



MATEMÁTICAS

QUINTO SEMESTRE

Análisis Matemático I

INFORMACIÓN GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Clave 05143528/06143528

Universidad Abierta y a Distancia de México





Contenido

Presentación	3
Conocimientos previos	4
Competencia general	4
Competencias específicas	4
Logros	5
Competencia transversal	6
Relaciones con el perfil de egreso	6
Relación con otras unidades didácticas	7
Temario	7
Unidad 1. Espacios vectoriales	7
Unidad 2. Sucesiones y continuidad	8
Unidad 3. Compacidad y continuidad	8
Metodología	9
Evaluación	9
Evaluación formativa	10
Evaluación sumativa	11
Fuentes de consulta	13



Presentación

El Análisis Matemático, además de tener aplicaciones en otras ramas de las matemáticas, como las ecuaciones diferenciales, la teoría de conjuntos y la probabilidad, tiene aplicaciones en otras ciencias como la física, la química, la biología, la astronomía o la economía; todas éstas, ligadas al establecimiento de leyes generales del comportamiento de la naturaleza y del hombre y a la solución de problemas científicos y tecnológicos muy concretos.

Como en otras ramas de las matemáticas, el Análisis Matemático establece conceptos abstractos, que pueden aplicarse en diferentes esferas del conocimiento. Por lo anterior, esta unidad didáctica exige capacidad de abstracción para lograr un buen entendimiento.

Para el estudio de esta unidad didáctica, es necesario manejar los resultados del cálculo diferencial e integral, de una y de varias variables. En el Análisis Matemático se desarrollan construcciones cuyos cimientos están representados por axiomas, afirmaciones que se pueden justificar y las aceptamos sin discusión, con base en ellas se deducen o construyen otras propiedades y resultados a los que llamamos lemas o teoremas cuya validez debe ser demostrada. De estas propiedades se deducen otras y así sucesivamente, construyendo una red intrincada.

La unidad didáctica se imparte en el quinto semestre de la carrera Licenciatura en Matemáticas. El curso consta de tres unidades. En la primera se estudia las propiedades básicas de los números reales, de manera especial la completitud de los números reales; los espacios vectoriales y métricos, sucesiones convergentes en estos espacios y funciones continuas. La segunda unidad aborda la continuidad y compacidad, tratando varios resultados importantes (teorema de Heine, teorema del punto fijo y teorema de categorías de Baire). Y la tercera unidad está dedicada al estudio de la convergencia de sucesiones de funciones, concluyendo con el teorema de Arzela-Ascoli y sus aplicaciones.



Conocimientos previos

El estudiante deberá tener un alto sentido de razonamiento matemático, operar con expresiones algebraicas de números reales, así como la resolución de problemas, conocimientos previos en cálculo de una y varias variables, Álgebra Lineal, cálculo diferencial, integral y vectorial.

Competencia general

Extender los conceptos y propiedades de los números reales a espacios más generales para aplicarlos en la resolución de problemas planteados en el ámbito de las ciencias y en el campo profesional mediante el estudio de los resultados y los procedimientos utilizados dentro del análisis real.

Competencias específicas

Unidad 1: Generalizar los conceptos y resultados del cálculo en \mathbb{R}^n , para extenderlos a espacios más generales mediante las propiedades de los espacios métricos, las normas, distancias y la topología.

Unidad 2: Aplicar las propiedades de sucesiones y funciones en el establecimiento de características topológicas para resolver diversos problemas matemáticos, haciendo uso de la convergencia puntual y uniforme de sucesiones, así como de la continuidad y el Teorema de los Valores Intermedios para funciones continuas en espacios métricos.

Unidad 3: Aplicar los Teoremas de Heine-Borel, el del Punto Fijo, el de Baire y el Teorema de Arzela-Ascoli para la caracterización de espacios métricos (compactos-completos) y la resolución de problemas del análisis matemático y de otras ramas de las matemáticas, manejando los conceptos de conjuntos compactos, conjuntos densos y la continuidad.



Logros

Unidad 1

- Aplicar propiedades de los números reales en la solución de problemas matemáticos diversos, utilizando los teoremas de completud, para su posterior generalización a espacios más generales.
- Aplicar las propiedades de un espacio vectorial para demostrar cuando es un espacio vectorial o no, siguiendo un razonamiento riguroso, lógico y matemático.
- Aplicar las propiedades y normas de distancias para identificar distintas normas y distancias en distintos espacios, así como en un mismo espacio.
- Identificar las características de conjuntos abiertos y cerrados en distintos espacios métricos, así como en un mismo espacio con diferentes métricas y aplicarlas para identificar diferentes topologías.

