MATEMÁTICAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

QUINTO SEMESTRE

UNIDAD 1. ESPACIOS VECTORIALES

Clave

05143528/06143528

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Presentación de la unidad

Los conceptos que estudia el análisis matemático, están relacionados con las propiedades de los números reales. Por eso iniciamos con una sección dedicada a los números reales. En este apartado se estudia la propiedad más importante de los números reales, la de completez o completitud, está relacionada con el supremo de un conjunto y se demuestran varios teoremas equivalentes. Todos estos son resultados que se utilizarán a lo largo del curso.

Posteriormente, se inicia el estudio de los espacios vectoriales, se tratan las propiedades de una norma y de una distancia en un espacio vectorial. Aquí iniciamos la generalización de resultados en $\mathbb{R}^n$ a espacios más generales. Trataremos algunas propiedades de los conjuntos en espacios métricos generales, generalizando algunos de los resultados válidos en los reales y en $\mathbb{R}^n$.

Competencia específica

Generalizar los conceptos y resultados del cálculo en $\mathbb{R}^n$, para extenderlos a espacios más generales mediante las propiedades de los espacios métricos, las normas, distancias y la topología.

Logros

- Aplicar propiedades de los números reales en la solución de problemas matemáticos diversos, utilizando los teoremas de completitud, para su posterior generalización a espacios más generales.
- Aplicar las propiedades de un espacio vectorial para demostrar cuándo un espacio es un espacio vectorial o no, siguiendo un razonamiento riguroso, lógico y matemático.

- Aplicar las propiedades y normas de distancias para identificar distintas normas y distancias en distintos espacios, así como en un mismo espacio.
- Identificar las características de conjuntos abiertos y cerrados en distintos espacios métricos, así como en un mismo espacio con diferentes métricas y aplicarlas para identificar diferentes topologías.

1.1. Resultados fundamentales en $\mathbb{R}$

En esta sección, es importante que tengas presente los axiomas de los números reales, y cómo se usan para demostrar otros resultados. A continuación te presentamos los axiomas de campo y los de orden.

Axiomas de Campo

En el conjunto $\mathbb{R}$, de los números reales se tienen dos operaciones básicas: **suma y multiplicación**. Estas son tales, que para cualesquiera dos elemento x, y en $\mathbb{R}$, su suma y su producto es un número real: $x + y \in \mathbb{R}$ y $xy \in \mathbb{R}$. Estas operaciones satisfacen los siguientes axiomas:

Sean x, y, z cualesquiera tres números reales.

Axioma 1. Leyes conmutativas

a) $x + y = y + x$ b) $xy = yx$

Axioma 2. Leyes asociativas

a) $x + (y + z) = (x + y) + z$ b) $x(yz) = (xy)z$

Axioma 3. Neutros.

a) Existe $0 \in \mathbb{R}$, tal que $x + 0 = x$. b) Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1x = x$

Axioma 4. Inversos.

a) Existe $w = -x \in \mathbb{R}$, tal que $x + w = 0$. b) Existe $v = x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $vx = 1$

Axioma 5. Ley distributiva

$$x(y + z) = xy + xz$$

Axiomas de Orden

Axioma 6. Tricotomía. Se satisface una y solo una de las relaciones:

$$x < y,\ \ x > y,\ \ x = y$$

Al cumplirse una de ellas, las otras dos no se satisfacen.

Axioma 7. Monotonía para la suma. Si $x < y$; entonces, para todo z: $x + z < y + z$

Axioma 8. Monotonía de los signos. Si $x > 0$, $y > 0$; entonces, $xy > 0$

Axioma 9. Transitiva. Si $x > y$, $y > z$; entonces, $x > z$

Los números reales forman un campo ordenado, con las operaciones de suma y producto.

El conjunto de números racionales, son los números que se pueden escribir como el cociente de dos enteros:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \ \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \text{y } \ \frac{p}{q} \text{ es irreducible } \right\}.$$

También forman un campo ordenado. Es posible sumar, restar, multiplicar y dividir números racionales y el resultado siempre será un racional.

El conjunto de los números naturales, no forman un campo, porque un número natural no tiene inverso aditivo dentro de los naturales (el inverso aditivo de 2, es –2 pero –2 no es un número natural). No es posible restar números naturales y que el resultado sea siempre un natural (2 – 5 = – 3 que no es natural).

Los números enteros tampoco forman un campo, pues un entero no tiene inverso multiplicativo dentro de los enteros. No es posible dividir números enteros y que el resultado sea siempre un entero (3 ÷ 4 = 0.75 que no es entero).

Vamos a partir de que ya estás familiarizado con los axiomas de campo y orden en los números reales. Con base en ellos se demuestran muchos más resultados y relaciones que satisfacen los números reales. Por ejemplo, el siguiente resultado:

Resultado 1. Si a y b son números reales, tales que para cualquier número $\varepsilon > 0$, $a < b + \varepsilon$, entonces $a \leq b$.

Demostración. Si b fuese menor que a, $b < a$, para $\varepsilon = (a - b)/2 > 0$, se tendría que:
$b + \varepsilon = b + (a - b)/2 = (a + b)/2 < (a + a)/2 = a$.

Lo cual contradice la hipótesis de que $a < b + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Así que b no puede ser menor que a; entonces, por la propiedad 6, a es menor o igual que b: $a \leq b$.

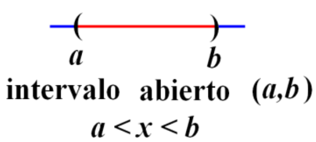
Los números reales que no son racionales (no se pueden escribir como el cociente de dos enteros), son los números irracionales. Por ejemplo, raíz de 2: $\sqrt{2}$, es un número irracional, pero no es fácil probarlo (lo haremos más adelante). Así que el conjunto de los números reales está formado por la unión de los números racionales con los números irracionales.

Hay un axioma más, la completez o completitud de los reales. Es la que permite introducir a los números irracionales en el sistema de los números reales, y establece una diferencia del campo de los reales con el campo de los racionales.

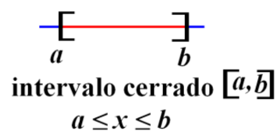
1.1.1. Supremo e ínfimo, propiedades

En esta sección es importante que recuerdes lo que es un intervalo.

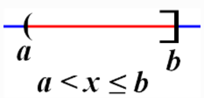
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



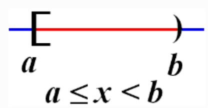
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



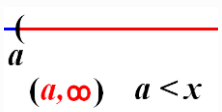
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



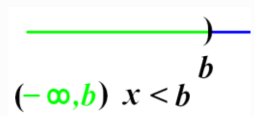
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$



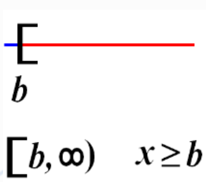
$(a, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$



$(-\infty, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$



$[b, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid b \leq x\}$



$(-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

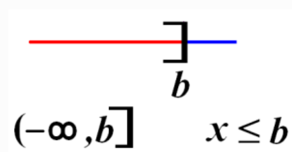


Tabla 1. Intervalos

Cotas y conjuntos acotados

Consideremos el conjunto A = [0,1].

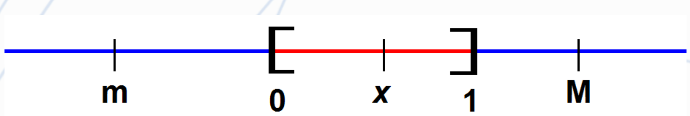


Figura 1. conjunto A=[0,1]

Cualquier número M ≥ 1, satisface que para todo x en A, se tiene que $x \leq$ M; y cualquier número m ≤ 0, satisface que para todo x en A, se tiene que m ≤ x.

A los números M que son mayores o iguales que cualquier elemento de un conjunto, se les llama *cota superior* del conjunto. Y a los números *m* que son menores o iguales que cualquier elemento de un conjunto, se les llama *cota* inferior del conjunto.

Definición. Sea Ω un conjunto de números reales.

a) Si existe un número real M, tal que $x \leq$ M para todo x en Ω, diremos que M es una **cota superior** de Ω.

b) Si existe un número real m, tal que m ≤ x para todo x en Ω, diremos que m es una **cota inferior** de Ω.

c) Una cota superior de un conjunto Ω, que pertenece al conjunto, se llama **elemento máximo** de Ω y lo denotaremos como: max Ω.

d) Una cota inferior de un conjunto Ω, que pertenece al conjunto, se llama **elemento mínimo** de Ω y lo denotaremos como: min Ω.

Un Conjunto es:

a) Acotado superiormente, si tiene una cota superior.

b) Acotado inferiormente, si tiene una cota inferior.

c) Acotado, si tiene una cota superior y una cota inferior.

d) No acotado superiormente, si no tiene cotas superiores.

e) No acotado inferiormente, si no tiene cotas inferiores.

f) No acotado, si no tiene cotas inferiores ni superiores.

Ejemplos

1. Si A = [0, 1], tenemos que 2 es una cota superior porque para cualquier x en A, se tiene que:

$$x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 < 2$$

por lo tanto A es un conjunto acotado superiormente. Además, 1 también es cota superior y es elemento de A, por tanto 1 es el elemento máximo de A.

$$\max A = \max[0, 1] = 1.$$

El conjunto A es acotado inferiormente, pues cualquier número $b < 0$, es una cota inferior de A. Y el 0 también es cota inferior de A y pertenece a A, así que:

$$\min A = \min[0,1] = 0.$$

2. Considera ahora el conjunto B = (0, 1):

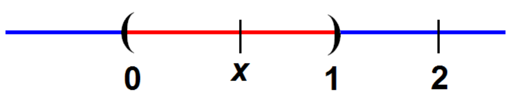


Figura 2. Conjunto B=(0,1)

Como para cualquier x en B, ocurre que:

$$0 < x < 1 \leq 2.$$

Entonces 2 es una cota superior de B, así que B es un conjunto acotado superiormente. El 1, también es una cota superior de B, pero no es un elemento de B.

Nota que no hay ningún número x en (0, 1), que sea cota superior del conjunto, por lo que B no tiene elemento máximo.

B es acotado inferiormente por cualquier número $b < 0$, y no tiene elemento mínimo.

3. Sea C = $(-\infty, 1)$. Este conjunto no es acotado inferiormente, es acotado superiormente, el 1 es una cota superior, y no tiene elemento máximo.

Observa:

A) Una cota superior de un conjunto Ω, puede pertenecer o no al conjunto. Si pertenece al conjunto Ω, entonces es el elemento máximo del conjunto.

B) Si ningún elemento de un conjunto es su cota superior, entonces el conjunto no tiene elemento máximo.

C) Un número a no es cota superior de un conjunto Ω, si a no es mayor o igual que todo elemento de Ω; esto es, si existe x en Ω tal que $a < x$.

Para los conjuntos acotados superiormente, que no tienen elemento máximo, como en los ejemplos 2 y 3, existe un concepto que equivaldría al de elemento máximo, el concepto de supremo. Éste se define como sigue:

Definición I. Sea Ω un conjunto de números reales acotado superiormente. Un número real α es el **supremo** de Ω, si satisface dos condiciones:

a) α es cota superior de Ω

Es decir, para todo x en Ω, $x \leq \alpha$.

b) Ningún número menor que α es cota superior de Ω

Es decir, para todo $b < \alpha$, existe x en Ω tal que $b < x$.

El supremo del conjunto Ω, se denota como supΩ.

Nota que, si un conjunto es acotado superiormente, entonces tiene muchas cotas superiores y podemos hablar del conjunto de cotas superiores de un conjunto.

Por ejemplo, para A = [0,1], cualquier número real M ≥ 1, es una cota superior de A, y su conjunto de cotas superiores es:

$$\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ es cota superior de } [0, 1]\} = [1, \infty)$$

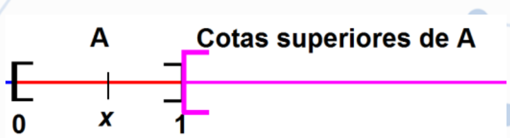


Figura 3. Cotas superiores de A

En este caso, el supremo de A, es el número 1: supA = 1, porque cumple con las dos condiciones:

- El 1 es cota superior de A
- Para cualquier $b < 1$, existe $x = 1$ en A que satisface $b < 1$

Date cuenta de que el supremo de A, es el elemento mínimo del conjunto de las cotas superiores:

$$\sup A = \min[1, \infty] = \min\{\text{cotas superiores de A}\}$$

Para el conjunto B = (0, 1), ocurre que su conjunto de cotas superiores, es el mismo que en el ejemplo anterior:

$$\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ es cota superior de } (0, 1)\} = [1, \infty)$$

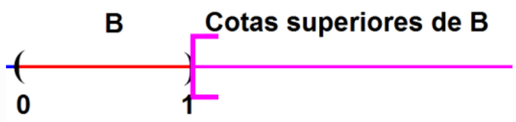


Figura 4. Cotas superiores de B

Y su supremo, también es 1, ya que cumple con las dos condiciones:

- 1 es cota superior de B
- Para cualquier $b < 1$, o bien b es mayor que 0, y entonces existe x, el punto medio entre b y 1: $x = b + (b - 1)/2$, que es un elemento de B, con $b < b + (1 - b)/2$.

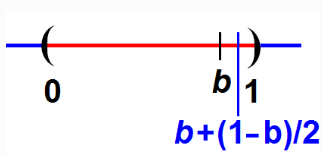


Figura 5. Intervalos

O bien, $b < 0$ y entonces $b < 0 < x$, para cualquier x en B.

En este caso, el supremo de B, el 1, no es un elemento del conjunto B, pero también es el mínimo elemento del conjunto de cotas superiores:

$$\sup B = \min[1, \infty) = \{\text{cotas superiores de B}\}$$

Algunos autores definen al supremo de un conjunto, de la siguiente manera:

Definición II. Sea Ω un conjunto de números reales acotado superiormente. Un número real α es el **supremo** de Ω, si satisface dos condiciones:

a) α es cota superior de Ω

Es decir, para todo x en Ω, $x \leq \alpha$.

b) α es la mínima de las cotas superiores de Ω.

Es decir, para todo M cota superior de Ω, $\alpha \leq M$.

Las definiciones I y II de supremo, son equivalentes.

Para un conjunto acotado inferiormente, de manera análoga, se define la mayor de las cotas inferiores del conjunto.

Definición I. Sea Ω un conjunto de números reales acotado inferiormente. Un número real β es el **ínfimo** de Ω, si satisface dos condiciones:

a) β es cota inferior de Ω

Es decir, para todo x en Ω, $\beta \leq x$.

b) Ningún número menor que β es cota superior de Ω

Es decir, para todo $b > \beta$, existe x en Ω tal que $x < b$.

El ínfimo del conjunto Ω, se denota como infimo Ω.

Definición II. Sea Ω un conjunto de números reales acotado inferiormente. Un número real β es el **ínfimo** de Ω, si satisface dos condiciones:

a) β es cota inferior de Ω

Es decir, para todo x en Ω, $\beta \leq x$.

b) β es la máxima de las cotas inferiores de Ω.

Es decir, para todo m cota inferior de Ω, $m \leq \beta$.

Es fácil demostrar que el supremo de un conjunto es único. Esto es, no puede haber dos números distintos que sean el supremo de un conjunto. Vamos a demostrarlo suponiendo que A es un conjunto acotado superior mente y

$\alpha \overset{1}{\triangleq} supA$ y $\mu \overset{2}{\triangleq} supA.$

Demostraremos que α y μ son iguales.

