos.

Una propiedad interesante de los árboles, que además los caracteriza, es la siguiente:

Teorema 5. Una gráfica G es un árbol si y sólo si existe exactamente una trayectoria entre cualquier par de vértices.

Demostración.

⇒) Sean G un árbol y $u, v \in V(G)$ sabemos que existe una uv-trayectoria porque G es conexa. Mostraremos que no puede haber más de una uv-trayectoria y para esto procederemos por contradicción.

Supongamos que existen P_1 y P_2 dos uv-trayectorias distintas, al ser diferentes debe existir un “último momento” en que sean iguales es decir hay un vértice $w_1 \in V(P_1) \cap V(P_2)$ tal que el vértice siguiente a w_1 en P_1 es distinto al vértice siguiente a w_1 en P_2 (podría suceder que $w_1 = u$). Como ambas trayectorias terminan en v, hay posteriormente, un primer vértice $w_2 \in V(P_1) \cap V(P_2)$ distinto de w_1 (podría suceder que $w_2 = v$). La situación se muestra en la figura 16.

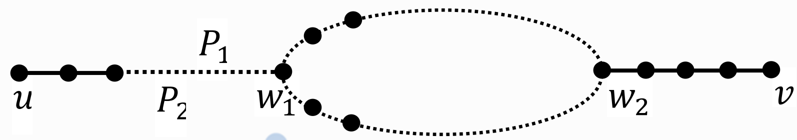


Figura 14. Representación gráfica

Entonces $\gamma = w_1 P_1 w_2 P_2 w_1$ es un ciclo en G, contradiciendo el hecho de que sea acíclica, por lo tanto no puede ser que haya dos uv-trayectorias distintas.

⇐) Supongamos ahora que G es una gráfica en la cual existe exactamente una trayectoria entre cualquier par de vértices. Claramente G es conexa por lo que únicamente bastará demostrar que es acíclica para verificar que G es un árbol.

Nuevamente, procedamos por contradicción y supongamos que G contiene un ciclo $\gamma = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ entonces entre los vértices v_1 y v_k hay dos trayectorias en G: existe la $v_1 v_k$-trayectoria: $v_1 \gamma v_k$ y la arista $v_k v_1$ contradiciendo la hipótesis. Entonces G no puede contener ciclos.

El siguiente resultado brinda una relación entre el orden y el tamaño de cualquier árbol.

Teorema 6. Si G es un árbol de orden p entonces su tamaño es $q = p - 1$

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de aristas. Sean $G = (V, E)$ un árbol, $|V| = p,\ \ |E| = q$. La afirmación es obvia para $q = 0\ \ y\ \ q = 1$, que son respectivamente K_1 y K_2 y claramente satisfacen el teorema pues:

$$|E(K_1)| = 0 = |V(K_1)| - 1 = 1 - 1$$

y

$$|E(K_2)| = 1 = |V(K_2)| - 1 = 2 - 1$$

Supongamos que para cierta $k \geq 1$, fija, todo árbol de tamaño $k,$ cumple el Teorema y demostremos que se cumple para G de tamaño $k + 1$.

Por el Teorema 4 sabemos que G tiene al menos dos vértices terminales, sea $v,$ uno de ellos y consideremos la gráfica $G' = G - v$ que se obtiene al eliminar de G al vértice v junto con su única arista incidente, G' es nuevamente un árbol y tiene al menos una arista por lo que cumple con la hipótesis de inducción, entonces su tamaño es igual a su orden menos uno, como G' tiene exactamente un vértice y una arista menos que G, entonces tenemos que:

$$|E(G')| = |V(G')| - 1 \Leftrightarrow k = k - 1 \Leftrightarrow k + 1 = k \Leftrightarrow |E(G)| = |V(G)| - 1$$

por lo que el Teorema es cierto también para G.

Definición. Una gráfica G se llama **bipartita** si es posible dar una bipartición de $V(G)$ en dos conjuntos $V_1\ \ y\ \ V_2$ de manera que toda arista de G tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2.

Los conjuntos que forman la bipartición de $V(G)$ no tienen ninguna arista, es decir, cada uno de ellos visto "localmente" como una gráfica, forman una gráfica vacía. Un conjunto con esta propiedad –sin adyacencias entre sus vértices- se conoce como **conjunto independiente.**

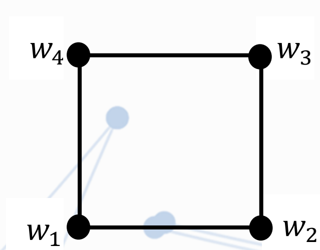


Figura 15. Gráfica bipartita

Ejemplo. *La figura 17 muestra una gráfica bipartita, en la que* $V_1 = \{w_1, w_3\}$ *y* $V_2 = \{w_2, w_4\}$.

No es muy difícil demostrar que cualquier árbol con aristas es una gráfica bipartita. Puedes hacerlo mediante un proceso de "podado": todos los vértices terminales como elementos del conjunto de la partición y luego eliminarlos. La gráfica resultante es un árbol, ahí tomar nuevamente los vértices terminales, ponerlos en el otro conjunto y eliminarlos; seguir con este proceso que eventualmente concluye pues la gráfica es finita. Terminarás esta demostración dentro de los problemas de la lista con que finaliza esta sección.

Un problema muy estudiado en Teoría de Gráficas es el de encontrar en una gráfica conexa G una subgráfica generadora que sea un árbol, una subgráfica así es **un árbol generador** de G.

Teorema 7. Toda gráfica conexa G contiene un árbol generador

Demostración. Si G un árbol no hay nada que probar pues G sería un árbol generador de G. Si G no es un árbol entonces contiene un ciclo, sea e_1 una arista en ese ciclo y $H_1 = G - e_1$, o sea la gráfica que se obtiene al eliminar de G la arista e_1. Si H_1 es un árbol, terminamos y si no entonces H_1 contiene un ciclo. Sea e_2 una arista en tal ciclo y $H_2 = H_1 - e_2$. Si H_2 es un árbol, terminamos, si no continuamos con este proceso. Como G es finita, eventualmente para alguna $i \in \mathbb{N}, \exists H_i$ que es un árbol, por lo tanto G contiene un árbol generador.