Unidad 2

- Aplicar las características de los espacios vectoriales, la norma distancia y las nociones de topología en el estudio de sucesiones y funciones continuas, para determinar sus propiedades.
- Emplear las propiedades de las sucesiones para determinar la convergencia, convergencia puntual y uniforme en la resolución de diversos problemas matemáticos.
- Utilizar las propiedades de las sucesiones de funciones para determinar cuándo las características de continuidad, derivabilidad e integrabilidad de la sucesión son heredadas hasta la función del límite.
- Manejar la continuidad de funciones entre espacios métricos para establecer características topológicas, haciendo uso de la noción de límite y convergencia.
- Usar el teorema de los valores intermedios en la solución de diversos problemas matemáticos, haciendo usos de conjuntos conexos.



Unidad 3

- Determinar si un espacio es completo aplicando las propiedades de las sucesiones de Cauchy y las funciones continuas.
- Determinar propiedades de un espacio a partir de las características de las funciones continuas sobre conjuntos compactos.
- Aplicar el teorema del Punto Fijo en la solución de problemas de otras ramas de las matemáticas.
- Aplicar el teorema de Baire y el de Arzela-Ascoli en la resolución de problemas propios del Análisis Matemático, y de otras ramas de las matemáticas.

Competencia transversal

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis
- Capacidad para formular y gestionar proyectos
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Capacidad de aplicar los conocimientos a la práctica.

Relaciones con el perfil de egreso

La unidad didáctica de Análisis Matemático aporta al egresado un pensamiento crítico y constructivo, pilares de todo matemático que desea dedicarse a la investigación, por otro lado, desde el punto de vista aplicado, la unidad didáctica dota al estudiante con la capacidad de abordar múltiples problemas de la vida diaria mediante soluciones analíticas y modelos matemáticos.



Relación con otras unidades didácticas

El Análisis matemático además de tener una relación intrínseca con el cálculo, es una materia que permite una relación con muchas otras ramas de la matemática como lo son las ecuaciones diferenciales, la física o la topología, pues a través del análisis es posible plantear y resolver problemas de estas índoles.

Temario

Unidad 1. Espacios vectoriales

1.1. Resultados fundamentales en \mathbb{R}

1.1.1. Supremo e ínfimo, propiedades

1.1.2. Propiedad arquimedea. Existencia de raíz de 2

1.2. Teoremas de completitud

1.2.1. Cortaduras de Dedekind y sucesiones monótonas

1.2.2. Intervalos Anidados

1.2.3. Teorema de Bolzano

1.2.4. Sucesiones de Cauchy

1.3. Numerabilidad y no numerabilidad

1.3.1. Conjuntos finitos e infinitos

1.3.2. Conjuntos numerables

1.3.3. Colecciones numerables de conjuntos numerables

1.4. Espacios vectoriales

1.4.1. Producto escalar

1.4.2. Normas

1.4.3. Distancias

1.4.4. Topología básica en espacios métricos



Unidad 2. Sucesiones y continuidad

2.1. Sucesiones convergentes

2.1.1. Sucesiones convergentes

2.1.2. Subsucesiones

2.1.3. Sucesiones de Cauchy

2.2. Sucesiones de funciones

2.2.1. Convergencia puntual

2.2.2. Convergencia uniforme

2.2.3. Convergencia e integración

2.2.4. Convergencia y derivación

2.3. Funciones continuas

2.3.1. Límite y continuidad

2.3.2. Continuidad y conexidad. El teorema de los valores intermedios

Unidad 3. Compacidad y continuidad

3.1. Compacidad y continuidad

3.1.1. Espacios métricos completos

3.1.2. Teorema de Heine-Borel

3.2. Continuidad y compacidad

3.2.1. La imagen de un compacto bajo una función continua

3.2.2. El teorema del Punto Fijo para Contracciones

3.2.3. Continuidad uniforme y compacidad

3.3. Teorema de Baire

3.3.1. Conjuntos densos y densos en ninguna parte

3.3.2. Conjuntos de primera y de segunda categoría



Metodología

En esta unidad didáctica se manejarán los contenidos con teoría y práctica, dado que los conocimientos teóricos son indispensables para poder resolver una situación o problema dentro de los contenidos. La metodología que se utiliza es el aprendizaje basado en la resolución de problemas y ejercicios, dado que, por medio de los contenidos teóricos, el estudiante los aplicará para resolver problemas.