Por 1, tenemos que: $\alpha \leq$ M para todo M en el conjunto de cotas superiores de A. Como μ es cota superior de A (por 2), entonces:

$$\alpha \leq \mu.$$

Por 2, tenemos que $\mu \leq$ M para todo M en el conjunto de cotas superiores de A. Como α es cota superior de A (por 1), entonces:

$$\mu \leq \alpha$$

así se sigue que

$$\alpha \leq \mu \leq \alpha\,.$$

Por lo tanto $\alpha = \mu$. Y esto demuestra el siguiente teorema:

Teorema 1. El supremo de un conjunto, es único.

Axioma de completitud de los números reales

Desde primaria estás acostumbrado a asociar números reales con puntos en una recta y a tal recta le conoces como la *recta real* o recta numérica.

En efecto, se establece una correspondencia biunívoca entre los números reales y la recta real, de manera que a cada número real se le asigna un único punto en la recta; y, a cada punto en la recta se le asocia un único número real. No hay repeticiones (a un mismo número no se le asocian dos puntos diferentes, y a un mismo punto no se le asocian dos números diferentes). Todos los números reales quedan asignados a puntos en la recta y no sobra ningún número; y todos los puntos de la recta quedan asignados a un número y no sobra ningún punto.

De manera intuitiva, el axioma de completitud establece que:

“la recta real es completa, no tiene huecos; que equivale a decir que el conjunto de números reales es completo, llena la recta. Coloque donde coloque la punta de un alfiler sobre la recta real, allí hay un punto, allí hay un número real. No es posible que haya un hueco”.

No es sencilla la formalización matemática de lo anterior y llevó varios siglos realizarla. Ahora resulta natural pensar que si un conjunto es acotado superiormente, necesariamente debe haber un número real (un punto en la recta) que sea su mínima cota superior; es decir, su supremo. De no existir tal número real, entonces habría un “hueco” en la recta.

Axioma 10 Completitud. Todo conjunto no vacío, Ω, de números reales que es acotado superiormente, tiene un supremo en los reales; es decir, existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha = \sup\Omega$.

Si consideramos como nuestro universo al conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, éstos no llenan la recta, dejan muchos huecos, todos aquellos puntos que corresponden a los números irracionales. De manera que el conjunto de números racionales, no es completo. El axioma 10, formulado para el conjunto de números racionales establecería lo siguiente, que es un campo ordenado):

Todo conjunto no vacío A, de números racionales que es acotado superiormente, tiene un supremo en los racionales; es decir, existe un número $\alpha \in \mathbb{Q}$, tal que

α = supA

La afirmación anterior es falsa. Lo vamos a demostrar en la siguiente sección, pero momentáneamente piensa en un conjunto de números racionales que tuviese como mínima cota superior a un número irracional, por ejemplo el siguiente conjunto:

$$A = \{y \in \mathbb{Q} \mid 0 \le y, y^2 < 2\}.$$

En la siguiente sección demostraremos que éste conjunto tiene como supremo a raíz de 2, y que $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional.

Esto establece la gran diferencia entre el campo de los números racionales que es ordenado, y el campo de los números reales que, además de ser ordenado, es completo.

Una consecuencia del axioma 10, es que todo conjunto no vacío de números reales, acotado inferiormente, tiene ínfimo en los reales. Su demostración la dejamos como ejercicio.

Propiedades del supremo

Vamos a demostrar algunas propiedades del supremo que se usan a lo largo de este curso. Se trata de los siguientes teoremas.

Teorema 2. Sea A un conjunto de números reales no vacío, acotado superiormente; entonces, para todo número $\varepsilon > 0$, existe un elemento de A, $a \in A$, tal que $\sup A - \varepsilon < a \le \sup A$.

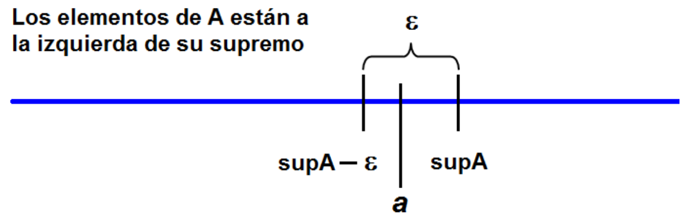


Figura 6. Supremos

De manera análoga, si se tiene un conjunto B de números reales no vacío, acotado inferiormente; entonces para todo número $\varepsilon > 0$, existe un elemento de B, $b \in B$, tal que $\inf B \leq b < \inf B + \varepsilon$.

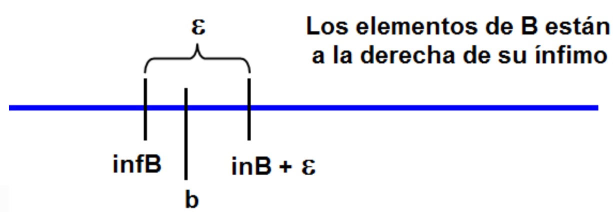


Figura 7. Propiedad de los supremos

Demostración

Lo haremos por reducción al absurdo, suponiendo que no se cumple lo que queremos demostrar. Esto es, supongamos que existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $a \in A$ ocurre que $a \leq \sup A - \varepsilon$, entonces $\sup A - \varepsilon$ es una cota superior de A. Como $\sup A - \varepsilon < \sup A$, así que tenemos una cota superior de A menor que la menor de las cotas superiores que es supA, lo que es una contradicción. Por tanto la suposición es falsa y queda demostrado el teorema. Lo que queríamos demostrar ($\ell q d$)
Para el ínfimo, la demostración es análoga.

Teorema 3. Sean A, B dos conjuntos no vacíos de números reales. Sea C el conjunto:

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

Si A y B son acotados superiormente, entonces C es acotado superiormente y:

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

Demostración.

Sea α = supA, β = supB. Para cualquier $c \in$ C, se tiene: $c = a + b \leq \alpha + \beta$. En consecuencia, $\alpha + \beta$ es cota superior de C; por tanto C tiene supremo.

Sea ζ (zeta) la menor cota superior de C, ζ = supC, entonces $\zeta \leq \alpha + \beta$.

Ahora, bastará demostrar que $\alpha + \beta \leq \zeta$. Para ello, damos cualquier número $\varepsilon > 0$; y, por el teorema 2, existe $a \in$ A y $b \in$ B tales que:

$$\alpha - \varepsilon < a \quad \text{y} \quad \beta - \varepsilon < b,$$

sumando las dos desigualdades, se tiene:

$$\alpha + \beta - 2\varepsilon < a + b\ .$$

Pero $a + b = c \leq \zeta$, entonces:

$$\alpha + \beta - 2\varepsilon < \zeta \ \Rightarrow \alpha + \beta < \zeta + 2\varepsilon\ .$$

De lo anterior (por el resultado 1) podemos concluir que $\alpha + \beta \leq \zeta$. Y como $\zeta \leq \alpha + \beta$, llegamos a que $\zeta = \alpha + \beta$. (lo que queríamos demostrar) *ℓqd*

Teorema 4. Sean A, B dos conjuntos no vacíos de números reales, tales que para todo a en A y para todo b en B, $a \leq b$. Entonces *sup*A ≤ sup*B*.

Demostración.

A es un conjunto acotado superiormente, pues cualquier b en B es cota superior de A, por lo cual la mínima cota superior = supA ≤ b para todo b en B. De esto se sigue que B es un conjunto acotado inferiormente, porque supA es cota inferior de B, por lo tanto es mayor que la mínima cota superior de B: supA ≤ infB. *ℓqd*

1.1.2. Propiedad arquimedeana. Existencia de raíz de 2

Como consecuencia de las propiedades del supremo, se puede demostrar que el conjunto de los números naturales, no es acotado superiormente.

Teorema 5. El conjunto de números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ no es acotado superiormente.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{N}$ esta acotado superiormente, entonces existe un número $\alpha = \sup\mathbb{N}$. Por lo tanto para todo número natural *n*, ocurre que

$$n \overbrace{\leq}^{\text{a}} \alpha\,.$$

Ahora bien, para $\varepsilon = 1 > 0$, (por el teorema 2) tenemos que existe un natural *n*, tal que:

$$\alpha - 1 < n \;\; \Rightarrow \;\; \alpha < n + 1,$$

pero $n + 1$ también es un número natural mayor que α, lo que contradice la desigualdad a. Así que es falso suponer que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente. $\ell q d$

Que los naturales no sean acotados superiormente, significa que para cualquier número real *x*, siempre existe un número natural N, que es mayor que *x*. Esto es lo que establece el siguiente teorema.

Teorema 6. Para cualquier número real *x*, existe un número natural *n*, tal que $x < \text{N}$.

Demostración. Si suponemos lo contrario, que existe un número real *x* tal que para todo número natural *n* ocurre que $n < x$, concluimos que los naturales no son acotados superiormente, lo que contradice el teorema 5. Y terminamos la demostración.

Geométricamente, el teorema 6 establece que si tenemos cualquier segmento de longitud *x*, y un segmento de longitud una unidad *u*, podemos repetir el segmento unitario un número finito *N* de veces, hasta rebasar *x*.

Más en general, se tiene que todo segmento lineal de longitud *y*, por largo que sea, puede rebasarse repitiendo un número finito de veces un segmento de longitud *x*, por pequeño que este sea. Esto es lo que establece el siguiente teorema conocido como propiedad arquimediana de los números reales.

Propiedad arquimediana de los números reales. Dado cualquier número real $x > 0$, y cualquier otro número real y, existe N en los naturales, tal que $y < Nx$.

Demostración

Damos $x' = y/x$, éste es un número real. Por el Teorema 6, existe un natural N, tal que $x' <$ N; es decir, $y/x <$ N, lo que implica que $y < N$x. $\ell q d$

De la propiedad arquimediana se desprenden otros resultados que enunciamos en el siguiente corolario:

Corolario. Sean x, un número real positivo, $x > 0$. Entonces:

a) Existe N en los números naturales, tal que $1/N < x$

b) Existe N en los números naturales, tal que $N – 1 < x < N$.

Demostración de (a)

Hacemos $y = 1$, por la propiedad arquimediana, existe N tal que $y = 1 < Nx$, en consecuencia $1/N < x$. $\ell q d$

Demostración de (b)

Consideremos el conjunto A = $\{n \in \mathbb{N} \mid x < n\}$. Como $1 > 0$ y x es un número real, por la propiedad arquimedina, existe N tal que $x < N1 = N$. Por lo tanto N es un elemento de A; esto es, A es distinto del vacío. Por propiedad de los naturales, cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, tiene un elemento mínimo. Entonces A tiene un elemento mínimo: existe un natural m en A, tal que el natural $m - 1$ ya no está en A y, en consecuencia, $m - 1 \leq x$. Y como m sí está en A, satisface: $x < m$. Y concluimos: $m - 1 \leq x < m$. $\ell q d$

El siguiente corolario del principio de Arquímedes, establece que entre cualesquiera dos números reales, siempre existe un número racional.

Corolario c. Densidad de los racionales en los reales. Si x, y son dos números reales con $x < y$, entonces existe un número racional r con $x < r < y$.

Demostración

Como $x < y$, entonces $x' = y - x > 0$; tomamos $y' = 1$. Por el principio de Arquímedes, existe N en los naturales, tal que $y' < Nx'$; esto es:

$$1 < N(y - x) \;\Rightarrow\; 1 < Ny - Nx$$

$$\Rightarrow\; 1 + Nx \overset{1}{\overbrace{<}} Ny.$$

Ahora tomamos $y'' = Nx$ y $x'' = 1$, entonces existe M_1 en los naturales, tal que $y'' < M_1 x''$; es decir, que:

$$Nx < M_1,$$

y, haciendo $y''' = -Nx$, existe M_2 en los naturales, tal que $y''' < M_2 x''$ y tenemos:

$$-Nx < M_2 \;\Leftrightarrow\; -M_2 < Nx.$$

Por lo que:

$$-M_2 < Nx < M_1.$$

Ahora, por el corolario b, existe un natural M, tal que:

$$M - 1 < Nx \overset{2}{<} M$$

donde $-M_2 < M < M_1$. Sumando uno en la desigualdad de la izquierda:

$$M < Nx + 1.$$

Por la desigualdad 1, tenemos:

$$M < Nx + 1 \overset{1}{<} Ny$$

y, por la desigualdad 2:

$$Nx \overset{2}{<} M < Nx + 1 < Ny$$

$$\Rightarrow \quad Nx < M < Ny.$$

Como $N \neq 0$, finalmente tenemos:

$$x < \frac{M}{N} < y.$$

Y hemos demostrado que existe un racional, $r = M/N$, entre x e y. $\ell q d$

Nótese que este corolario c, establece que un número racional no tiene antecesor ni sucesor, a diferencia de los naturales o los enteros.

Existencia de raíz de 2

Como se había dicho antes, la importancia del axioma del supremo es que garantiza la existencia de números reales, bajo ciertas hipótesis. En particular permite demostrar la existencia de los números irracionales. Vamos a ilustrar cómo se usa, demostrando que existe un número real $x > 0$, tal que $x^2 = 2$.

Primero vamos a demostrar que tal número x no es racional. Y, después, demostraremos que es un número real.

Por demostrar que $\sqrt{2}$ no es racional. Supondremos que sí es un número racional y llegaremos a una contradicción. Vamos a partir del hecho de que si el cuadrado de un número es par, entonces ese número es par.

Supongamos, pues, que raíz de 2 es un número racional, es decir, suponemos que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con p y q enteros, $q \neq 0$ y p/q fracción irreducible, por tanto, p y q tienen como máximo común divisor al 1. Elevando al cuadrado de ambos lados de la igualdad anterior, se obtiene:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \;\Rightarrow\; 2q^2 \overset{1}{=} p^2 \,.$$

Por lo que p^2 es un número par y, por tanto, p también lo es; es decir, existe un número entero c tal que: $p = 2c$. Sustituyendo en la igualdad 1:

$$2q^2 = p^2 = (2c)^2 = 4c^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2c^2 \,.$$

Así que q también es un número par; por consiguiente, p y q son pares y tienen como común divisor al 2, lo que contradice el hecho de que su máximo común divisor es 1. Por lo tanto, raíz de 2 no es un número racional.

Teorema 7. Existe un número real x, tal que $x^2 = 2$.

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto:

$$A = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y, y^2 < 2\}.$$

Es claro que el conjunto A no es vacío, pues $1 \in A$, ya que $0 \leq 1$ y $1^2 = 1 < 2$. También es claro que A es acotado superiormente y 3 es una cota superior, porque para cualquier y en A, $y^2 < 2 < 9 = 3^2$, por lo que $y < 3$. Por el teorema del supremo, existe un número real x, tal que:

$$x = \sup A .$$

Vamos a demostrar que el supremo de A, x, es precisamente el número real que satisface: $x^2 = 2$. Supondremos que no es así, entonces ocurre una de dos cosas: o $x^2 < 2$, o $x^2 > 2$.

Primero suponemos que $x^2 < 2$. Vamos a demostrar que esto contradice el hecho de que x es cota superior de A.

Como $x^2 < 2$, entonces $2 - x^2 > 0$. Por otro lado, como x es cota superior de A, $x \geq 1$ (porque $1 \in$ A), así que $2x + 1 > x + 1 > 0$, y se tiene:

$$\frac{2 - x^2}{2x + 1} > 0 .$$

Por la propiedad arquimediana (corolario a), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{1}{N} < \frac{2 - x^2}{2x + 1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{N}(2x + 1) < 2 - x^2 .$$

De lo anterior, se concluye que $x + 1/N$ está en A, porque:

$$\left(x + \frac{1}{N}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{N} + \frac{1}{N^2} = x^2 + \frac{1}{N}\left(2x + \frac{1}{N}\right) \leq x^2 + \frac{1}{N}(2x + 1) < x^2 + 2 - x^2 = 2$$

pero $x + 1/N > x$, y tenemos que un elemento de A es mayor que x, que es una cota superior de A. Pero esto es una contradicción. Por tanto es falso suponer que $x^2 < 2$.