Este es un ejemplo de demostración constructiva: la solución que se afirma que existe se construye paso a paso. La ventaja de tales demostraciones es que no solamente verifican la existencia de una solución, sino que además proporcionan un algoritmo para encontrarla. En tu curso de Computación I ya has tenido oportunidad de conocer algunos algoritmos en redes –es decir en gráficas- con este último resultado has conocido otro.

Hay ocasiones en los que a las aristas se les asignan "pesos" es decir valores con algún significado específico en el modelo que la gráfica represente. Por ejemplo, en el planteamiento inicial del sistema ferroviario, podríamos imaginar que la gráfica dada es K_n, la completa de orden n, -indicando que hay adyacencia entre cualquier pareja de vértices- y a cada arista se le asocia un número: el costo de construir una vía directa entre la pareja de ciudades que los vértices representen. Entonces para solucionar el problema se debe encontrar un árbol generador de K_n, pero más aún, este deberá ser un **árbol generador de peso mínimo** puesto que se desea minimizar el costo de construcción.

Para encontrar un árbol generador de peso mínimo uno de los algoritmos más usados es **el Algoritmo de Kruskal,** que es una extensión del descrito en la demostración del Teorema 7 y que aquí especificamos paso a paso (tomado de (Bondy, 1976, p. 37):

Algoritmo de Kruskal

Elegir una arista e_1 de peso mínimo

Si se han elegido las aristas $e_1, e_2, \ldots, e_i$, elegir e_{i+1} del conjunto $E \backslash \{e_1, e_2, \ldots e_i\}$ de manera que:

la gráfica generada por el conjunto de aristas $\{e_1, e_2, \ldots e_i, e_{i+1}\}$ sea acíclica

el peso de e_{i+1} sea lo menor posible, respetando el punto (a.)

Terminar cuando el paso 2 ya no pueda efectuarse

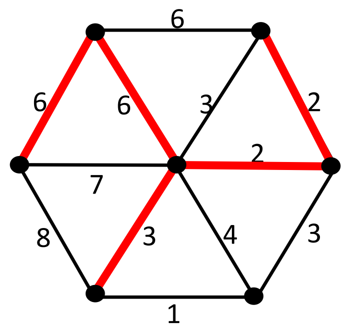


Figura 16. Pesos asociados y árbol generador del peso mínimo

La figura 18 muestra una gráfica con pesos asociados a sus aristas y en rojo un árbol generador de peso mínimo obtenido con el algoritmo de Kruskal.

En ocasiones los árboles son usados también como eficientes herramientas de conteo, en situaciones en las que el número de elecciones posibles dependen de los elementos que fueron elegidos previamente. Se inicia con un vértice y tantas aristas como elecciones distintas se pueden hacer en el primer paso, a partir del extremo de cada arista se colocan tantas aristas como opciones se puedan hacer en el segundo paso si la primera vez fue elegida la arista dada, etc. Con un ejemplo quedará más clara la situación:

Ejemplo. Para formar la tripulación de una nave cósmica surge el problema sobre la compatibilidad sicológica de los participantes. Puede ocurrir que incluso las personas más indicadas, no se adapten entre sí durante un viaje cósmico prolongado. Supongamos que es necesario formar una tripulación de tres personas: comandante, ingeniero y médico. Para el lugar del comandante hay cuatro candidatos: a_1, a_2, a_3, a_4, para el del ingeniero tres: b_1, b_2, b_3, y para el médico tres: c_1, c_2, c_3. El análisis efectuado demostró que el comandante a_1 es sicológicamente compatible con los ingenieros $b_1\ y\ b_3$ y con los médicos $c_2\ y\ c_3$; el comandante a_2 con los ingenieros $b_1\ y\ b_2$ y con todos los médicos; el a_3 lo es con los ingenieros $b_1\ y\ b_2$ y los médicos $c_1\ y\ c_3$ y el comandante a_4 es compatible con todos los ingenieros y con el médico c_2. Además, el ingeniero b_1 es sicológicamente incompatible con el médico c_3; el ingeniero b_2 con el médico c_1 y el b_3 con el médico c_2. Bajo estas condiciones ¿de cuántas maneras es posible formar la tripulación de la nave?

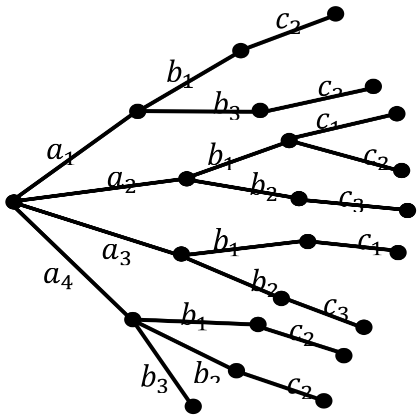


Figura 17. Árbol de combinaciones

Según observamos en la figura 19, las combinaciones posibles para formar la tripulación con tres personas, eligiendo entre los candidatos disponibles y respetando las compatibilidades e incompatibilidades sicológicas, son únicamente 9. Sin tales restricciones, por la regla del producto habría: (4)(3)(3)=36 opciones.

3.1.3. Planaridad

Supongamos que en una calle hay tres casas contiguas hacia las cuales deben suministrarse tres servicios mediante un sistema de tubería subterránea, por ejemplo, gas, agua y electricidad. Se pretende hacer la instalación de tales tuberías para que estos tres hogares dispongan de los 3 servicios de manera constante, pero es claro que las líneas de suministro no pueden cruzarse pues haría técnicamente imposible que los suministros se hicieran posibles, ¿cómo debe llevarse a cabo la instalación de las tuberías subterráneas para lograr el suministro permanente?
Modelaremos este problema con una gráfica bipartita en la que la bipartición de los vértices está dada así: en un conjunto estarán tres vértices que representan a cada una de las casas y en el otro conjunto otros tres vértices que representan los servicios a suministrar. Deben estar todas las aristas entre casas y servicios pues deseamos que a cada casa le lleguen los tres servicios. Entonces hay que colocar 9 aristas en la gráfica, 3 incidentes a cada vértice. Este es un ejemplo de gráfica **bipartita completa,** pues incluye todas las aristas que son posibles en una gráfica bipartita.