El conocimiento teórico es trascendente para la unidad didáctica, dado que requiere un desarrollo completo, tanto conceptual como formal. Es indispensable que tengas conocimiento de Cálculo Diferencial e Integral, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo de varias variables, dado que son indispensables para avanzar en esta unidad didáctica.

Los problemas o demostraciones que se te piden a lo largo de la unidad están sustentados en conocimientos establecidos y que necesitan ser demostrados o resueltos a través de tu ingenio y análisis para determinar su solución más óptima.

Evaluación

La evaluación del aprendizaje es un proceso, a través del cual se observa, recoge y analiza información relevante del proceso de aprendizaje de los estudiantes, con la finalidad de reflexionar, emitir juicios de valor, así como tomar decisiones pertinentes y oportunas para optimizarlo (Díaz Barriga A.F. & Hernández R.G., 2005). Orienta la toma de decisiones, da pauta a determinar acciones en términos de valoración de conocimientos, nivel del desempeño, reorientaciones de aprendizaje, mejora del proceso educativo y adecuación de actividades, entre otras acciones.

De acuerdo con lo anterior, mediante la evaluación te brindaremos apoyo y seguimiento para identificar las dificultades en el desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes del proceso integral de aprendizaje.



Información general de la unidad didáctica

En el marco del Modelo educativo de la UnADM, la evaluación de la unidad didáctica se realiza en los siguientes momentos: 1) formativa y 2) sumativa.

Evaluación formativa

Se realiza en paralelo al desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de cada unidad, y sirve para localizar dificultades cuando aún estás en posibilidad de remediarlas.

En este primer momento de evaluación, se aplican estrategias asociadas a las:

- **Actividades individuales** (tareas). Se trata de un primer momento de aprendizaje, en el cual se consideran tus perspectivas, experiencias, intereses, capacidades y necesidades.
- **Actividades colaborativas** (foros). El trabajo colaborativo fomenta y promueve el aprendizaje en contribución con otros compañeros, ya que eres responsable no sólo de tu aprendizaje, sino de contribuir a que los demás aprendan en equipo y se fomente un ambiente de confianza; por ende, que se logren las metas de aprendizaje.



Evaluación sumativa

Se aplica al final del proceso de tu experiencia de aprendizaje, su propósito es verificar los resultados alcanzados y el grado de aprendizaje o nivel de conocimientos, habilidades y actitudes que hayas adquirido.

Este segundo y último momento de evaluación, se mide y valora a través de las siguientes actividades:

- **Evidencias de aprendizaje.** Son actividades que tienen como objetivo integrar el proceso de construcción de tu aprendizaje, la evaluación, la retroalimentación y la planeación de la nueva ruta de aprendizaje que seguirás de acuerdo con los resultados individuales obtenidos.
- **Actividad complementaria.** Esta actividad es planeada por la figura académica considerando las competencias y logros de la unidad didáctica, toda vez que identifica los conocimientos, habilidades y actitudes que te hizo falta desarrollar o potenciar (se realiza en una ocasión al finalizar la última unidad).



A continuación, se presenta el esquema general de evaluación correspondiente a esta unidad didáctica:

Esquema general de evaluación		
Tipo de evaluación	Actividades	Puntaje
Formativa	Actividades individuales	35%
	Actividades colaborativas	10%
Sumativa	Evidencias de aprendizaje	45%
	Actividad complementaria	10%
Total		100

Recuerda que la calificación final que te permitirá acreditar se asigna de acuerdo con los criterios e instrumentos de evaluación establecidos para cada actividad, los cuales son diseñados con base en las competencias y logros de esta unidad didáctica.



Fuentes de consulta

Básica

- Bernal, L., & Domínguez, T. (s.f.). *Concepto de base de Schauder y aplicación del teorema de Riesz en espacios de Hilbert para obtener el teorema de Radon–Nikodym*. [Manuscrito inédito].
- Bernal, L. (2002). *Análisis matemático*. Universidad de Sevilla.
- Ilanes, A. (2004). *Hiperespacios de continuos*. Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana.
- Munkres, J. R. (2002). *Topología*. Prentice Hall.
- Marrero, M. I. (1991). *Problemas de análisis real y funcional*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.
- Rudin, W. (1991). *Análisis funcional* (2.^a ed., Serie Internacional de Matemática Pura y Aplicada, Vol. 8). McGraw-Hill.
- Trenoguín, V. A., Pisariévski, B. M., & Soboleva, T. S. (1987). *Problemas y ejercicios de análisis funcional*. Mir.