Ahora, suponemos que $x^2 > 2$. Esto nos lleva a contradecir el hecho de que x sea la menor de las cotas superiores de A. Veamos, claramente $x^2 - 2 > 0$ y $2x > 0$, entonces:

$$\frac{x^2 - 2}{2x} > 0\,.$$

Por la propiedad arquimediana (corolario a), existe N tal que:

$$\frac{1}{N} < \frac{x^2 - 2}{2x} \;\Rightarrow\; \frac{2x}{N} < x^2 - 2\,,$$

de aquí se sigue que $x - 1/N$ es cota superior de A. En efecto, puesto que:

$$\left(x - \frac{1}{N}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{N} + \frac{1}{N^2} > x^2 - \frac{2x}{N} > x^2 - (x^2 - 2) = 2\,.$$

De manera que para cualquier y en A, $x - 1/N > y$, por tanto es cota superior de A. Pero x es la menor cota superior de A y $x - 1/N < x$, lo que es una contradicción. Concluimos que no puede ocurrir que $x^2 > 2$. Por tanto: $x^2 = 2$. $\ell q d$

Al número x se le llama raíz de 2 y es el que se denota: $\sqrt{2}$. También se puede demostrar que si $a > 0$ entonces existe un único número $b > 0$ tal que $b^2 = a$, el número b recibe el nombre de **raíz cuadrado positiva de a** y se denota: $\sqrt{a}$. Y de manera más general, se demuestra la existencia de un único número que es la raíz enésima positiva de a, y se denota: $\sqrt[n]{a}$.

Así, se tiene la existencia de infinidad de números reales, que no son racionales: todas las raíces cuadradas de números que no sean una potencia de 2 ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$, etc.), o todas las raíces enésimas de números que no sean una potencia de ene ($\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{20}, \sqrt[4]{25}, \sqrt[4]{50}$, etc.). Todos esos números reales son irracionales, porque los números reales o son racionales o son irracionales.

1.2. Teoremas de completitud

Hay varios teoremas que son equivalentes al axioma del supremo. No demostraremos aquí todas las equivalencias entre ellos, sólo veremos algunas a manera de ilustración.

1.2.1. Cortaduras de Dedekind y sucesiones monótonas

Richard Dedekind, introdujo el **concepto de cortadura** en 1872, con la intención de dar una demostración rigurosa del **continuo** de la recta real (que en ella no hay **huecos**).
A grandes rasgos, su idea fue más o menos la siguiente:

Partió de la idea intuitiva de que todo punto *a* en la recta real, la divide en dos clases de puntos: la clase A de todos los puntos que están a la izquierda de *a*, y la clase B de todos los puntos que están a la derecha de B. El punto *a* es llamado "**punto de cortadura"**, y los conjuntos A y B son llamados cortadura de los reales.

Además notó que, hay cortaduras de los números racionales. Esto es, dado un punto *z* en la recta, los racionales quedan divididos en dos clases: una clase A de todos los números racionales que están a la izquierda de *z*, y una clase B de todos los números que están a la derecha de *z*; la unión de A y B es el conjunto de todos los números racionales, su intersección es vacía y todo elemento de A es menor o igual que todo elemento de B; y, resulta que el punto de cortadura *z* pertenece a A o a B.

Pero advirtió que hay cortaduras de los racionales tales, que satisfacen todo lo anterior, pero el punto de cortadura no pertenece a los racionales. Entonces definió a los números reales como el conjunto de todos los puntos *z* de cortadura de los números racionales. Los puntos *z* de cortadura que no son números racionales, los definió como irracionales.

Ahora vamos a definir una cortadura en general.

Definición. Sea X un cuerpo (donde se cumplen las 9 propiedades enlistadas en la primera sección). Sean A, B dos subconjuntos de X. Decimos que A, B forman una cortadura de X si se satisfacen las siguientes cuatro condiciones:

i) $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$

ii) $A \cup B = X$

iii) $A \cap B = \emptyset$

iv) Para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, $a \leq b$

Ejemplos.

1. $X = \mathbb{R}$, $A = (-\infty, 1]$, $B = (1, \infty)$.

i) $1 \in A$ y $2 \in B$, por lo tanto A y B son conjuntos no vacíos.

ii) Claramente $(-\infty, 1] \cup (1, \infty) = (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$.

iii) Y también es claro que: $(-\infty, 1] \cap (1, \infty) = \emptyset$

iv) Para todo $a \in A$, se tiene que $a \leq 1$, y para todo $b \in B$, ocurre que $1 < b$, por lo que: $a \leq b$ (se cumple la desigualdad estricta).

Por lo tanto, A y B forman una cortadura de los números reales.

2. $X = \mathbb{Q}$, $A = (-\infty, 2) \cap \mathbb{Q}$, $B = [2, \infty) \cap \mathbb{Q}$.

i) $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, porque $1 \in A$ y $2 \in B$.

ii) $A \cup B = [(-\infty, 2) \cap \mathbb{Q}] \cup [2, \infty) \cap \mathbb{Q}] =: [(-\infty, 2) \cup [2, \infty)] \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

iii) $A \cap B = = [(-\infty, 2) \cap \mathbb{Q}] \cap [2, \infty) \cap \mathbb{Q}] =: [(-\infty, 2) \cap [2, \infty)] \cap \mathbb{Q} = \emptyset$

iv) Para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se tiene que $a < 2$ y $2 \leq b$, por lo que $a \leq b$.

Como se cumplen las 4 condiciones, concluimos que A y B forman una cortadura de $\mathbb{Q}$.

3. X = $\mathbb{Q}$, B = {$b \in \mathbb{Q}$ | $b > 0$ y $b^2 > 2$}, A = $\mathbb{Q}$ – B (los números racionales que no están en B: B^c)

i) Nótese que B ≠ ∅, porque $4^4 = 16 > 2$, por lo que $4 \in$ B. Además, $1 \notin$ B porque $1^2 = 1 < 2$. Como A y B son complementarios, y B es un subconjunto propio de $\mathbb{Q}$, entonces A ≠ ∅.

ii) $A \cup B = B^c \cup B = \mathbb{Q}$

iii) $A \cap B = B^c \cap B = \emptyset$

iv) Para todo $b \in$ B, $2 < b^2$; y, para todo $a \in$ A, como $a \notin$ B, se tiene que $a^2 \leq 2$, entonces: $a^2 \leq b^2$. En virtud de que la función $f(x) = x^2$ es creciente, se sigue que $a^2 \leq b^2$ sólo si $a \leq b$.

Concluimos que A, B forman una cortadura de $\mathbb{Q}$.

Obsérvese que, en el ejemplo 2, tenemos una cortadura de los racionales, y el punto de cortadura es 2, que es un número racional. Pero en el ejemplo 3, que también es una cortadura de los racionales, el punto de cortadura es el número real que satisface: $c^2 = 2$, y ya demostramos que éste número c no es racional (es el irracional $\sqrt{2}$).

El principio de cortaduras de Dedekind, establece en toda cortadura A, B de los números reales, el punto de cortadura es el único número real que satisface ser mayor o igual que todos los elementos de A y menor o igual que todos los elementos de B.

Teorema (Principio de *Dedekind*). Si A, B es cualquier cortadura de $\mathbb{R}$, entonces existe un único número $\xi \in \mathbb{R}$ tal que: para todo $a \in$ A y para todo $b \in$ B: $a \leq \xi \leq b$.

Es claro que los racionales no satisfacen la consecuencia de este teorema; es decir, no se cumple que para toda cortadura de $\mathbb{Q}$, el punto de cortadura sea un racional. El ejemplo 3 lo muestra. Esto se debe a que los racionales no son completos.

De hecho el teorema de Dedekind garantiza la completitud de los números reales, ya que es equivalente al principio del supremo. Esto quiere decir que podemos demostrar el teorema de Dedekind, aplicando el principio del supremo; y, que podemos tomar como principio el teorema de Dedekind, y con base en él, demostrar el principio del supremo, enunciándolo como teorema. Las dos demostraciones son sencillas.

Demostración del teorema de Dedekind

Sea A, B cualquier cortadura de $\mathbb{R}$, entonces se satisface que: para todo $a \in$ A y para todo $b \in$ B: $a \leq b$. Se sigue que cualquier elemento b de B, es una cota superior de A, por lo tanto A es acotado superiormente. Por el principio del supremo, existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal, que ξ = supA y satisface que para todo $a \in$ A, $a \leq \xi$.

Como ξ es la mínima cota superior de A, se sigue que: $\xi \leq b$ para todo $b \in$ B, porque los elementos de B son cotas superiores de A. Podemos concluir que: para todo $a \in$ A y para todo $b \in$ B $a \leq \xi \leq b$. Además, este número ξ es único porque el supremo de un conjunto es único. Así queda demostrado el principio de cortaduras Dedekind.

Ahora, supondremos que el **axioma 10** es el principio de cortaduras de Dedekind, y demostraremos que todo conjunto de números reales, no vacío y acotado superiormente, tiene supremo.

Sea Ω cualquier conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente. Entonces Ω tiene una cota superior M $\in \mathbb{R}$, tal que para todo $x \in \Omega$, $x \leq$ M. Definimos los siguientes dos conjuntos:

$$B = \{b \in \mathbb{R} \mid \text{si } x \in \Omega, \text{ entonces } x \leq b\} \quad \text{y} \quad A = \mathbb{R} - B \ (A = B^c) .$$

Nótese que B contiene a las cotas superiores de Ω, entonces el conjunto Ω está contenido en A.

Vamos a demostrar que A, B forman una cortadura de los reales.

i) Es claro que B es no vacío, porque M está en B. Además B es diferente de $\mathbb{R}$, por tanto B^c = A es no vacío.

ii) $A \cup B = B^c \cup B = \mathbb{R}$

iii) $A \cap B = B^c \cap B = \emptyset$

iv) Por cómo están definidos los conjuntos A y B, es claro que $\forall$ a A y $\forall$ *b* B, $a \leq b$.

Por lo tanto A y B forman una cortadura de los reales. Entonces, por el principio de Dedekind, existe un único número real, ξ, tal que:

$$\forall \text{ a A y } \forall b \text{ B}, a \leq \xi \leq b.$$

Es inmediato que éste número ξ, es cota superior de Ω ya que éste conjunto está contenido en A. Sólo resta demostrar que ξ es la mínima cota superior de Ω. Supongamos que no lo es, y existe $M < \xi$, que es cota inferior de Ω. Entonces para todo *x* en Ω:

$$x \leq M < \xi.$$

Consideremos que $M < (M + \xi)/2 < \xi$, porque $(M + \xi)/2$ es el punto medio entre M y ξ. Entonces:

$$x < (M + \xi)/2$$

Se sigue que $(M + \xi)/2$ está en B y satisface: $\xi \leq (M + \xi)/2 = b_0$. Pero esto contradice el hecho de que $(M + \xi)/2 < \xi$. Por lo tanto es falso suponer que existe una cota superior de Ω que sea menor que Ω. Y concluimos que $\xi = \sup\Omega$. *lqd*

Sucesiones monótonas

Otro teorema equivalente al principio de completez, es el de las sucesiones monótonas. Recuerda que una sucesión es monótona si es no decreciente (sus valores crecen o permanecen iguales); o, si es no creciente (sus valores decrecen o permanecen iguales).

Definición. Sucesiones monótonas.

a) Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona no decreciente, si para todo *n* en $\mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$

b) Una sucesión $\{b_n\}$ es monótona no creciente, si para todo n en $\mathbb{N}$, $b_{n+1} \leq b_n$

Teorema. Principio de sucesiones monótonas.

a) Toda sucesión monótona no decreciente de números reales, acotada, converge a un número real que es su supremo.

b) Toda sucesión monótona no creciente de números reales, acotada, converge a un número real que es su ínfimo.

Tú harás la demostración de este principio en la siguiente actividad:

Los tres principios anteriores: supremo, cortaduras de Dedekin y sucesiones monótonas, involucran un orden y no se pueden generalizar a otros espacios donde no hay tal orden; en particular, no se generalizan a los espacios $\mathbb{R}^n$. En cambio, los siguientes tres principios, sí los podremos generalizar a otros espacios.

1.2.2. Intervalos Anidados

Iniciamos con un ejemplo.

Considera la sucesión de intervalos cerrados $\{[1 - 1/n, 1 + 1/n]\} = \{I_n\}$.

$$I_1 = [0, 2],\ I_2 = [1 - 1/2, 1 + 1/2] = [1/2, 3/2],\ I_3 = [1 - 1/3, 1 + 1/3] = [2/3, 4/3], \ldots$$

Observa que la sucesión de intervalos, está formada por dos sucesiones, una es la de los términos que corresponden a cada extremo izquierdo del intervalo; y, la otra es la de los términos que son los extremos derechos de cada intervalo:

$$\{I_n\} = \{[a_n, b_n]\},\ a_n = 1 - 1/n \quad \text{y} \quad b_n = 1 + 1/n\ .$$

La sucesión cumple dos cosas:

1. Cada intervalo, contiene al siguiente: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq I_5 \supseteq I_6 \supseteq I_7 \quad \ldots$

   En general, para todo n en $\mathbb{N}$, $I_n \supseteq I_{n+1}$. Lo que significa que:

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots b_5 \leq b_4 \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$

$0 \leq 1/2 \quad 2/3 \leq 3/4 \leq 4/5 \leq \ldots \leq 1 - 1/n \leq 1 - 1/(n+1) \leq \ldots$

$\leq 1 + 1/(n+1) \leq 1 + 1/n \leq \ldots \leq 6/5 \leq 5/4 \leq 4/3 \leq 3/2 \leq 2$

2. La longitud de los intervalos tiende a cero, cuando *n* tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \text{longitud}(\mathrm{I}_n) = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right) = 0\,.$$

Las sucesiones de intervalos que satisfacen los dos puntos anteriores, reciben el nombre de sistema de intervalos anidados o de *encaje de intervalos*.

Definición. Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos. Decimos que $\{I_n\}$ es un sistema de intervalos anidados si, y sólo si, cada I_n es un intervalo cerrado, y se satisfacen las siguientes dos condiciones:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $I_n \supseteq I_{n+1}$

b) $\lim_{n\to\infty} \text{longitud}(\mathrm{I}_n) = 0$

Considera nuevamente la sucesión de intervalos cerrados $\{I_n\} = \{[1 - 1/n, 1 + 1/n]\}$. ¿Qué crees que pase, si tomamos la intersección *infinita* de todos los intervalos que forman la sucesión?

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] = [0,2] \cap \left[1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right] \cap \left[1-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}\right] \cap \left[1-\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}\right]$$
$$\cap \left[1-\frac{1}{5}, 1+\frac{1}{5}\right] \ldots$$

Cada que se intersecta un intervalo con el siguiente, el resultado de la intersección es el intervalo más pequeño; y al intersecar con el siguiente, la intersección es el más pequeño; y, así sucesivamente.