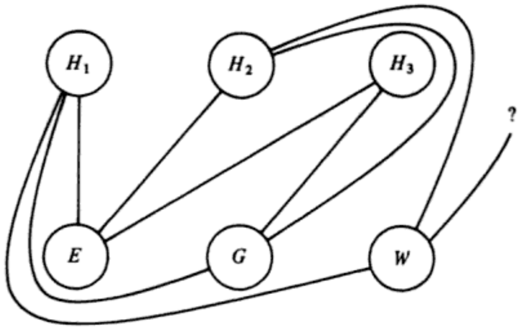


Figura 18. Gráfica bipartita completa

Específicamente, la que presentamos aquí se conoce como $K_{3,3}$ porque cada uno de los conjuntos de la partición tiene cardinalidad 3.

El objetivo es encontrar un dibujo en el que las aristas no se crucen, pero como vemos en la figura 20 (tomada de (Chartrand, 1977, p. 193) que representa la situación, una vez que se han colocado 8 aristas sin cruces, como quiera que se coloque la última habrá inevitablemente un cruce con alguna de las anteriores.

Esto se debe a que, como veremos, es imposible dibujar a $K_{3,3}$ sin cruces. La figura 21 exhibe un dibujo con un sólo cruce:

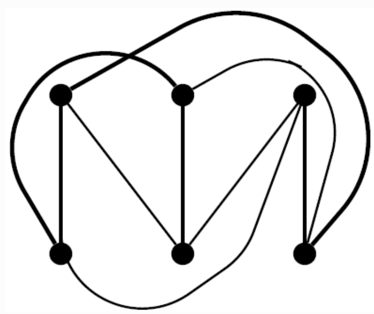


Figura 19. Gráfica con un solo cruce

Definición. Una gráfica G es **aplanable** si puede ser dibujada en el plano de manera que no haya parejas de aristas que se crucen. Un dibujo con esta propiedad se llama **un dibujo plano de** G.

Así, diremos que $K_{3,3}$ no es aplanable o simplemente que no es plana pues es muy frecuente que al referirse a una gráfica aplanable se considere ya dibujada en el plano sin cruces y entonces se le llama simplemente **gráfica plana.** Por ejemplo, K_4 sabemos que es una gráfica aplanable, ya dimos su dibujo plano en la primera sección de esta Unidad, por lo que podemos llamarle gráfica plana. La figura 22 muestra sus dos dibujos: el plano y el no plano.

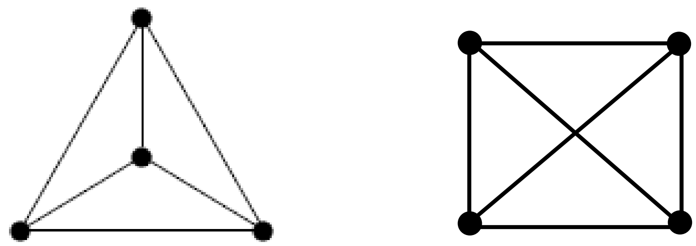


Figura 20. Gráfica plana

Cuando damos el dibujo plano de una gráfica plana este induce una partición del plano en **regiones** que son acotadas por los ciclos inducidos de la gráfica (o sea ciclos en los que no hay aristas entre vértices del ciclo, salvo las del ciclo mismo).

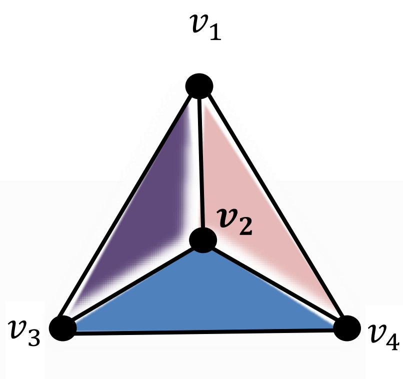


Figura 21. Plano en regiones

Figura 23. Por ejemplo aquí K_4 parte al plano en cuatro regiones: las tres caras triangulares coloreadas y la cara exterior, la blanca.

Los vértices y aristas que inciden en una cierta región forman la **frontera** de esa región. En la figura anterior como observamos la gráfica tiene cuatro regiones, la frontera de la región de color rosa la forman los vértices $v_1, v_4\ y\ v_2$ y las aristas $v_1v_4, v_4v_2\ y\ v_2v_1$. La región blanca, llamada región exterior tiene por frontera a los vértices $v_1, v_4\ y\ v_3$ y las aristas $v_1v_4, v_4v_3\ y\ v_3v_1$. Cualquier gráfica plana tiene exactamente una región exterior. Notemos que en total esta gráfica tiene 4 vértices, 6 aristas y 4 regiones.

Los árboles también son gráficas planas, pues siempre es posible dibujarlas en el plano sin cruces entre pares de aristas. Los árboles solamente determinan una región en el plano, por lo que un árbol de orden p tiene, como sabemos, tamaño $p-1$ y una región. Observa que en ambos casos se cumple que, la suma de orden más regiones menos tamaño es 2. Este no es un hecho casual sino un resultado general, como lo dice el teorema siguiente:

Teorema 8. (Fórmula de Euler) Sea G una gráfica plana conexa de orden p, tamaño q y r regiones, entonces

$$p - q + r = 2$$

Demostración. Usaremos inducción sobre q el tamaño de G. Si $q = 0$, como G es conexa entonces $p = 1$ y $r = 1$ por lo que $p - q + r = 1 - 0 + 1 = 2$, el resultado es cierto para la base. Supongamos que para cierta $k \in \mathbb{N}$, fija se cumple que todas las gráficas conexas planas de tamaño $q = k$ satisface el resultado y demostrémoslo para una gráfica G de tamaño $k + 1$. Supongamos que G tiene orden p y su dibujo induce r regiones en el plano.