El principio de intervalos anidados, establece que si se tiene un sistema de intervalos anidados $\{I_n\}$, entonces hay un único número real que está en la intersección de todos ellos. En el ejemplo anterior, sería el 1, pues $1 \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema. Principio de intervalos anidados. Si $\{I_n\}$ es un sistema de intervalos anidados en $\mathbb{R}$ (cada I_n está contenido en los reales), entonces existe un único $\xi \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n$$

Demostración

Sea $\{I_n\}$ un sistema de intervalos anidados. Entonces cada I_n es de la forma: $I_n = [a_n, b_n]$. Como $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \ .$$

Entonces $\{a_n\}$ es una sucesión no decreciente y acotada superiormente (cualquier b_n es cota superior de $\{a_n\}$). Y $\{b_n\}$ es una sucesión no creciente y acotada inferiormente (cualquier a_n es cota inferior de $\{b_n\}$). Por el principio de sucesiones monótonas, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen; es decir, existe $a = \sup\{a_n\}$ y $b = \inf\{b_n\}$ en los reales tal, que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad y \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \ .$$

Como la longitud de los intervalos tiende a cero, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = a - b = 0\,.$$

Por lo tanto $a = b$. Ahora demostraremos que éste número a está en la intersección de todos los intervalos. Como $a = \sup\{a_n\}$ y $b = \inf\{b_n\}$, se sigue que, para todo n: $a_n \leq a = b \leq b_n$, por lo tanto $a \in [a_n, b_n] = I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y podemos concluir que:

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n \ .$$

Sólo resta demostrar que éste número en la intersección de todos los intervalos, es único. Sea x cualquier número real en $[a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$a_n \leq x \leq b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n \leq x \leq \lim_{n\to\infty} b_n \;\Rightarrow\; a \leq x \leq b.$$

Por lo tanto $x = a = b$. Y esto demuestra que el único número en la intersección de todos los intervalos es a. $\ell q d$

1.2.3. Teorema de Bolzano

Recuerda las definiciones de sucesión acotada, subsucesión y de punto límite de una sucesión.

Definición. Una sucesión $\{an\}$ es acotada, si existe un número M > 0, tal que $|a_n| \leq M$ para todo n en los naturales.

Nota que el hecho de que una sucesión $\{a_n\}$ esté acotada, quiere decir que la podemos encerrar en un intervalo con centro en el 0.

Definición. **Subsucesión**. Una sucesión $\{a_{n_k}\}$ es subsucesión de otra sucesión $\{a_n\}$, si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} \in \{a_n\}$; es decir, la subsucesión está contenida en la sucesión original, $\{a_n\}$.

2. La sucesión de índices de la subsucesión satisface:
$n_k < n_{k+1}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.

(lo que significa que en la subsucesión $\{a_{n_k}\} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, \ldots\}$ los términos a_{n_k} conservan el orden en que aparecen en la sucesión original).

Definición. **Punto límite**. Decimos que un punto $p \in \mathbb{R}$, es punto límite de una sucesión $\{a_n\}$ si, y sólo si, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ tal que $\{a_{n_k}\}$ converge a p ($\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = p$).

Vamos a ver dos versiones del teorema de Bolzano y Weierstrass. La primera de ellas, establece que si una sucesión es acotada, entonces tiene una subsucesión convergente.

Teorema de **Bolzano Weierstrass I**. Toda sucesión de números reales, acotada, tiene al menos un punto límite $p \in \mathbb{R}$.

Te advertimos que la demostración es larga, pero sencilla. Léela con calma, tratando de seguir el razonamiento.

Demostración. Sea $\{a_n\}$ cualquier sucesión acotada. Entonces existe M > 0, tal que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|a_n| < M$; así que: para todo n, $a_n \in [-M, M] = I_0$.

Ahora vamos a construir una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ que converja a un $p \in \mathbb{R}$. Para ello seguimos el siguiente procedimiento:

Paso 1. Partimos I_0 a la mitad, en dos intervalos cerrados iguales. En uno de ellos hay infinidad de términos de $\{a_n\}$, a ese intervalo le llamamos I_1, y seleccionamos un término cualquiera de $\{a_n\}$, le llamamos a_{n_1}.

$$\Rightarrow a_{n_1} \in \{a_n\},\ \ a_{n_1} \in I_1 \subseteq I_0 \text{ y } \text{longitud}(I_1) = M.$$

PASO 2. Partimos el intervalo I_1 a la mitad, en dos intervalos cerrados iguales. En uno de ellos hay infinidad de términos de $\{a_n\}$, a ese intervalo le llamamos I_2, y seleccionamos allí un término de $\{a_n\}$, le llamamos a_{n_2}. Escogemos a_{n_2} con $n_2 > n_1$ (podemos hacerlo porque seleccionamos de entre infinidad de términos de la sucesión y podemos escoger el índice tan grande como nos convenga).

$$\Rightarrow n_2 > n_1\ a_{n_2} \in \{a_n\},\ \ a_{n_2} \in I_2 \subseteq I_1 \text{ y } \text{longitud}(I_2) = \frac{M}{2}.$$

PASO 3. Repetimos el paso anterior.

En el paso 4 repetimos el paso 3, y así sucesivamente. En el paso k, tendremos:

PASO K. Partimos el intervalo I_{k-1} a la mitad, en dos intervalos cerrados iguales. En uno de ellos hay infinidad de términos de $\{a_n\}$, a ese intervalo le llamamos I_k, y seleccionamos allí un término de $\{a_n\}$, le llamamos a_{n_k}. Escogemos a_{n_k} con $n_k > n_{k-1}$.

$$\Rightarrow n_k > n_{k-1}\ a_{n_k} \in \{a_n\},\ \ a_{n_k} \in I_k \subseteq I_{k-1} \text{ y } \text{longitud}(I_k) = \frac{M}{2^{k-1}}$$

y continuamos el proceso de la misma manera, ilimitadamente.

Así, construimos:

1. Una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$.
2. Un sistema de intervalos anidados $\{I_k\}$, pues satisface las dos condiciones:
   a) Por construcción, $I_k \supseteq I_{k+1}$ para todo k en los naturales.
   b) $\lim_{k\to\infty} \text{longitud}(I_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{M}{2^{k-1}} = 0.$

El principio de intervalos anidados, garantiza que existe un único $\xi \in \mathbb{R}$ tal, que:

$$\xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\ .$$

Si demostramos que ξ es el límite de la subsucesión $\{a_{n_k}\}$, esteremos demostrando que es punto límite de $\{a_n\}$ y así concluirá nuestra demostración. Vamos a hacerlo.

Por demostrar que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \xi$. Es decir, por demostrar que dada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > N$, $|a_{n_k} - \xi| < \varepsilon$.

Tenemos que para todo k, $a_{n_k} \in I_k$ y $\xi \in I_k$, entonces

$$|a_{n_k} - \xi| \overset{1}{\lesssim} \text{longitud}(I_k) = \frac{M}{2^{k-1}}.$$

Aplicando el principio de Arquímedes a M en los reales y $\varepsilon > 0$, existe N en los naturales tal, que $M < N\varepsilon \leq (2^{N-1})\varepsilon$. Como $2^{N-1} > 0$, se sigue que:

$$\frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon .$$

Por la desigualdad 1, se tiene:

$$|a_{n_N} - \xi| < \frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon .$$

Ahora bien, para cualquier $k > N$, $I_k \subseteq I_N$, y como $a_{n_k} \in I_k$, $a_{n_N} \in I_N$ y $\xi \in I_k \cap I_N$, tenemos:

$$|a_{n_k} - \xi| \leq |a_{n_N} - \xi| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_{n_k} - \xi| < \varepsilon, \qquad \forall\varepsilon > 0 \text{ y } \forall k > N.$$

Por lo tanto, ξ es punto límite de $\{a_n\}$. $\ell q d$

Para la segunda versión del teorema de Bolzano, necesitas recordar dos conceptos previos.

Definición. **Vecindad**. Definimos la vecindad de radio $\varepsilon > 0$ y centro en q, como el conjunto: $V_\varepsilon(q) = (q - \varepsilon, q + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - q| < \varepsilon\}$.

Definición. **Punto de acumulación**. Sea A un conjunto de números reales. Decimos que $p \in \mathbb{R}$, es punto de acumulación de A, si toda vecindad de p contiene al menos un punto $a \in A$ y $a \neq p$.

Es inmediato, de la definición de punto de acumulación, que:

1. p es punto de acumulación de A si, y sólo si, para toda $\varepsilon > 0$ existe $a \in A \cap V_\varepsilon(p)$ y $a \neq p$.
2. p es punto de acumulación de A si, y sólo si, para toda $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$, tal que: $0 < |a - p| < \varepsilon$

La segunda versión del teorema de Bolzano, establece que todo conjunto acotado, si es infinito, tiene un punto de acumulación.

Teorema de Bolzano W. II. Todo conjunto acotado de números reales tiene al menos un punto de acumulación.

Demostración

Es análoga a la de la versión I. Dado un conjunto infinito, A, acotado, se tiene que existe M > 0, tal que para todo a en A $|a| \leq M$; es decir, que $a \in [-M, M] = I_0$. Se construye un sistema de intervalos anidados, igual que en la demostración anterior. De manera, que en el paso k, se tendrá:

PASO K. Partimos el intervalo I_{k-1} a la mitad, en dos intervalos cerrados iguales. En uno de ellos hay infinidad de elementos de A, a ese intervalo le llamamos I_k. Entonces, se tiene:

$$I_k \cap A \neq \emptyset, \; I_k \subseteq I_{k-1} \text{ y } \text{longitud}(I_k) = \frac{M}{2^{k-1}} \, ,$$

al ser $\{I_k\}$ un sistema de intervalos anidados, existe un único $\xi \in \mathbb{R}$ tal, que:

$$\xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \, .$$

Ahora demostraremos que ξ es punto de acumulación de A. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe N en los naturales, tal que $M < N\varepsilon \leq (2^{N-1})\varepsilon$, y en consecuencia: $\frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Esto significa que existe un intervalo I_N con:

$$\text{longitud}(I_N) = \frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon \Rightarrow I_N \subset V_\varepsilon(\xi)\ .$$

Como en I_N hay infinidad de elementos de A, seleccionamos una cualquiera $a_o \neq \xi$. Por lo tanto, en toda vecindad de ξ hay elementos de A, distintos de ξ. $\ell q d$

1.2.4. Sucesiones de Cauchy

Como sabes, una sucesión es de Cauchy, si a partir de algún término, a_N, toso los términos con n > N cumplen que la distancia entre ellos es menor que cualquier $\varepsilon > 0$.

Definición. Sucesión de Cauchy. Una sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy si, y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe N en los naturales, tal que para todo $n, m > N$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Teorema. Principio de Cauchy. Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales es una sucesión de Cauchy si y sólo si $\{a_n\}$ converge a un número real L.

Demostración. Primero, consideramos como hipótesis que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y vamos a demostrar que converge a un número real.
Observemos que $\{a_n\}$ es acotada, puesto que para $\varepsilon = 1$, existe N en los naturales, tal que para toda $n > N$ ocurre que

$$|a_n - a_{N+1}| < 1,$$

por la desigualdad del triángulo,

$$|a_n| - |a_{N+1}| < 1$$

y se sigue que

$$|a_n| < 1 + |a_{N+1}|.$$

Así que, a partir del término a_N, todos los que tienen índice mayor a N, están dentro de un intervalo con centro en 0, de longitud $2M_1 = 2(1 + |a_{N+1}|)$.

Para $n \leq N$, tomamos M_2 igual al máximo elemento del conjunto $\{|a_1|, |a_2|, |a_3|,..., |a_N|\}$.

Así que todos los términos de la sucesión, con índice menor o igual que N, quedan en el intervalo con centro en 0 y longitud M_2.

Ahora, tomamos M como el mayor de los números M_1 y M_2, y se satisface que, para todo n en los naturales, $|a_n| \leq M$. Por lo tanto, la sucesión es acotada. Por el teorema de Bolzano I, $\{a_n\}$ tiene al menos un punto límite $p \in \mathbb{R}$.

Por último, demostraremos que p es el límite de la sucesión. Como la sucesión es de Cauchy, dada $(\varepsilon/2) > 0$, existe N_1 en los naturales, tal que para todo n, $m > N$:

$$|a_n - a_m| \overset{1}{\overbrace{<}} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Y como p es punto límite de la sucesión, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ que converge a p, entonces existe N_2 en los naturales, tal que para todo $k > N_2$:

$$|a_{n_k} - p| \overset{2}{\overbrace{<}} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomamos N igual al mayor entre N_1 y N_2, de manera que las desigualdades 1 y 2, se satisfagan simultáneamente para todo n, $m > N$ y $k > N$. Como cada a_{n_k} es término de la sucesión, y $k > N$, tenemos que $a_{n_k} = a_m$. Así llegamos a lo siguiente:

$$|a_n - a_m| \overset{1}{\overbrace{<}} \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |a_m - p| = |a_{n_k} - p| \overset{2}{\overbrace{<}} \frac{\varepsilon}{2},$$

sumando las desigualdades y usando la desigualdad del triángulo:

$$|a_n - a_m + a_m - p| \leq |a_n \, - \, a_m| + |a_m - p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a_n \, - \, p| < \varepsilon \, .$$

Concluimos que: $\lim_{n\to\infty} a_n = p \in \mathbb{R}$. $\ell q d$

Ahora, tomando como hipótesis que $\{a_n\}$ converge a L, se puede demostrar que la sucesión es de Cauchy. Esta parte de la demostración es muy sencilla y se dejará como ejercicio.

Observa que el principio de Cauchy, establece condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de números reales converja (aún sin conocer el valor de su límite). Esto es, el teorema establece dos cosas:

1. Que toda sucesión convergente en los reales, es una sucesión de Cauchy.
2. Que toda sucesión de Cauchy en los reales, converge a un número real.

Este principio es generalizable a cualquier espacio $\mathbb{R}^n$, sin embargo, la segunda parte no es generalizable a cualquier espacio; hay espacios métricos donde las sucesiones de Cauchy no convergen a un elemento del mismo espacio.

1.3. Numerabilidad y no numerabilidad

Te imaginas que pudiera existir un hotel, con infinidad de habitaciones, tantas como números naturales, y la característica de que siempre está lleno y siempre da alojamiento a cualquier cantidad de nuevos huéspedes. Abre tu mente, supón que es posible y realiza la siguiente actividad. Esto te ayudará a comprender el tema que nos ocupa.

1.3.1. Conjuntos finitos e infinitos

Recuerda que una función de A en B: f:A → B, es uno a uno (inyectiva), si cada elemento en la imagen, proviene de un único elemento x en el dominio; esto es, si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$.
Y la función f es sobreyectiva (sobre), si la imagen de la función es igual a B:

$$\text{Imagen de } f = \{y = f(x) \mid x \in A\} = B.$$

Una función es biyectiva, si es uno a uno (inyectiva) y sobre a la vez.

Definición. **Correspondencia biyectiva**. Dos conjuntos A y B, están en correspondencia biyectiva si, y sólo si, existe una función f biyectiva (uno a uno y sobreyectiva), con dominio A e imagen B (o dominio B e imagen A).

Definición. **Conjunto finito**. Un conjunto A es finito y tiene n elementos, si existe una función biyectiva de con dominio Z e imagen A (o al revés, dominio A e imagen Z) donde Z es un conjunto de números naturales de la forma:

$$Z = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}.$$

Al número n se le llama cardinalidad de A o cardinal de A y denotaremos

$$\text{cardinal de } A = \#A = n.$$

Por ejemplo el conjunto:

A = 

es finito de cardinalidad 3, pues podemos relacionar a cada elemento de A con los elementos de Z = {1, 2, 3}. Haciendo $f(1) =$ , $f(2) =$  y $f(3) =$ . Es claro que f: Z → A es biyectiva.

$$A = \{ f(1), f(2), f(3)\}$$

En el caso del conjunto vacío, diremos que tiene cardinalidad cero.

Es claro que dos conjuntos finitos, A y B, tiene la misma cardinalidad si existe una función F biyectiva, con dominio A e imagen B (o dominio B e imagen A). En efecto, pues si A tiene cardinalidad n, existe una función biyectiva $f: Z_1 \to A$, con $Z_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Y si B tiene cardinalidad n, existe una función biyectiva $g: B \to Z_1$. Entonces, la función que resulta de la composición: f compuesta g, es biyectiva: $F: B \to A$, $F(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b))$.

El siguiente resultado es inmediato para conjuntos **finitos**.

Resultado 1. Sean A y B dos conjuntos finitos.

a) Si A es subconjunto propio de B, $A \subset B$, entonces $\#A < \#B$.

b) Si A es subconjunto de B, $A \subseteq B$, entonces $\#A \leq \#B$.

c) Si A y B son ajenos, $A \cap B = \emptyset$, entonces $\#(A \cup B) \geq \#A$ y $\#(A \cup B) \geq \#B$.

Este resultado no se cumple en conjuntos **infinitos**.

También se dice que dos conjuntos A, B son **coordinables** o **equipotentes**, y se escribe:

$$A \sim B$$

si, y sólo si existe una función F uno a uno, con dominio igual a A e imagen igual a B.

Es claro que *F* establece una correspondencia uno a uno de A en B. Esta es una relación de equivalencia, pues satisface:

1. Todo conjunto *A* es equipotente consigo mismo, tomando a la función *F* como la identidad. Propiedad reflexiva.
2. Si A ~ B, entonces B ~ A, porque si *F* hace equipotente a A con B, y F es uno a uno, entonces F^{-1} hace equipotente a B con A. Propiedad simétrica.
3. Si A ~ B y B ~ C, entonces A ~ C, ya que tenemos *F* uno a uno, de A en B; G uno a uno de B en C, entonces la función H(*a*) = (G ° F)(*a*) = G(F(*a*)) es uno a uno de A en C. Propiedad transitiva.

Es claro que una correspondencia biyectiva es simétrica, reflexiva y transitiva.

Y se dice que un conjunto A es finito con *n* elementos, si:

$$A \sim Z = \{1, 2. 3, \ldots , n\}.$$

Los conjuntos que no son finitos, los llamaremos infinitos. Estos contienen un subconjunto que se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de **todos** los números naturales.

Definición. **Conjunto infinito**. Diremos que un conjunto R es infinito, si existe un conjunto $A \subseteq$ R, tal que A se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de **todos** los números naturales.

También se dice que un conjunto R es infinito si tiene un subconjunto A equipotente a los naturales, $A \sim \mathbb{N}$.

Por ejemplo, el de los números reales es un conjunto infinito, porque existe $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, y la función identidad $I:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, es biyectiva.

Es claro que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$, así que el conjunto de los números naturales es infinito. Al cardinal de los números naturales, se le llama aleph cero y se denota con esa letra griega con subíndice cero:

$$\#\mathbb{N} = \aleph_0$$

1.3.2. Conjuntos numerables

Los conjuntos infinitos que se puedan poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de **todos** los números naturales, son los que llamaremos conjuntos infinitos numerables.

Definición. **Conjunto infinito numerable**. Un conjunto S es infinito numerable, si existe una manera de establecer una correspondencia biunívoca entre S y el conjunto de todos los números naturales.

Definición. **Conjunto numerable**. Un conjunto es numerable si es finito o infinito numerable.

Nótese que S es infinito numerable si es equipotente a los naturales: S~ ℕ.

Ejemplos.

1. El de los números enteros, es un conjunto numerable, pues se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ℤ y ℕ, de la siguiente manera:

…	$-n$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…	n	…
	↓		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	
…	$2n+1$		7	5	3	1	2	4	6		$2n$	…

Los naturales pares van a los enteros positivos, los naturales impares van a los enteros negativos y el 1 va al cero (nota que esto es equivalente al problema de acomodar en el hotel extraordinario a dos infinidades de huéspedes). La función:

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n > 0 \\ -(2n+1), & n \leq 0 \end{cases}$$

Es biyectiva, con dominio igual a ℤ e imagen igual a ℕ. Se desprende que:

$$\#\mathbb{Z} = \#\,\mathbb{N}$$

2. El conjunto A = $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (las parejas ordenadas del plano (a, b), con a, b en los naturales), es un conjunto numerable.

Se puede hacer un recorrido por las parejas de puntos (a, b) en el plano, e ir asignando a cada punto un único número natural, de la siguiente manera: iniciamos en (0,0) y el asignamos el 1; continuamos en (1, 0) y el asignamos el 2; seguimos en (0, 1) y le asignamos el 3; brincamos al (2,0) y le asignamos el 4, continuamos en diagonal al (1, 1) y le asignamos el 5, y al (0,2) le asignamos el 6; brincamos al (3, 0) y le asignamos el 7, continuamos en diagonal asignando naturales a las parejas encontradas hasta llegar al (0, 4); brincamos al (5, 0) y continuamos en diagonal nuevamente. Y así sucesivamente.

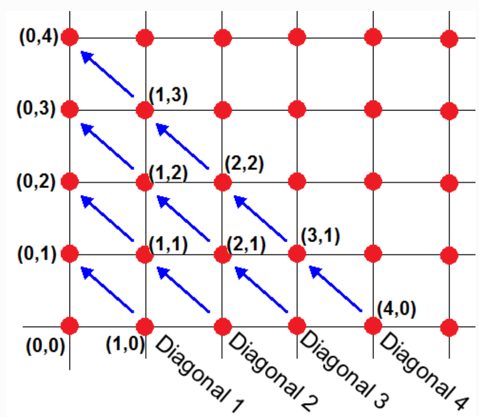


Figura 8. Conjunto A= NxN

Así, tendremos f(0,0) = 1, f(1,0) = 2, f(0,1) = 3, en la diagonal 1; f(2,0) = 4, f(1,1) = 5, f(0, 2) = 6, en la diagonal 2; f(3, 0) = 6, f(2, 1) = 7, f(1, 2) = 8, f(0, 3) = 9, en la diagonal 3; y así sucesivamente.

Observa que todo punto (a, b) en la diagonal n, satisface: $a + b = n$; y (a, b) está en el lugar $b + 1$ de la diagonal. El número total de puntos en las diagonales anteriores es: 1 + 2 + 3 + … + (a + b). Así que en la diagonal $a + b$, el punto (a, b) es al que le corresponde el número:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (a + b) + (b + 1) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + (b + 1) \in \mathbb{N}.$$

Y tenemos la función biyectiva f: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, con regla de correspondencia:

$$f(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + (b+1).$$

De éste ejemplo, se desprende que:

$$\#\mathbb{N} = \#(\mathbb{N}\times \mathbb{N})$$

Nota que el problema anterior equivale a acomodar en el hotel extraordinario, a tantas filas como números naturales, cada una con tantos huéspedes como números naturales (infinidad de infinidad de huéspedes).

3. El conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es numerable. En efecto, pues como $\mathbb{Z}$ es numerable, existe una biyección, f:$\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{Z}$, entonces la función F: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dada por F($n$, m) = (f(n), f(m)), es una biyección. Por el ejercicio 2, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, por lo tanto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es numerable.
De éste ejemplo, podemos deducir que:

$$\#(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \#\mathbb{N}$$

Más en general, de manera análoga se puede demostrar que si A es un conjunto infinito numerable, entonces A × A también lo es.

También, de lo anterior, se sigue que, para cualquier z entero, el conjunto $\{z\}\times\mathbb{Z}$, es numerable. Y, más en general, se tiene el siguiente teorema:

Teorema. Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.

Demostración. Sea S un conjunto numerable y A cualquier subconjunto de S. Si A es finito, no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que A es infinito (por lo que S también será infinito) y vamos a demostrar que A es numerable.

Como S es numerable, existe una función $f(n) = s_n$, de los naturales a S, que es una biyección. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función g de la siguiente manera:

$g(1)$ = menor natural m tal que $s_m \in A$.

Suponiendo definidas $g(2), g(3), \ldots g(n-1)$, se define:

$g(n)$ = el menor natural $m > g(n-1)$ tal que $s_m \in A$.

De esta definición de g, es inmediato que si $n < m$, entonces $g(n) < g(m)$. Ahora definimos la función: F, como la composición de f con g: $F(n) = (f \circ g)(n) = f(g(n))$, cuyo dominio es $\mathbb{N}$ y su imagen es A, por lo que es sobre. Además, F es uno a uno, pues:

$$F(n) = F(m) \Rightarrow f(g(n)) = f(g(m)) \Rightarrow s_n = s_m .$$

Lo que implica que $n = m$ porque f es inyectiva. *ℓqd*

Este teorema permite demostrar de otra manera que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Basta definir la biyección f como:

$$f(a, b) = (2^a)(3^b).$$

El dominio de f es $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y su imagen es un subconjunto infinito de los naturales, por lo tanto un subconjunto infinito numerable. La función f, es uno a uno, puesto que si $a \neq m$ o $b \neq n$, entonces $(2^a)(3^b) \neq (2^m)(3^n)$.

También tenemos que **el conjunto de números racionales, es numerable**. Vamos a demostrar que hay una biyección entre un subconjunto A de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y los racionales. Definimos el conjunto A como:

$$A = \{(0,1)\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b > 0 \text{ y } a/b \text{ es fracción irreducible } (a, b \text{ primos relativos})\}.$$

Y definimos f: A$\to\mathbb{Q}$, como $f(0,1) = 0$ y para $a \neq 0$, $f(a, b) = a/b$. Es claro que la imagen de f es $\mathbb{Q}$, y a cada pareja (m, n) en A, le corresponde un único número racional m/n (por ser m/n fracción irreducible). Además, A es numerable por ser subconjunto de un conjunto numerable. Por tanto $\mathbb{Q}$ es numerable.

Hay conjuntos infinitos que no son numerables, como el de los números reales.

Teorema. El conjunto de los números reales no es numerable.

Demostración.

Bastará demostrar que el conjunto de los números reales en el intervalo (0, 1) no es numerable. Lo haremos por contradicción.

Supongamos que el conjunto $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ es numerable. Entonces, existe una función $f:\mathbb{N} \to (0, 1)$, $f(n) = a_n \in (0,1)$, inyectiva y con imagen igual a (0, 1).

Ahora, vamos a construir un número real $y \in (0,1)$, que no esté en la imagen de f, lo cual contradice el hecho de que el (0, 1) sea igual a la imagen de f, y el teorema quedará demostrado. Para esto, escribimos cada elemento a_n en la imagen de f en su forma decimal:

$$a_1 = 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}d_{15} \ldots$$

$$a_2 = 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}d_{25} \ldots$$

Y en general:

$$a_n = 0.d_{n1}d_{n2}d_{n3}d_{n4}d_{n5} \ldots$$

Donde cada cifra decimal d_{ni}, es un número entre 0 y 9. Ahora consideramos el número real y dado de la siguiente manera:

$$y = 0.\, e_1e_2e_3e_4e_5\ldots$$

con:

$e_1 = 1$ si $d_{11} \neq 1$, o $e_1 = 2$ si $d_{11} = 1$

$\Rightarrow y = 0.1e_2e_3e_4e_5\ldots$ o $y = 0.2e_2e_3e_4e_5\ldots$

$e_2 = 1$ si $d_{22} \neq 1$, o $e_2 = 2$ si $d_{22} = 1$

$\Rightarrow y = 0.11e_3e_4e_5\ldots$ o $y = 0.12e_3e_4e_5\ldots$ o $y = 0.21e_3e_4e_5\ldots$ o $y = 0.22e_3e_4e_5\ldots$

$e_3 = 1$ si $d_{33} \neq 1$, o $e_3 = 2$ si $d_{33} = 1$

$\Rightarrow y = 0.111e_4e_5\ldots$ o $y = 0.112e_4e_5\ldots$ o $y = 0.121e_3e_4e_5\ldots$ o $y = 0.122e_4e_5\ldots$ o $y = 0.211e_4e_5\ldots$ o $y = 0.212e_4e_5\ldots$ o $y = 0.221e_4e_5\ldots$ o $y = 0.222e_4e_5\ldots$

Y así sucesivamente, $e_n = 1$ si $d_{nn} \neq 1$, o $e_n = 2$ si $d_{nn} = 1$. De esta manera, $y \in (0,1)$; y, además, $y \neq a_1$ porque tienen diferente su primera cifra decimal, $y \neq a_2$ porque tienen diferente su segunda cifra decimal; y, en general, $y \neq a_n$, para todo n en los naturales, pues tienen diferente su enésima cifra decimal. *ℓqd*

1.3.3. Colecciones numerables de conjuntos numerables

Recuerda que la unión de dos conjuntos, $A \cup B$, consta de todos los elementos que están en A o están en B, o están en A y B. Ten presente que la unión de dos conjuntos es conmutativa y asociativa:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{y} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

La unión de conjuntos puede hacerse entre familias infinitas y familias infinitas numerables de conjuntos.

Definición. **Unión arbitraria**. Sea F una colección arbitraria de conjuntos. Definimos la unión de todos los elementos de F, como el conjunto de los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos de F, y denotamos esta unión como:

$$\bigcup_{A\in F} A$$

Si F es una **colección finita**, $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ denotamos:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

Si F es una **colección numerable**, $F = \{A_1, A_2, A_3, A_4\ \ldots,\}$ denotamos:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \ldots$$

La intersección de dos conjuntos, A ∩ B, consta de los elementos que están a la vez en A en B. Si A y B no tienen elementos en común, su intersección es el conjunto vacío. La intersección de dos conjuntos también es asociativa y conmutativa.

Definición. **Intersección arbitraria**. Sea *F* una colección arbitraria de conjuntos. Definimos la intersección de todos los elementos de *F*, como el conjunto de los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de *F*, y denotamos esta intersección como:

$$\bigcap_{A\in F} A$$

Si F es una **colección finita**, $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ denotamos:

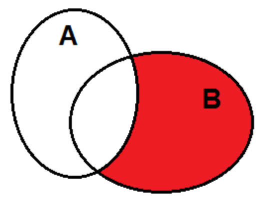
$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$$

Si F es una **colección numerable**, $F = \{A_1, A_2, A_3, A_4\ \ldots,\}$ denotamos:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots$$

El complemento de un conjunto A relativo a un conjunto B, es como si a B le quitáramos los elementos que tiene en común con A; esto es, son los elementos que están en B y no están en A y se denota:

B – A = {x | $x \in$ B, pero $x \notin$ A}



B – A

Figura 9. B – A

Cuando A es el vacío, B – A = B – ∅ = B.

Teorema. Sea *F* una colección de conjuntos. Entonces:

a) El complemento de la unión de los elementos de *F* relativo a B, esta dado por la intersección de los complementos de cada A en F, relativos a B:

$$B - \bigcup_{A \in F} A = \bigcap_{A \in F} (B - A)$$

b) El complemento de la intersección de los elementos de *F* relativo a B, esta dado la unión de los complementos de cada A en *F*, relativos a B:

$$B - \bigcap_{A \in F} A = \bigcup_{A \in F} (B - A)$$

Demostración del inciso a. Hay que demostrar las dos contenciones:

$$B - \bigcup_{A\in F} A \subseteq \bigcap_{A\in F}(B-A) \;\text{ y }\; B - \bigcup_{A\in F} A \supseteq \bigcap_{A\in F}(B-A)$$

Por demostrar que $B - \bigcup_{A\in F} A \subseteq \bigcap_{A\in F}(B-A)$:

$$\text{Sea } x \in B - \bigcup_{A\in F} A \;\Rightarrow\; x \in B \text{ pero } x \notin \bigcup_{A\in F} A \;\Rightarrow\; \forall A \in F, x \notin A \text{ pero } x \in B$$

$$\Rightarrow\; x \in (B-A)\ \forall A \in F \;\Rightarrow\; x \in \bigcap_{A\in F}(B-A)\,.$$

Lo que demuestra la primera contención. Para la segunda contención, procedemos de manera análoga:

$$\text{Sea } x \in \bigcap_{A\in F}(B-A) \Rightarrow \forall A \in F,\ x \in (B-A)$$

$$\Rightarrow x \in B \text{ pero } x \notin A\ \ \forall A \in F \;\Rightarrow\; x \in B \text{ pero } x \notin \bigcup_{A\in F} A \;\Rightarrow\; x \in B - \bigcup_{A\in F} A$$

$\ell q d$

La demostración del inciso b, es análoga.