Si G es un árbol, entonces sabemos que $p = k$ y, como observamos antes $r = 1$, por lo que $p - q + r = (k + 1) - k + 1 = 2$ y el resultado se cumple.

Si G no es un árbol, como es conexa entonces contiene ciclos. Sea $e \in E(G)$ una arista que pertenezca a un ciclo la gráfica $G - e$, obtenida al eliminar de G la arista e, sigue siendo plana y conexa y tiene tamaño k, por lo que cumple con la hipótesis de inducción. Notemos que $G - e$ tiene el mismo orden que G pues al eliminar e no eliminamos ningún vértice, entonces $V(G - e) = V(G)$. Lo que se modifica es el número de regiones pues en G hay dos regiones incidentes con la arista e así que al eliminarla, esas dos regiones se unen formando una sola, entonces $G - e$ tiene $r - 1$ regiones, tenemos entonces que, por hipótesis de inducción, para $G - e$ se cumple que:

$$p - q + r = p - k + r - 1 = 2$$

Si ahora volvemos a la gráfica original, tenemos,

$$p - q + r = p - (k + 1) + r$$

que, por la identidad obtenida en la hipótesis de inducción,

$$= p - k + r - 1 = 2$$

que es lo que queríamos demostrar.

Este Teorema, debido a Euler, presenta uno de los resultados más importantes de la Teoría de Gráficas. Lo usaremos para demostrar el siguiente:

Teorema 9. Sea G una gráfica conexa y plana de orden $p \geq 3$ y tamaño q, entonces

$$q \leq 3p - 6$$

Demostración. Notemos que el resultado es trivialmente cierto para $p = 3$, pues cualquier gráfica de orden tres tiene tamaño a lo más tres, así que podemos suponer que $p \geq 4$. Como G es plana hay un dibujo plano de ella. Supongamos que tenemos tal dibujo de G y denotemos por r al número de regiones en el plano que se forman con este dibujo. Para cada región R de G, consideremos el número de aristas que están en su frontera y asignemos ese número a la región R. Si después sumamos todos estos números sobre todas las regiones de G obtendremos un valor al que llamaremos N. Es claro que $N \geq 3r$, pues cada región de G tiene al menos tres aristas en su frontera. Además N cuenta dos veces cada arista de G: una vez en cada una de las dos regiones a las que la arista pertenece, por lo que $N \leq 2q$. Así:

$$3r \leq N \leq 2q \;\Rightarrow 3r \leq 2q$$

$$\Rightarrow -r \geq -\frac{2q}{3}$$

por la Fórmula de Euler sabemos que $p - q + r = 2$ o, equivalentemente $p = q - r + 2$, entonces,

$$p = q - r + 2 \geq q - \frac{2q}{3} + 2 = \frac{q}{3} + 2$$

$$\Rightarrow p - 2 \geq \frac{q}{3} \Rightarrow 3p - 6 \geq q$$

que es lo que queríamos demostrar.

Observa que lo que este resultado establece es que una gráfica plana no puede "tener muchas aristas". Como corolario inmediato nos brinda una demostración formal de que $K_{3,3}$ no es plana. Antes de establecer ese corolario, daremos una caracterización de las gráficas bipartitas.

Teorema 10. Una gráfica G es bipartita si y solamente si no contiene ciclos de longitud impar.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea G una gráfica bipartita con bipartición $V(G) = V_1 \cup V_2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que G es conexa pues de no serlo el resultado debería cumplirse en cada una de sus componentes conexas. Además, si G no tiene ciclos cumple el resultado por vacuidad así que podemos suponer que G sí tiene ciclos.

Todas las gráficas bipartitas de orden menor o igual que 3 son precisamente los siguientes tres árboles de órdenes 1, 2 y 3:

Figura 22. Gráficas bipartitas

así que también podemos suponer que G tiene al menos cuatro vértices. Sea $\gamma = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k, v_1$ un ciclo en G y supongamos que $v_1 \in V_1$ entonces $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$ y, en general $v_{2i-1} \in V_1$ y $v_{2i} \in V_2$. Como $v_1 \in V_1$ entonces $v_k \in V_2$, de donde $k = 2i$ para algún valor positivo de i y por tanto la longitud de γ es par.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que G es una gráfica que no contiene ciclos de longitud impar y, como antes, podemos suponer que G es conexa y tiene orden al menos 4.

Sea $v \in V(G)$ un vértice cualquiera de G y definamos la siguiente partición de $V(G)$:

$$V_1 = \{u \in V(G) | \text{ la } uv - \text{trayectoria más corta tiene longitud par}\}$$

$$V_2 = \{u \in V(G) | \text{ la } uv - \text{trayectoria más corta tiene longitud impar}\}$$

Sólo debemos demostrar que, en efecto esta es una partición de $V(G)$ y que todas las aristas de G tienen un extremo en V_1 y otro en V_2. Veamos: $V_1 \neq \emptyset$ pues $v \in V_1$ –la vv-trayectoria vacía tiene longitud cero, que es par- y como G es conexa y no vacía entonces v tiene algún vecino $u_1 \in V(G)$, es claro que la vu_1-trayectoria más corta es precisamente la arista vu_1 por lo que $u_1 \in V_2$ y por tanto $V_2 \neq \emptyset$. También es evidente que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ pues no es posible encontrar un vértice $u \in V(G)$ tal que la uv-trayectoria más corta tenga simultáneamente longitud par e impar, y como G es conexa también se tiene que $V_1 \cup V_2 = V(G)$. Así, lo único que falta demostrar es que V_1 y V_2son conjuntos independientes.