Dos conjuntos son disjuntos o ajenos, si su intersección es el vacío: A ∩ B = ∅. Y vamos a decir que una colección de conjuntos *F* es una **colección de conjuntos disjuntos**, si cualesquiera dos conjuntos en *F*, son disjuntos.

Teorema. **Unión numerable de numerables disjuntos**. Sea *F* una colección de conjuntos disjuntos cada uno de ellos numerable. Entonces la unión de los conjuntos en *F* es numerable.

Demostración. Sea $F = \{A_1, A_2, A_3\ \dots\}$ con A_n numerable, y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo *i*, *j* en los naturales. Como los conjuntos A_n son numerable, son de la forma:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots\},\ A_2 = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots\}.$$

Y, en general:

$$A_n = \{a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \dots\}.$$

Para cada *x* en la unión:

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\ .$$

Entonces *x* está en uno y solo un conjunto A_n (no puede estar en más de un porque son disjuntos); es decir, $x = a_{mn}$, para *n* y *m* únicos. De manera que la función que a cada *x* en $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ asocia la pareja (*m*, *n*), *f*(*x*) = (*m*, *n*), es uno a uno; y la imagen de *f* es un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que es numerable. Por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable. $\ell q d$

Teorema. Sea $F = \{A_1, A_2, A_3\ \dots\}$ una colección numerable de conjuntos. Sea $H = \{B_1, B_2, B_3\ \dots\}$ tal que $B_1 = A_1$ y para cada *n* > 1,

$$B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

Entonces H es una colección numerable de conjuntos disjuntos y además:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Demostración

Es inmediato que cualquier par de conjuntos en H son disjuntos, pues cada B_n se construyó de manera tal que no tiene ningún elemento común con sus predecesores: $B_1, B_2, B_3 \ \ldots B_{n-1}$; por lo tanto H es colección numerable de conjuntos disjuntos.

Ahora hay que demostrar las dos contenciones:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{y} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Para la primera, si:

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

entonces $x \in A_m$, para uno o más *m*; sea *n* el menor de estos números tal que $x \in A_n$, sigue que x no está en A_k para todo *k* = 1, 2, …, *n* – 1. Esto es:

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad \Rightarrow \quad x \in B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Para la segunda contención, si:

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \Rightarrow \quad x \in B_m, \text{ para algún } m \quad \Rightarrow \quad x \in A_m, \text{ para el mismo } m$$

$$\Rightarrow \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$\ell q d$

De los dos teoremas anteriores, es inmediato que la unión numerable de conjuntos numerables, es numerable.

Teorema. Si *F* es una colección numerable de conjuntos numerable entonces la unión de todos les conjuntos en F es numerable.

A manera de ejemplo, demostraremos que el conjunto de los racionales positivos, es numerable. Pare ello, definimos:

$$A_1 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \ldots\right\},\ A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots\right\},\ A_3 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots\right\}$$

Y así sucesivamente, A_n será el conjunto de todas las fracciones con denominador *n*:

$$A_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \ldots\right\}$$

Ya que todo número racional es de la forma: $r = m/n$, $n \neq 0$, se sigue que:

$$\{r \in \mathbb{Q} | r > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\ .$$

Y como cada A_n es numerable, se concluye que el conjunto de números racionales positivos, es numerable.

Con esto terminamos la sección. Es importante que te asegures de haber comprendido bien los contenidos tratados, porque los usaremos en adelante; y muchas de las demostraciones aquí expuestas, simplificarán demostraciones posteriores a la hora de hacer generalizaciones a otros espacios.

1.4. Espacios Vectoriales

Los espacios vectoriales son una de las estructuras más importantes del análisis matemático.

Un espacio vectorial U, sobre un campo K, es un conjunto U no vacío donde están definidas dos operaciones: la suma entre los elementos de U cuyo resultado es un elemento de U; y, el producto de un escalar en K por elementos de U, y el resultado es un elemento de U. Esas dos operaciones deben satisfacer varias condiciones. A los elementos de U les llamaremos vectores o puntos y a los del campo K, escalares.

Definición. Sea U un conjunto, $U \neq \emptyset$, y K un campo. Decimos que U es un espacio vectorial sobre el campo K, si:

a) $\forall\, u, v \in U$, $u + v \in U$, y esta operación satisface:

1. Simetría. $\forall\, u, v \in U$, $u + v = v + u$
2. Asociativa. $\forall\, u, v, w \in U$, $(u + v) + w = v + (u + w)$
3. Neutro vectorial. Existe un único $\mathbf{0} \in U$, tal que $\forall\, u \in U$, $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$
4. Inverso vectorial. $\forall\, u \in U$, existe un único $v \in U$, tal que $u + v = \mathbf{0}$

b) $\forall\, u \in U$, $\forall\, a \in K$, el producto $au \in U$, y éste producto satisface:

1. Asociativa. $\forall\, a, b \in K$ y $\forall\, u \in U$, $(ab)u = a(bu) = b(au)$
2. Neutro escalar. Existe un único $1 \in K$ tal que $\forall\, u \in U$, $1u = u$
3. Distributiva (escalares). $\forall\, a, b \in K$ y $\forall\, u \in U$, $(a + b)u = au + b\mathrm{u}$
4. Distributiva (vectores). $\forall\, a \in K$ y $\forall\, u, v \in U$, $a(u + v) = au + a\mathrm{v}$

En general, vamos a partir de que el campo K es el de los números reales o el campo de los números complejos.

Ejemplos

1. $U = \mathbb{R}^n$, es un espacio vectorial con la suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ y el producto de vectores por un número real.

El elemento neutro en $\mathbb{R}^n$ es $\overline{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$ y el neutro en $\mathbb{R}$ es 0.

El inverso de un elemento $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es $-\bar{v} = (-v_1, -v_2, -v_3, \dots, -v_n)$ y el inverso de *a* en $\mathbb{R}$, es $-a$.

De tus cursos de Cálculo de Varias Variables I y II, sabes que se satisfacen las propiedades asociativas, distributivas y la simétrica.

2. U = M_{nm}, donde M_{nm} es el conjunto de todas las matrices con *n* renglones y *m* columnas, con la suma de matrices y el producto de un número real por una matriz.

El elemento neutro en M_{nm} es la matriz de *n* renglones y *m* columnas cuyas entradas son ceros:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

El inverso aditivo de una matriz $M_{n,m}$ es la matriz $-M_{n,m}$:

$$M_{nm} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad -M_{nm} = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nm} \end{pmatrix}$$

De tus cursos de álgebra lineal, sabes que se satisfacen las propiedades asociativas, distributivas y la simétrica.

En este espacio, un punto es una matriz.

3. U = conjunto de funciones continuas en un intervalo cerrado, con valores reales, el que denotaremos:

$$C_f = \{f: [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ es continua en } [a, b]\}$$

con la usual suma de funciones y el producto de un número real por una función:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\qquad (af)(x) = af(x)$

Es sencilla la demostración de que se cumplen las 8 propiedades.

4. U = conjunto de funciones Riemann integrables de un intervalo cerrado con valores reales, que denotamos:

$$I_f = \{f: [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ es integrable en } [a, b]\}$$

Tanto la suma de funciones integrables en [*a*, *b*] como su producto por un número real, resulta una función integrable en [*a*, *b*]. Además, estas operaciones satisfacen que $\forall f, g \in I_f$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b g(x) + f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx\,.$$

El elemento neutro en I_f es la función constante cero en [*a*, *b*]. Es inmediato que se satisfacen el resto de las propiedades.

5. U = C_1 = conjunto de funciones continuas en un intervalo cerrado, [*a*, *b*], tales que *f*(*a*) = 1; con la suma usual de funciones y el producto de un número real por una función, **no** es un espacio vectorial. No hay forma de definir un elemento neutro en C_1.

En los espacios de los ejemplos 3 y 4 un punto es una función.

Por tus cursos de Cálculo de Varias Variables I y II, así como los de álgebra lineal, conoces ya una serie de propiedades, conceptos y resultados en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Muchos de estos se generalizan de inmediato a cualquier espacio vectorial U; las demostraciones de teoremas y resultados son prácticamente las mismas. A continuación enlistamos algunos para que los tengas presentes.

Propiedad. Si U es un espacio vectorial, entonces para todo $v \in$ U, $\mathbf{0}v = \mathbf{0}$; y $(-1)v = -v$.

Definición. **Subespacio**. Sea U un espacio vectorial, S ⊆ U, S ≠ ∅. Decimos que S es un subespacio de U, si S es un espacio vectorial con las mismas dos operaciones definidas en U.

Teorema. Sea U un espacio vectorial, S ⊆ U, S ≠ ∅. Entonces,

$$\text{S es un subespacio de U} \iff \begin{cases} \forall v, u \in S, a \in K \\ \quad i)\ u + v \in S \\ \quad ii) \quad au \ \in \ S \end{cases}$$

Los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal, son equivalentes a los que estudiaste para $\mathbb{R}^n$, y sus propiedades también, mencionaremos tres de ellas.

Propiedades. En un espacio vectorial U, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Dos vectores u, $v \in$ U son linealmente dependientes si, y sólo si $u = a$v, con $a \in$ K.
2. Un conjunto $R \subset$ U es linealmente dependiente si y sólo si, existe $u \in$ R tal que u es combinación lineal de elementos en $A - \{u\}$.
3. Un conjunto $R \subset$ U es linealmente independiente si y sólo si, no existe $u \in$ R que sea combinación lineal de elementos en $A - \{u\}$.

Resultado. Sea U en espacio vectorial, $R \subset$ U, $R = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Entonces, el conjunto:

$$L(R) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \,|a_i \in K\}$$

es un subespacio vectorial de U. $L(R)$ se llama subespacio generado por R y el conjunto R se denomina conjunto de generadores de $L(R)$.

Definición. Sea B un subconjunto de un espacio vectorial U. Decimos que B es una **base** de U, si B es un conjunto linealmente independiente y $L(B)$ = U.
La dimensión de un espacio vectorial U, dimU, es el cardinal de cualquiera de sus bases. La dimensión del espacio vectorial que consta sólo del elemento neutro, U = {**0**}, se define como cero.

1.4.1. Producto escalar

El producto escalar juega un papel importante en los espacios vectoriales, pues nos permite, entre otras cosas, medir distancias entre puntos-vectores del espacio en el que estemos trabajando. La noción de producto punto o producto interior en $\mathbb{R}^n$ se generaliza a espacios vectoriales de la siguiente manera.

Definición. **Producto escalar o producto punto**. Sea U un espacio vectorial sobre un campo K. Un producto escalar (o producto punto) en U, es una función que a cada pareja de vectores en U le asocia un escalar en K, φ:U×U $\rightarrow$ K, y satisface las siguientes condiciones:

a) Definida positiva: $\forall\ u \in$ U, $u \neq \mathbf{0}$, $\varphi(u, u) > 0$; y, $\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$
b) Simétrica. $\forall\ u, v \in$ U, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$
c) Saca escalares. $\forall\ u, v \in$ U, $a\ \forall \in$ K, $\varphi(au, v) = a\varphi(u, v)$
d) Distributiva. $\forall\ u, v, w \in$ U, $\varphi(u + \mathrm{v}, \mathrm{w}) = \varphi(u, \mathrm{w}) + \varphi(\mathrm{v}, \mathrm{w})$

Usaremos la notación: $\varphi(u, v) = \langle u, v\rangle$, o bien $\varphi(u, v) = u \cdot v$

Los espacios vectoriales con un producto escalar asociado, se llaman **espacios vectoriales euclidianos**

Ejemplos

1. U = $\mathbb{R}^n$, K = $\mathbb{R}$, y definimos:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ , donde } \bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \qquad \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

Demostremos que es un producto escalar:

a) Si $\bar{x}, \neq \bar{0}$, al menos una de sus componentes es diferente de cero, $x_k \neq 0$, entonces:

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = 2 \left(x_1 x_1 + \cdots + \underbrace{x_k x_k}_{\bar{0}} + \cdots + x_n x_n \right) = 2x_1 x_1 + \cdots + 2 \underbrace{x_k x_k}_{\bar{0}} + \cdots + 2x_n x_n > 0 \, .$$

Y es claro que el resultado de la suma de los productos anteriores es cero si, y sólo si todas las x_i son cero; es decir, $\bar{x} = \bar{0}$.

b) Para cualesquiera dos vectores en $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) = 2(y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n) = 2 \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle \, \bar{y}, \bar{x} \rangle$$

c) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$,

$$a\bar{x} = a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$$

Entonces:

$$\langle a\bar{x}, \bar{y} \rangle = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i) y_i = a2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$$

d) Como:

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

se sigue que:

$$\langle \bar{x}+\bar{y},\bar{z}\rangle = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)z_i = 2\sum_{i=1}^{n}x_iz_i + y_iz_i = 2\sum_{i=1}^{n}x_iz_i \quad + \quad 2\sum_{i=1}^{n}y_iz_i = \langle \bar{x},\bar{z}\rangle + \langle \bar{x},\bar{z}\rangle$$

2. U = $\mathbb{R}^n$, K = $\mathbb{R}$, y φ el producto punto usual:

$$\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

es un producto escalar. La demostración es análoga a lo hecho en el ejemplo 1.

3. U = C_f (las funciones continuas en un intervalo cerrado [a, b]), K = $\mathbb{R}$, y definimos:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Tiene sentido, porque las funciones continuas en intervalos cerrados, son integrables; y, el producto de funciones integrables es una función integrable.

Veamos que se satisfacen las cuatro propiedades:

a) Si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, se tiene que $f(x)f(x) = [f(x)]^2 > 0$ y, por tanto, su integral es positiva:

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)f(x)dx = \int_a^b [f(x)]^2dx > 0\,.$$

Y sólo en el caso de que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, la integral de $[f(x)]^2 = 0$, será cero.

b) Si tenemos dos funciones f, g en C_f,

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g,f\rangle$$

c)

$$\langle af, g\rangle = \int_a^b af(x)g(x)dx = a\int_a^b f(x)g(x)dx = a\langle f, g\rangle$$

d)

$$\langle f+g, h\rangle = \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)h(x)dx = \int_a^b f(x)h(x)+g(x)h(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$$

1.4.2. Normas

La noción de norma en $\mathbb{R}^n$ la generalizamos de la siguiente manera.

Definición. **Norma de un vector**. Sea U un espacio vectorial sobre un campo K. Una norma en U es una función ρ: U $\rightarrow \mathbb{R}$, con las siguientes propiedades:

a) $\rho(u) \geq 0$ para todo u en U.

b) $\rho(u) = 0$ si, y sólo si, $u = \mathbf{0}$

c) $\forall u \in$ U, $a \in$ K, $\rho(au) = |a|\rho(u)$

d) $\forall u, v \in$ U, $\rho(u+v) \leq \rho(u) + \rho(v)$ **desigualdad del triángulo**

Denotaremos: $\rho(u) = \|u\|$

Si se elimina la condición 2, se dice que la función ρ es una **seminorma** en U.

Un espacio vectorial con una norma asociada, se llama **espacio vectorial normado.**

Ejemplos

1. **Norma infinito.** U = C_f (funciones continuas en un intervalo cerrado), K = $\mathbb{R}$, definimos $\|f\|_\infty = max\,\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$. Demostraremos que satisface las 4 propiedades de norma.
Primero observamos que como f es continua en [*a*, *b*] entonces la función |f(x)|, también es continua en [*a*, *b*], por lo tanto alcanza su máximo en el intervalo. Es decir, existe ξ en el intervalo [*a*, *b*], tal que

$$|f(\xi)| = max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} = \|f\|_\infty$$

Y, como el valor absoluto de un número siempre es mayor o igual que cero, y es cero sólo si el número es cero, entonces las primeras dos propiedades se satisfacen:
a) $\|f\|_\infty > 0 \;\; \forall f$, con $f(x) \neq 0$ para algún $x \in [a,b]$
b) $\|f\|_\infty = 0$, sólo si $f(x) = 0 \;\; \forall x \in [a,b]$

c) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, $\|a\bar{x}\|_\infty = max\{|af(x)| \mid x \in [a,b]\} = |af(\xi)| = |a||f(\xi)| = |a|\|f\|_\infty$
d) Para cualesquiera f, g en C_f, por ser continuas en un intervalo cerrado, las funciones $|f|$ y $|g|$ también son continuas en el intervalo cerrado [*a*, *b*] y alcanzan su máximo; esto es, existen ξ y γ $\in$ [*a*, *b*] tales que:
$|f(\xi)| = max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} = \|f\|_\infty$ y $|g(\gamma)| = max\{|g(x)| \mid x \in [a,b]\} = \|g\|_\infty$…(1)

Por otro lado, la función $|f + g|$ también es continua y alcanza su máximo en algún $\zeta \in$ [*a*, *b*], así que

$$|f(\zeta) + g(\zeta)| = max\{|f(x) + g(x)| \mid x \in [a,b]\} = \|f + g\|_\infty \qquad (2)$$

Como $|f(\xi)|$ y $|g(\gamma)|$ son máximos de las funciones respectivas, satisfacen las desigualdades siguientes, para todo *x* en [*a*, *b*]:

$$|f(x)| \leq |f(\xi)| \quad \text{y} \quad |g(x)| \leq |g(\Upsilon)| \quad \Rightarrow \quad |f(x)| + |g(x)| \leq |f(\xi)| + |g(\Upsilon)|.$$

Por la desigualdad del triángulo para el valor absoluto, $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, se satisface la primera de las siguientes desigualdades:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq |f(\xi)| + |g(\Upsilon)|.$$

Ésta última desigualdad se cumple para todo *x* en [*a*, *b*], en particular se satisface para ζ:

$$|f(\zeta) + g(\zeta)| \leq |f(\xi)| + |g(\Upsilon)|.$$

Y, por las igualdades (1) y (2), tenemos ya la propiedad 4:

$$\|f + g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

2. **En** $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\bar{x} = (x_n, \dots, x_n)}$.

a) **Norma uno**, es la suma de los valores absolutos de las componentes de un vector.

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Las cuatro propiedades de norma se deducen de inmediato de las propiedades del valor absoluto.

b) **Norma infinito**, es el mayor de los valores absolutos de las componentes.

$$\|\bar{x}\|_\infty = max\{|x_i| \mid i = 1, \dots n\}$$

El elemento máximo de $\{|x_i| \mid i = 1, \dots n\}$ es $|x_k|$, para alguna *k*, con $1 \leq k \leq n$. Así que las cuatro propiedades de norma, se deducen de las propiedades del valor absoluto.

c) **Norma *p***. Para un número real $p > 1$, se define la norma p como:

$$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Las primeras tres propiedades de norma, son fáciles de demostrar.

La desigualdad del triángulo se deduce de la desigualdad de la **desigualdad de Hölder**, que establece que si $q > 1$es tal que: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces para todo $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Y a partir de ésta desigualdad, se demuestra la **desigualdad de Minkowski**:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

3. Si U es un espacio vectorial sobre un campo K y el conjunto $B = \{b_1, \dots b_n\}$ es linealmente independiente y genera a U (B es una base de U); entonces cualquier vector en U se puede escribir como combinación lineal de elementos en B:

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$a_i \in K$ $\forall$ $i = 1, \dots, n$. Se define la **norma suma** y la **norma máximo** como:

$$\|u\|_+ = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \quad \text{y} \quad \|u\|_\infty = \max\{|a_i| \,|i = 1, \dots n\}$$

Ambas normas cumplen las 4 propiedades. Si K es el campo de los números reales, las 4 propiedades se siguen de las propiedades del valor absoluto; y si K es el campo de los números complejos, las 4 propiedades se cumplen, puesto que un número complejo ***a*** = (*x*, *y*), donde *x* e *y* son números reales y el número *y* es la parte imaginaria: ***a*** = *x* + i*y*, tiene como módulo o valor absoluto al número real: |***a***| = $\sqrt{x^2 + y^2}$.

En los espacios vectoriales euclidianos, el producto escalar asociado siempre induce una norma.

Definición. **Norma inducida por un producto escalar.** Sea U un espacio vectorial sobre un campo K, con un producto escalar asociado, $\varphi(u, v) = u \cdot v$; es decir, U es un espacio vectorial euclidiano. Definimos la norma inducida por el producto escalar $u \cdot v$, como la raíz positiva de dicho producto:

$$\|u\|_i = \sqrt{u \cdot u}$$

Nota que, si *u* = **0** $\|u\|_i = 0$, y si *u* ≠ **0**, $\|u\|_i{}^2 = |u \cdot u|$

La norma inducida cumple las cuatro propiedades de norma y, además satisface:

1. **Desigualdad de Cauchy-Boniakowsky-Schwarz** (C.B.S.):

$$|u \cdot v| \leq \|u\|_i \|v\|_i$$

2. **Ley del paralelogramo**.

$$\|u + v\|_i{}^2 = 2\left(\|u\|_i{}^2 + \|v\|_i{}^2\right)$$

Es importante señalar que no toda norma proviene de un producto escalar. La manera de determinar si una norma es inducida o no por un producto escalar, nos la da el siguiente teorema.

Teorema. Sea U, un espacio vectorial y ρ una norma asociada a U. La **norma ρ es inducida** por un producto escalar si, y sólo si ρ satisface la ley del paralelogramo:

$\rho(u) \ = \|u\|_i \Leftrightarrow \rho^2(u+v) = 2(\rho^2(u) + \rho^2(v))$

En consecuencia, si una norma no satisface la ley del paralelogramo, entonces no es inducida por un producto escalar. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$ la norma $\|\bar{x}\|_p$ no proviene de un producto escalar cuando $p \neq 2$, puesto que no cumple la ley del paralelogramo. Pero sí es posible establecer una relación entre dos normas definidas en un mismo espacio vectorial.

Definición. **Normas equivalentes**. Sea U un espacio vectorial, y ρ_a, ρ_b. dos normas definidas en U. Decimos que ρ_a y ρ_b son equivalentes, si existen dos constantes positivas, *a* y *b* tales que, para todo $u \in$ U:

$$a\rho_a(u) \leq \rho_b(u) \leq b\rho_a(u)$$

Y denotamos:

$$\rho_a \sim \rho_b$$

lo que indica que ρ_a es equivalente a ρ_b.

La relación ~ es simétrica y transitiva.

Teorema. Todas las normas definidas en un espacio vectorial de dimensión finita, son equivalentes.

Los espacios con una norma asociada que son completos con tal norma, son los que reciben el nombre de **espacios de Banach**. Discutimos la completitud de un espacio métrico en las unidades 2 y 3.

1.4.3. Distancias

Ahora generalizaremos la noción de distancia.

Definición. **Distancia o métrica**. Sea U un espacio vectorial sobre un campo K, decimos que *d* es una distancia o una métrica en U, si *d* es una función que se aplica a parejas en U, toma valores en los reales, d:U × U → $\mathbb{R}$, y satisface que para u, v, w ∈ U:

a) $d(u, v) \geq 0$

b) $d(u, v) = 0 \iff u = v$

c) $d(u, v) = d(v, u)$

d) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Los espacios vectoriales que tienen asociada una distancia o métrica *d*, se llaman **espacios vectoriales métricos**, o simplemente **espacios métricos**. Vamos a denotar: (U, *d*) un espacio métrico con la métrica *d* asociada.

Ejemplos

1. **Métrica discreta o trivial**. En un espacio vectorial U, definimos la métrica discreta como:

$$d_D(u,v) = \begin{cases} 1, & u \neq v \\ 0, & u = v \end{cases}$$

Si se cambia 1 por cualquier otra constante, se obtienen otras distancias o métricas discretas para U. Este ejemplo es importante ya que muestra que todo conjunto no vacío U, puede dotarse de una métrica.

Los espacios dotados con la métrica discreta se llaman **espacios métricos discretos.**

2. En U = $\mathbb{R}^n$, para $p \geq 1$, se tienen las siguientes distancias:

$$d_p(\bar{x},\bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\bar{x} - \bar{y}\|_p$$

Si p = 1, la distancia es:

$$d_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \|\bar{x} - \bar{y}\|_1$$

Si p = 2, tenemos la distancia usual (euclidiana):

$$d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\bar{x} - \bar{y}\|_2$$

Y la norma infinito, también es una distancia:

$$d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = max\{|x_i - y_i| \ \mid i = 1, \dots n\} = \|\bar{x}\|_\infty$$

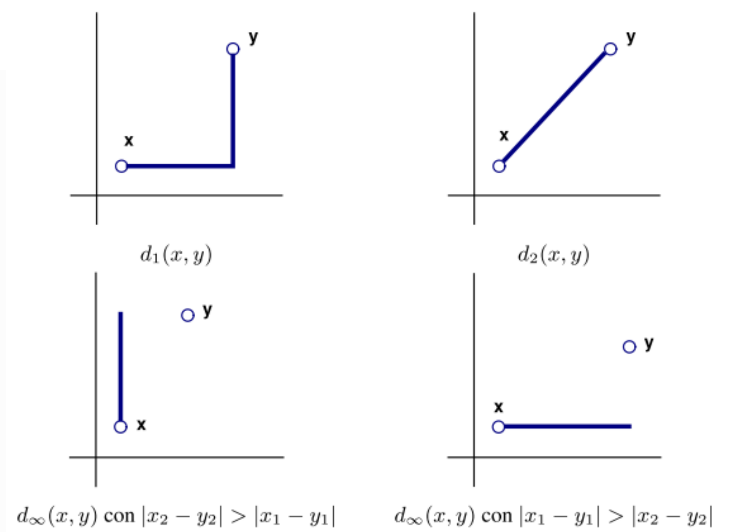


Figura 10. Norma infinito

3. En el espacio de las funciones acotadas en un intervalo cerrado:

$$U = A_f = \{f: [a, b] \to \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq M, \text{ para algún } M > 0\}$$

Se define la distancia supremo entre dos funciones como:

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x) \mid x \in [a, b]\} = \|f(x) - g(x)\|_\infty$$

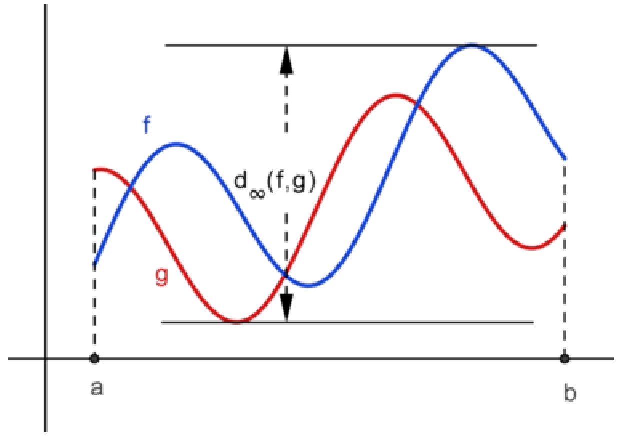


Figura 11. Distancia supremo

4. En el espacio de las funciones continuas en un intervalo cerrado con valores reales, C_f, la aplicación:

$$d_A(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

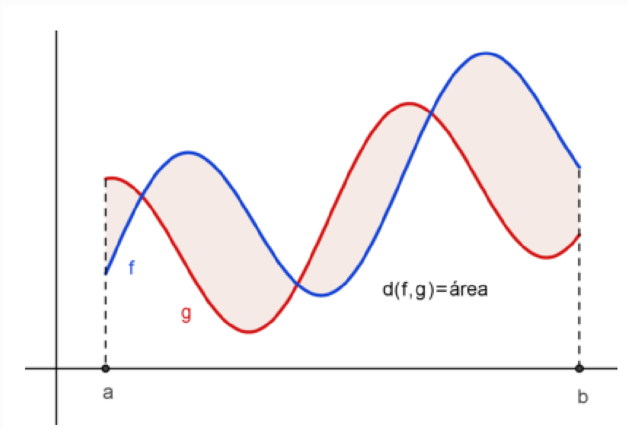


Figura 12.Funciones continuas en un intervalo cerrado

Es una distancia que mide el área comprendida entre las gráficas de dos funciones. Las 4 propiedades de una métrica se satisfacen a consecuencia de las propiedades del valor absoluto y de las propiedades de la integral:

a) $|f(x) - g(x)| \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \geq 0$

b) $|f(x) - g(x)| = 0 \;\Leftrightarrow f(x) = g(x)$, por tanto $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = 0 \;\Leftrightarrow f(x) =$

$g(x)$

c) $|f(x)-g(x)| = |g(x)-f(x)| \Rightarrow \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx = \int_a^b |g(x)-f(x)|\,dx$

d) Como $|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|$,

se sigue que:

$$d_A(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \leq \int_a^b |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|\,dx$$

$$= \int_a^b |f(x)-h(x)|\,dx \ + \int_a^b |h(x)-g(x)|\,dx = d_A(f,h) + d_A(h,g)$$

5. En el espacio de sucesiones acotadas en los reales: $\boldsymbol{S_A} = \left\{\{\boldsymbol{a_n}\} \,\middle|\, \{\boldsymbol{a_n}\} \text{ es acotada}\right\}$ (donde cada punto es una sucesión) la aplicación

$$d(\{a_n\},\{b_n\}) = sup\{|a_n - b_n|\ |n \in \mathbb{N}\} = \|a_n - b_n\|_\infty$$

es una distancia. Y también es una distancia en el espacio de sucesiones convergentes $S_C = \left\{\{a_n\} \,\middle|\, \{a_n\} \text{ converge}\right\}$.

6. Más en general, en el espacio de sucesiones, tales que la serie de la potencia *p* de su valor absoluto converge, con *p* > 1:

$$S_p = \left\{\{a_n\} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right\}$$

Las aplicaciones:

$$d_p(\{a_n\},\{b_n\}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|a_n - b_n\|_p$$

son distancias.

A excepción del ejemplo 1, en los demás tenemos métricas asociadas a una norma. En efecto, un espacio vectorial normado, es un espacio vectorial métrico con la métrica inducida por la norma asociada. El siguiente teorema establece que toda norma induce una métrica.

Teorema. Sea U en espacio normado, con la norma $\|\ \|$. Entonces la aplicación $d(u, v) = \|u - v\|$, define una métrica o distancia en U.

La demostración es sencilla, puesto que las primeras tres propiedades de norma y distancia son equivalentes. Y la cuarta propiedad de distancia se deduce de inmediato de la cuarta propiedad de norma de la siguiente manera:

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u, w) + d(w, v)$$

Sin embargo, es importante señalar que no toda métrica induce una norma.

Una métrica, permite definir la distancia de un punto a un conjunto y la distancia entre dos conjuntos.