Procedamos por contradicción y supongamos que G existe $e = u_1u_2 \in E(G)$ tal que $u_1, u_2 \in V_1$, entonces, P_1, la vu_1-trayectoria más corta tiene longitud par y P_2, la vu_2-trayectoria más corta también tiene longitud par. Sea w el último vértice tal que $w \in P_1 \cap P_2$, como P_1 y P_2 son trayectorias de longitud mínima entonces las vw-trayectorias:

- vP_1w: que inicia en v y sigue la sucesión indicada por P_1 hasta llegar a w,
- vP_2w: que inicia en v y sigue la sucesión indicada por P_2 hasta llegar a w

Ambas son vw-trayectorias de longitud mínima y por tanto tienen la misma longitud, entonces como P_1 y P_2 son ambas de longitud par, la longitud de los trayectos restantes hasta llegar a u_1 y u_2 respectivamente, deben tener la misma paridad. Así, si llamamos:

- Q_1 a la wu_1-trayectoria wP_1u_1, y
- Q_2 a la u_2w-trayectoria u_2P_2w

Tendremos entonces que $Q_1 \cup e \cup Q_2$ será un ciclo de longitud impar: como Q_1 y Q_2 tienen longitudes de la misma paridad, la suma de sus longitudes es un número par, y la arista e agrega 1 a la longitud del ciclo. Esto contradice la hipótesis.

La demostración para el caso en que hubiese dos vértices $u_1, u_2 \in V_2$ adyacentes es totalmente análoga.

Entonces V_1 y V_2son conjuntos independientes, por lo tanto todas las adyacencias de G son entre V_1 y V_2 por lo tanto es bipartita.

Ahora sí presentamos el Corolario del Teorema 9:

Corolario 2. $K_{3,3}$ no es plana

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo.

Si fuera plana habría un dibujo plano de ella que determinaría r regiones, al sumar para cada una de estas regiones el número de aristas están en su frontera y después sumar estos números sobre todas las regiones de $K_{3,3}$, obtendremos un valor al que llamaremos N. Como $K_{3,3}$ es bipartita, por el Teorema 10 sabemos que no contiene triángulos, por lo que la frontera de cada región debe tener al menos cuatro aristas, entonces $N \geq 4r$, además N cuenta dos veces cada arista, así que $N \leq 2q = 18$. Así que:

$$4r \leq N \leq 2q = 18 \Rightarrow r \leq \frac{9}{2} < 5$$

y por la Fórmula de Euler:

$$p - q + r = 2 \Rightarrow 6 - 9 + r = 2 \Rightarrow r = 5$$

lo cual es una contradicción. Entonces fue incorrecto suponer que $K_{3,3}$ es plana, y concluimos que no lo es.

Otro corolario inmediato es que K_5 tampoco es una gráfica plana.

Corolario 2. K_5 no es plana

Demostración. En la gráfica K_5 se tiene que $p = 5 \;\; y \;\; q = 10$, como $3p - 6 = 3(5) - 6 = 9$, entonces $q > 3p - 6$, por el Teorema 9, no es plana.

La figura 25 muestra a las gráficas K_5 y $K_{3,3}$ dibujadas con un sólo cruce de aristas.

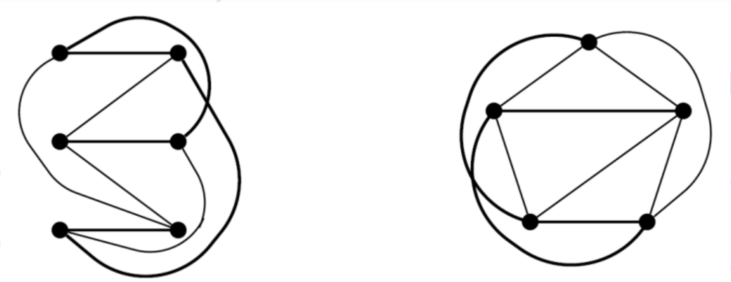


Figura 23. Gráficas con un solo cruce de aristas

Esta pareja de gráficas no aplanables son fundamentales en el estudio de las gráficas planas pues nos permiten caracterizar totalmente a la familia de las gráficas planas. Para presentar –y entender- este resultado, necesitamos previamente unos cuantos conceptos.

Definición. La **contracción de aristas** en una gráfica es una operación en la que una arista y sus dos vértices se eliminan y sustituyen por un nuevo vértice al que haremos adyacente con todos los vecinos de los extremos de la arista original.

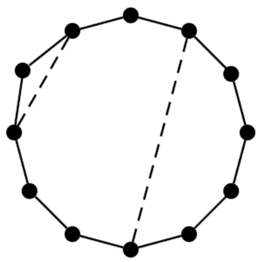


Figura 24. Contracción de aristas

La figura 22 ejemplifica este concepto, contrayendo en la gráfica de la izquierda las aristas discontinuas.

Definición. Una gráfica H es **un menor** de una gráfica G, si H se obtiene de G contrayendo o borrando aristas y eliminando vértices aislados.

Notemos que, en particular, cualquier subgráfica de G es un menor de la gráfica. En la siguiente figura vemos un ejemplo del menor H que se ha obtenido de G al contraer la arista discontinua y eliminar las dos aristas más gruesas y el vértice que queda aislado:

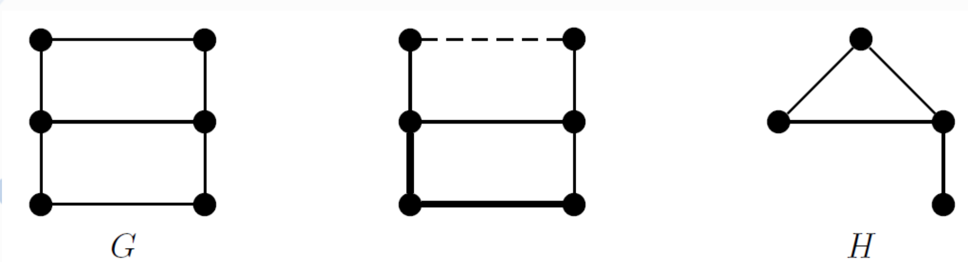


Figura 25. Subgraficas menor a G

Ahora sí enunciaremos –sin demostrar- el famoso resultado, debido a Kuratowski y Wagner que caracteriza a las gráficas planas:

Teorema de caracterización de las gráficas planas. Una gráfica es planas si y sólo si no contiene a K_5 ó $K_{3,3}$ como menor.

Puedes encontrar una demostración de este teorema en (Bondy, 1976) o en (Harary, 1969). En la figura 28 se exhibe una que gráfica no es plana -conocida como **la gráfica de Petersen**- pues tiene como menor a K_5 como es evidente al contraer las aristas discontinuas:

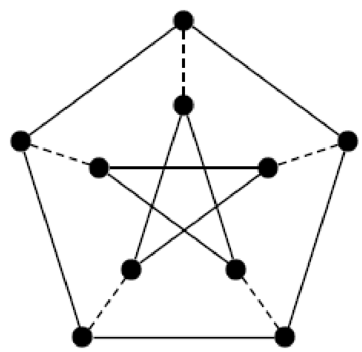


Figura 26. Gráfica de Petersen

3.1.4. Coloración

¿Cuántos colores son necesarios para colorear los países de un mapa de manera que países con frontera común tengan asignados colores distintos? ¿Cuántos días deben ser agendados para las reuniones de las comisiones parlamentarias si cada comisión pretende reunirse por un día y algunos miembros del parlamento pertenecen a varias comisiones? ¿Cómo se puede programar el horario de siete exámenes finales, minimizando los días necesarios para aplicarlos, si hay alumnos que deben presentar varios exámenes y no pueden presentar más de dos exámenes el mismo día? Este tipo de problemas, ampliamente estudiados por el Análisis Combinatorio son modelados mediante el uso de la Teoría de Gráficas y han permitido no solamente encontrar soluciones eficientes sino más aún han generado toda una rama de profundo interés teórico en el área: los problemas de coloración de gráficas.

El Teorema de los Cuatro Colores tiene una historia larga, intensa y de las más interesantes en la evolución del desarrollo científico, te recomiendo que léase el siguiente link o la otra opción de Fernández Gallardo

https://matematicasynutricion.wordpress.com/2011/08/

[Teorema de los cuatro colores Narración de (Fernandes Gallardo, 2000)](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo76.pdf)

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo76.pdf

Definición. Una **coloración de una gráfica** G es una función $c: V(G) \rightarrow S$ tal que $c(u) \neq c(v)$ si $uv \in E(G)$. Los elementos de S son **los colores** de la coloración.

El principal interés sobre el estudio de estas coloraciones tiene que ver con la cardinalidad de S, frecuentemente buscamos que S sea lo más pequeño posible. Si $|S| = m$, diremos que $c: V(G) \rightarrow S$ es una m**-coloración de** G.

Definición. El mínimo entero k para el cual existe una coloración de G, $c: V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ es el **número cromático de** G y se denota como $\chi(G)$. Si G tiene número cromático $\chi(G) = k$ se llama k**-cromática** y si $\chi(G) \leq k$ decimos que G es k-**coloreable.**

Ejemplo. La figura 29 muestra una coloración de la gráfica de Petersen con tres colores, $c: V \rightarrow \{rojo, azul, verde\}$. Esta gráfica es 3-cromática por lo que no es posible dar una coloración con dos colores sin que haya aristas con los dos extremos del mismo color. Decimos que esta es una coloración que **realiza** el número cromático de la gráfica.

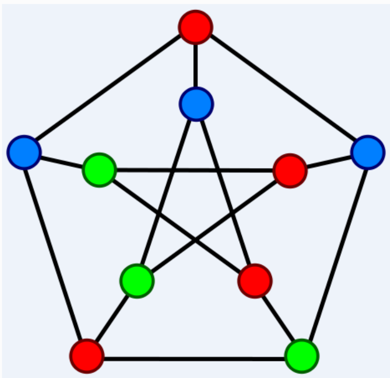


Figura 27. Coloración de la gráfica de Petersen

Observa que una k-coloración de G no es otra cosa más que una partición de $V(G)$ en k conjuntos independientes llamados también **clases cromáticas.**

Generalmente, obtener el número cromático de una gráfica, es un problema extremadamente complicado, no hay una fórmula explícita para obtenerlo, sin embargo, se conocen algunos resultados que lo relacionan con otros parámetros asociados a la gráfica, el siguiente es uno de ellos. Recuerda que en la primera sección de esta Unidad definimos $\Delta(G)$ como el máximo de los grados de los vértices de G.

Teorema 11. Para gráfica cualquier gráfica G,
$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre el orden p de G. La única gráfica de orden $p = 1$ es K_1 y ya que $\chi(K_1) = 1$ y $\Delta(K_1) = 0$, entonces,
$$1 = \chi(K_1) \leq 1 + \Delta(K_1) = 1 + 0 = 1$$
por lo tanto el resultado es cierto para al caso base.

Supongamos que para alguna $k \in \mathbb{N},\ k > 1$ fija, el resultado es cierto para todas las gráficas de orden k y demostraremos que se cumple para G de orden $k + 1$.

Lo que haremos será dar una coloración de $V(G)$ con $\Delta(G) + 1$ colores y, por la minimalidad de $\chi(G)$ tendremos el resultado.

Sea $v \in V(G)$ y consideremos la gráfica $G - v$ la que se obtiene al eliminar de G al vértice v y todas las aristas incidentes en él. Como $G - v$ tiene orden k cumple con la hipótesis de inducción, por lo que
$$\chi(G - v) \leq 1 + \Delta(G - v)$$
entonces debe existir una coloración de los vértices de $G - v$ con $1 + \Delta(G - v)$ colores. Demos tal coloración a $V(G - v)$ y veamos como podemos extenderla para $V(G)$: Notemos que en G el vértice v tiene a lo más $\Delta(G)$ vértices vecinos, estos vecinos permanecen en $G - v$ y la coloración que hemos dado no usa más de $\Delta(G)$ colores en ellos. Tenemos dos casos posibles:

1. Si $\Delta(G - v) = \Delta(G)$, entonces queda un color disponible para asignarlo a v –recordemos que la coloración dada a $G - v$ usa $1 + \Delta(G - v)$ colores- lo coloreamos y volvemos a la gráfica G, donde tendremos una coloración de $V(G)$ con $\Delta(G - v) + 1 = \Delta(G) + 1$ colores y por tanto tenemos el resultado.
2. Si $\Delta(G - v) < \Delta(G)$, entonces podemos introducir un nuevo color para asignarlo a v, lo coloreamos y volvemos a la gráfica G, donde tendremos una coloración de $V(G)$ con a lo más $\Delta(G) + 1$ colores y por tanto tenemos el resultado.

Por ejemplo, usando el Teorema 11 en la gráfica H, de la figura 30 se tiene que

$$\chi(H) \leq 1 + \Delta(H) = 1 + 6 = 7$$

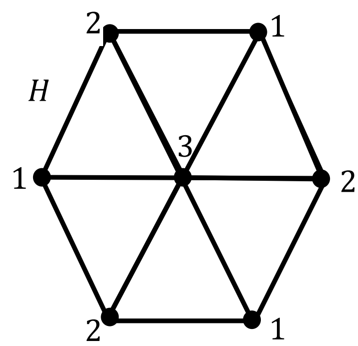


Figura 28. Gráfica H

Sin embargo, la misma figura muestra una coloración con 3 colores por lo que $\chi(H) = 3$. Así esta cota superior para el número cromático no siempre resulta ser tan buena.

Como vimos al inicio de esta sección el Teorema de los Cuatro Colores también puede ser establecido en términos de coloración de gráficas. Si tenemos dado un mapa cualquiera, podemos asociarle una gráfica cuyos vértices correspondan a los países (estados, regiones) y donde dos vértices sean adyacentes si representan a dos países con frontera común. Necesariamente, cada gráfica así construida es plana. Por ejemplo, la figura 31 muestra un mapa y la correspondiente gráfica plana H asociada a este mapa.

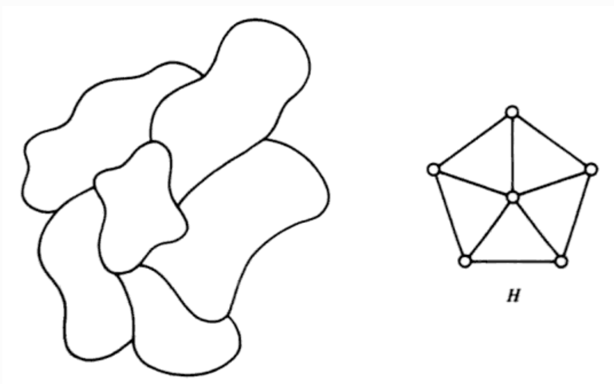


Figura 29. Gráfica asociada a mapa

En estos términos el enunciado del Teorema de los Cuatro Colores será:

Teorema de los Cuatro Colores: Si G es una gráfica plana, entonces $\chi(G) \leq 4$

La demostración de este Teorema es extraordinariamente complicada y no la incluimos en este texto. Sin embargo, en contraste, el Teorema de los Cinco Colores no es particularmente difícil y sí lo incluiremos aquí. Necesitaremos antes de un útil lema:

Lema 1. Si G es una gráfica plana, entonces contiene un vértice v tal que $\delta(v) \leq 5$.

Demostración. El resultado es trivial para gráficas de orden menor o igual que 6. Podemos suponer entonces que G es una gráfica plana, de orden $p \geq 7$ y por el Teorema 2 sabemos que si sumamos los grados de todos los vértices de G obtenemos $2q$. Si suponemos que todo vértice de G tiene grado mayor o igual que 6, entonces

$$2q = \sum_{v \in V(G)} \delta(v) \geq 6p$$

así que $2q \geq 6p$. También sabemos, por el Teorema 9 que $q \leq 3p - 6$, que multiplicándola por 2: $2q \leq 6p - 12$. Entonces, juntando las dos desigualdades tendremos,

$$6p \leq 2q \leq 6p - 12$$

lo que es una contradicción.

Entonces fue un error suponer que todo vértice de G tiene grado mayor o igual que 6, por lo tanto existe algún vértice v tal que $\delta(v) \leq 5$.

Podemos ahora enunciar y demostrar el Teorema central de esta sección.

Teorema de los Cinco Colores: Si G es una gráfica plana, entonces $\chi(G) \leq 5$

Demostración. Procederemos por inducción sobre el orden p de G. El resultado se cumple trivialmente para la única gráfica de orden $p = 1$, que por supuesto es plana: $G = K_1$ y $\chi(K_1) = 1 \leq 5$, por lo tanto el resultado es cierto para al caso base.

Supongamos que para alguna $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ fija, el resultado es cierto para todas las gráficas planas de orden k: su número cromático es a lo más 5 y demostraremos que se cumple para G de orden $k + 1$.

Por el Lema 1 sabemos que existe $v \in V(G)$ tal que $\delta(v) \leq 5$. Consideremos un dibujo plano de G y consideremos la gráfica $G - v$, la que se obtiene al eliminar de G al vértice v y todas las aristas incidentes en él. Como $G - v$ tiene orden k cumple con la hipótesis de inducción, por lo que $\chi(G - v) \leq 5$. Esto significa que $G - v$ es 5-coloreable entonces existe una 5-coloración de $V(G - v)$, demos tal coloración a los vértices de $G - v$ denotando a los colores con los números 1,2,3,4 y 5. Es claro que si uno de estos colores no fue usado por los vecinos de v entonces podemos asignarlo a v y habremos extendido la 5-coloración de $G - v$ a una 5-coloración de G y terminamos pues basta eso para comprobar que en efecto $\chi(G) \leq 5$.

Supongamos entonces que los 5 colores están siendo usados por los vecinos de v y por tanto $\delta(v) = 5$. Sean v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 los cinco vecinos de v y supongamos que cada v_i tiene asociado el color i. Mostraremos que es posible recolorear ciertos vértices de $G - v$ de manera que quede un color disponible para el vértice v y entonces la 5-coloración pueda ser extendida a G. Consideremos únicamente los colores 1 y 3 y todos los vértices de $G - v$ que tiene asociados esos colores. Sabemos que v_1 tiene el color 1 y v_3 el color 3. En $G - v$ podría o no existir una v_1v_3-trayectoria cuyos vértices estén solamente coloreados con los colores 1 y 3.

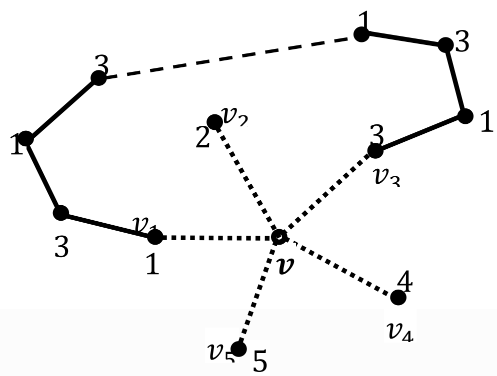


Figura 30. Representación gráfica

Procederemos a revisar cada uno de los dos casos posibles:

1. Supongamos primero que sí existe tal v_1v_3-trayectoria, como se muestra en la figura 27, y llamémosla P. Entonces v_1, v, v_3, P es un ciclo en G que encierra al vértice v_2 o encierra a los vértices v_4 y v_5. Es decir que, por la planaridad de G, v_2 está en una región distinta de donde están los vértices v_4 y v_5 pero eso quiere decir que en $G - v$ no hay una v_2v_4-trayectoria formada por vértices que unicamente usen los colores 2 y 4. Entonces consideramos todas las trayectorias que inician en v_2 y que en todos sus vértices unicamente usan los colores 2 y 4, esta colección de trayectorias forman una subgráfica de $G - v$ a la que llamaremos H y que está formada con vértices de colores 2 y 4, aunque, como vimos $v_4 \notin V(H)$. Si intercambiamos los colores en H –los que tengan el color 2 los coloreamos del color 4 y los que tengan color 4 les ponemos color 2- obtendremos una nueva 5-coloración de $G - v$ en la cual los vértices v_2 y v_4 tienen ambos el color 4. Entonces el color 2 ha quedado disponible para asignarselo a v y podremos extender a una 5-coloración de $V(G)$ con lo que tenemos que $\chi(G) \leq 5$.
2. Ahora supongamos que no existe la v_1v_3-trayectoria que únicamente usa colores 1 y 3 en todos sus vértices. Entonces consideramos todas las trayectorias que inician en v_1 y que en

todos sus vértices unicamente usan los colores 1 y 3, esta colección de trayectorias forman una subgráfica de $G - v$ a la que llamaremos H y que está formada con vértices de colores 1 y 3, aunque, como sabemos $v_3 \notin V(H)$. Si intercambiamos los colores en H –los que tengan el color 1 los coloreamos del color 3 y los que tengan color 3 les ponemos color 1- obtendremos una nueva 5-coloración de $G - v$ en la cual los vértices $v_1\ y\ v_3$ tienen ambos el color 3. Entonces el color 1 ha quedado disponible para asignarselo a v y así podemos extender a una 5-coloración de $V(G)$ con lo que nuevamente comprobamos que $\chi(G) \leq 5$.

El estudio de la Teoría de Coloración de Gráficas abarca también coloraciones de aristas, coloraciones totales (vértices y aristas), coloraciones de regiones en gráficas planas o coloraciones de ciertas subgráficas –ciclos, trayectorias, árboles de cierto tipo- este es, actualmente uno de los temas que más conocimiento genera en el área. Un compendio muy bueno de lo que se ha realizado se puede leer en (Chartrand G. a., 2008).

Cierre de la unidad

En esta unidad has conocido algunos de los más conocidos resultados en Teoría de Gráficas. Existen muchos más pues esta es un área muy basta de las matemáticas y una de las que mayor desarrollo presenta actualmente. Ojalá te animes a estudiar más temas del área por tu cuenta.

Para saber más:

Aquí encontrarás la historia del problema de los puentes de Königsberg y como se resolvió, con la posibilidad de observar modelos interactivos de la solución y planteamiento. Está en español.

- Fernández, S. (2002). Los puentes de Konigsberg. Bloque I. Taller de matemáticas. Descartes 2D.

  http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/rompecabezas/PuentesKonigsberg.htm

En esta página encontrarás actividades relacionadas con el problema de coloración de mapas. Está en inglés.

- S.a. (2021). Coloración de gráficos. Classic Computer Science. Unplugged.

  https://classic.csunplugged.org/graph-colouring/

Fuentes de consulta

Básica

- Bondy, J. A. (1976). *Graph Theory with Applications.* New York: Elsevier.
- Chacón, J.L (s.f.) Introducción a la teoría de grafos. Recuperado de https://n9.cl/t08cn
- Chartrand, G. (1977). *Introductory Graph Theory.* Toronto: Dover Publications.
- Chartrand, G. a. (2008). *Chromatic Graph Theory.* Florida, USA: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Evans, D. (03 de junio de 2015). Puentes de Konigsberg. [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=BGNAfal3eKU
- Fernández Gallardo, P. (2000). El Teorema de los cuatro colores: Appel y Haken (1976). *Números* , 377-380.
- Fernández Gallardo P. (2013). Matemática discreta, capítulo 9: Árboles. Recuperado de: http://matematicas.uam.es/~mavi.melian/CURSO_14_15/web_Discreta/Discreta.html
- Villalpando, R.F (s.f). Apuntes para la materia de matemáticas discretas. http://seraace.com/files/notas_mat_dis.pdf