Definición. Sea U un espacio vectorial métrico, con la métrica d, V, W subconjuntos de U, u_0, un vector (o punto) en U. Definimos:

Distancia de un punto a un conjunto

a) La distancia de u_0 al conjunto V, como:

$d(u_0, V) = \inf\{d(u_0, v) \mid v \in V\}$

Distancia entre dos conjuntos

b) La distancia del conjunto V al conjunto W como:

$d(V, W) = \inf\{d(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$

Es claro que si $u_0, v \in V$, $d(u_0, V) = 0$; y si $V \cap W \neq \emptyset$ entonces $d(V, W) = 0$. Sin embargo un punto u_0 puede no estar en V, y su distancia a V sí ser cero; o, dos conjuntos pueden ser ajenos y su distancia ser cero.

Ejemplos

1. En $\mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1 \text{ y } 0 < y < 1\}$, d la distancia usual en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $d((0,0), A) = \alpha$. Demostraremos que $\alpha = 0$. En efecto, pues si $\alpha > 0$, es claro que $\alpha < 1$; entonces, $(\alpha/3, \alpha/3) \in A$, por lo que $\alpha \leq d((0,0), (\alpha/3, \alpha/3) = \sqrt{2}\frac{\alpha}{3}$, y tendríamos que $3 \leq \sqrt{2}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $d((0,0), A) = 0$. Nótese que (0, 0) no pertenece al conjunto *A*.

2. En $\mathbb{R}^2$, *d* la distancia usual, *A* como en el ejemplo 1 y $B = \{(x, y) \mid 1 < x < 2,\ 0 < y < 1\}$. De manera análoga, supongamos que $d(A, B) = \alpha > 0$, es claro que $\alpha < 1$. Entonces $\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \in A$ y $\left(1 + \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \in B$, y tendríamos que $\alpha \leq d\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right), \left(1 + \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2}$, lo que es una contradicción. Se concluye que $d(A, B) = 0$. Nótese que $A \cap B = \emptyset$.

3. Sea U un espacio vectorial con la métrica discreta, $u_0 \in U$ y $V \subset U$. Calcularemos la distancia de u_0 a V. Si $u_0 \in V$, como $d(u_0, u_0) = 0$, se sigue que $d(u_0, V) = 0$; pero si $u_0 \notin V$, entonces $u_0 \neq v, \forall v \in V$, por lo que $d(u_0, v) = 1$ y, se concluye que, $d(u_0, V) = 1$.

1.4.4. Topología básica en espacios métricos

Una métrica en un espacio vectorial, nos permite generalizar los conceptos de vecindad en los reales, o bolas en $\mathbb{R}^n$.

Definición. **Vecindad-Bolas**. Sea (U,*d*) un espacio métrico, $v_0 \in U, r \in \mathbb{R}, r > 0$. Definimos:

1. Una vecindad o **bola abierta** con radio r y centro en u_0, como el conjunto:

$$B_r(v_0) = \{u \in U \mid d(v_0, u) < r\}$$

2. Una vecindad o **bola agujerada**, es una bola sin el centro:

$$B_r{}^{o}(v_0) = B_r(v_0) - \{v_0\} = \{u \in U \mid 0 < d(v_0, u) < r\}$$

3. Una vecindad o bola **cerrada** con radio r y centro en u_0, como el conjunto:

$$\overline{B_r}(v_0) = \{u \in U \mid d(v_0, u) \leq r\}$$

Ejemplos

1. En $\mathbb{R}^2$,

a) Con la métrica usual, d_2, una bola abierta de radio r con centro en (a, b), son los puntos que están dentro de la circunferencia, sin incluir a la circunferencia.

$$B_r\big((\mathrm{a}, \mathrm{b})\big) = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) | \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$$

b) Con la métrica d_1, una bola de radio 1 con centro en (0,0) = **0**: es el conjunto:

$B_1(\mathbf{0}) = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 1\}$

c) Con la métrica d_∞, una bola de radio 1 con centro en **0**, es el conjunto:

$B_1(\mathbf{0}) = \{(x, y) | \max\{|x|, |y|\} < 1\}$

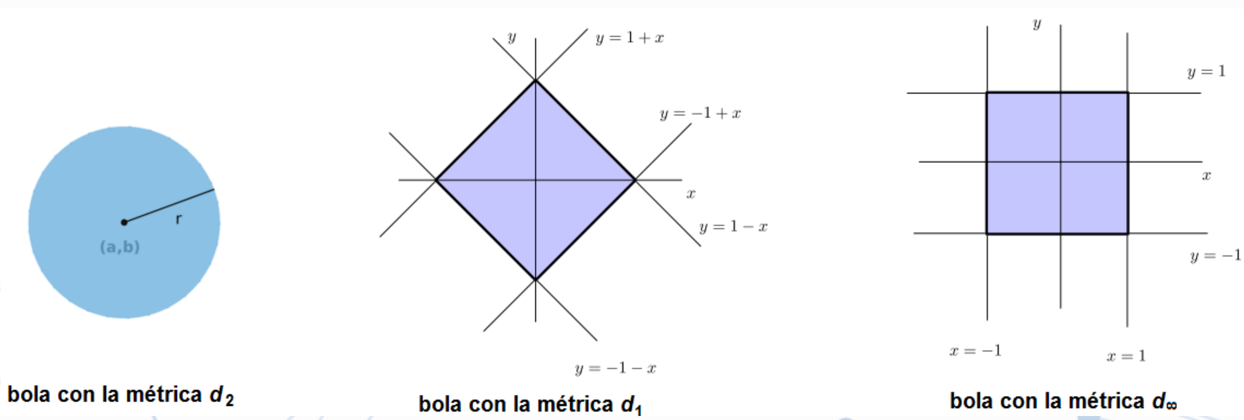


Figura 13. bola de métricas

Ninguna de las tres bolas incluye la orilla o frontera de la figura

2. En el espacio de funciones continuas en un intervalo cerrado, C_f, con la métrica d_∞, una bola

de radio r con centro en f_0, es el conjunto:

$$B_r(f_0) = \left\{ f \in C_f \,\middle|\, \sup \{|f_0(x) - f(x)| < r, \forall x \in [a,b]\} \right\}$$

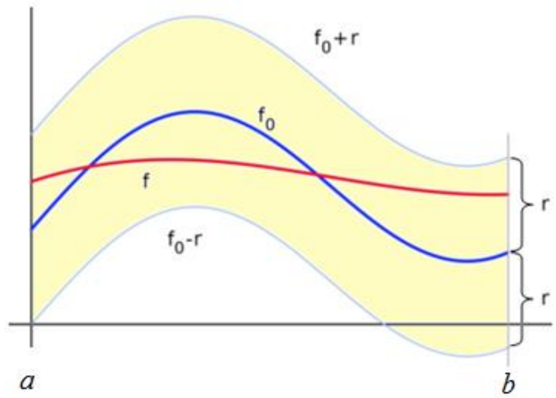


Figura 14. bola métrica en funciones continuas

3. Con la métrica discreta, d_D, en cualquier espacio U métrico, una bola abierta o es el conjunto que consta de un punto (el centro de la bola) o es el mismo espacio, dependiendo del radio:

$$B_r(u_0) = \begin{cases} \{u_0\}, & r \leq 1 \\ U, & r > 1 \end{cases}$$

Los conjuntos abiertos en un espacio métrico juegan un papel importante. La distancia en un espacio métrico, es lo que nos permite generalizar la noción de conjunto abierto.

Definición. Sea *V* un conjunto contenido en un espacio métrico (U,*d*).

Punto interior. Un punto *p* ∈ *V*, es un punto interior de *V* si, y sólo si, existe una bola de radio *r* con centro en *p* totalmente contenida en *V*.

$$p \text{ es punto interior de } V \iff \exists r > 0 \text{ tal que } B_r(p) \subset V$$

Interior de un conjunto. Se llama interior de un conjunto *V*, al conjunto de todos sus puntos interiores y se denota:

int*V* = {*p*∈V | *p* es punto interior de *V*}

Conjunto abierto. Se dice que un conjunto *V* es abierto, cuando es igual a su interior:

$$V = int\mathrm{V}$$

El conjunto vacío es abierto.

Toda bola abierta, es un conjunto abierto. Porque si tenemos $B_r(u_0)$, y tomamos cualquier $v \in B_r(u_0)$, existe $\delta = r - d(u_0, v) > 0$, tal que $B_\delta(v) \subset B_r(u_0)$.

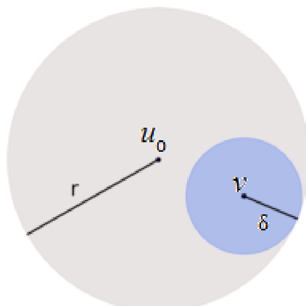


Figura 15. Bola abierta como conjunto abierto

En efecto, pues si w es cualquier punto en $B_\delta(v)$, entonces $d(v, w) < \delta$; además, por la desigualdad del triángulo se tiene: $d(u_0, w) \le d(u_0, v) + d(v, w)$; entonces:

$$d(u_0, w) \le d(u_0, v) + d(v, w) < d(u_0, v) + \delta = d(u_0, v) + r - d(u_0, v) = r$$

Y, por tanto $w \in B_r(u_0)$.

En un espacio métrico, dos puntos distintos *x,* y siempre son centro de dos bolas ajenas.

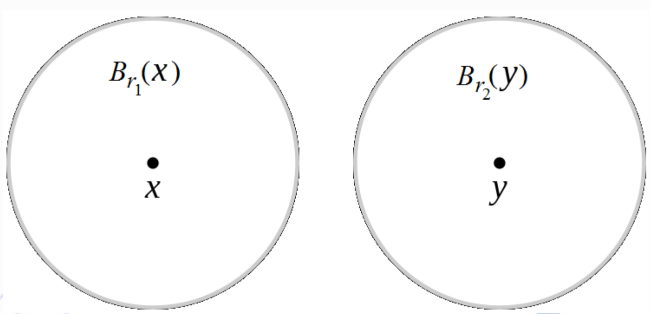


Figura 16. Puntos métricos en dos puntos distintos

Teorema. **Propiedad de Hausdorff**. Sea (U, *d*) un espacio métrico, *u*, *v* ∈ U con *u* ≠ *v*; entonces, existen $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ tales, que $\mathrm{B}_{r_1}(u) \cap \mathrm{B}_{r_2}(v) = \emptyset$.

Para la demostración, basta considerar $r = d(u, v)$, $r_1 = r_2 = r/2$.

Lema. En un espacio métrico (U, d), la intersección de dos bolas abiertas, es un conjunto abierto.

Si las bolas son ajenas, es inmediato. Si se tienen las bolas $B_r(u)$ y $B_s(v)$ y $w \in B_r(u) \cap B_s(v)$, bastará tomar $\delta < \min\{r - d(w, u), s - d(w, v)\}$, para que $B_\delta(w) \subset B_r(u) \cap B_s(v)$.

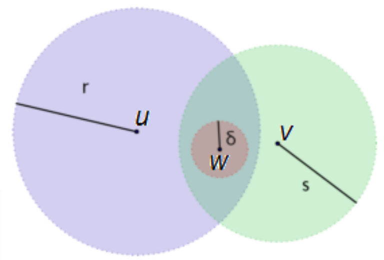


Figura 17. bolas métricas

Es bueno que tengas presente que la condición de un conjunto de ser abierto, depende de la métrica usada y del universo. Por ejemplo el conjunto $\{0\} \subset \mathbb{R}$ es abierto con la métrica discreta, pero no lo es con la métrica dada por la distancia usual en los números reales, $d(x, y) = |x - y|$.

Propiedades de conjuntos abiertos. Vamos a denotar con $\mathcal{T}$ a la colección de todos los conjuntos abiertos en un espacio métrico (U, d), y con I cualquier conjunto de índices. En (U, d) se satisfacen las siguientes propiedades:

1. El vacío y el universo, son conjuntos abiertos: $\emptyset$, U $\in \mathcal{T}$.
2. La **unión arbitraria de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto**:

$$\text{Si } \alpha \in I, A_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$$

3. La **intersección finita de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto**:

$$\text{Si } A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

A cualquier familia de subconjuntos abiertos de un conjunto *X* que cumpla las tres propiedades anteriores, se le llama **topología** sobre *X*.

A la familia de todos los subconjuntos abiertos de un espacio (U, *d*), se le llama **topología asociada a la distancia *d***, y se denota $\mathcal{T}_{\mathrm{d}}$, o simplemente $\mathcal{T}$ si no hay con función con la métrica utilizada.

Proposición. En un espacio métrico (U, *d*), un conjunto V ⊂ U es abierto si, y sólo si puede expresarse como unión de bolas abiertas.

Demostración. Si V es un abierto, para cada $v \in \mathrm{V}$, existe un $r_v > 0$ tal, que $B_{r_v}(v) \subset \mathrm{V}$ y, por tanto,

$$\bigcup_{v \in V} B_{r_v}(v) \subset \mathrm{V}\,.$$

Y como cada punto $v \in V$, está en una de las bolas, $\mathrm{V} \subset \bigcup_{v \in V} B_{r_v}(v)$. Y, de las dos contenciones, concluimos que:

$$\mathrm{V} = \bigcup_{v \in V} B_{r_v}(v).$$

El recíproco es inmediato, ya que si V se puede expresar como unión de bolas abiertas, cada punto en V está en una de tales bolas y puede construirse una bola con centro en dicho punto, contenida en V, por lo que todo punto en V, será punto interior de V.

Una métrica, también permite definir conjunto acotado.

Definición. **Conjunto acotado**. Sea (U, *d*) un espacio métrico. Decimos que un conjunto $V \subset$ U, es acotado, si podemos encerrar a *V* en una bola abierta; es decir, si existe r > 0, tal que V ⊂ $B_r(\mathbf{0})$.

Es inmediato de la definición, que *V* es acotado si, y sólo si, para todo *v* en V, *d*(**0**, *v*) < r, para algún r > 0.

Conjuntos cerrados

Habiendo generalizado la noción de conjunto abierto, procede generalizar la de conjunto cerrado.

Definición. Sea (U, *d*) un espacio métrico, V ⊂ U. Decimos que V es un conjunto cerrado si, y sólo si, su complemento es abierto:

V es cerrado ⇔ V^c = U – V es abierto

Toda bola cerrada, es un conjunto cerrado. En efecto, consideremos la bola:

$$\overline{B_r}(v_0) = \{u \in U \mid d(v_0, u) \leq r\}$$

Su complemento:

$$\left(\overline{B_r}(v_0)\right)^c = \{u \in U \mid d(v_0, u) > r\}$$

es abierto. Basta tomar como radio $s = \frac{d(u, \overline{B_r}(v_0))}{2}$, para que se cumpla que si $u \in \left(\overline{B_r}(v_0)\right)^c$, entonces $B_s(u) \subset \left(\overline{B_r}(v_0)\right)^c$.

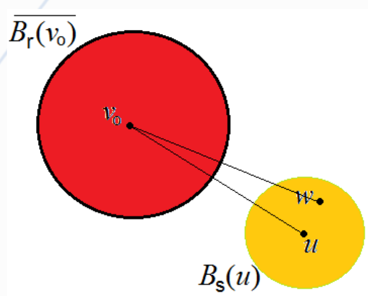


Figura 18. Bola cerrada

Propiedades de conjuntos cerrados. Sea (U, *d*) un espacio métrico. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
2. La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

En relación con los conjuntos cerrados, se tienen las siguientes definiciones.

Definición. Sea (U, *d*) un espacio métrico, V ⊂ U.

Punto frontera

Decimos que *p* ∈ U, es un punto frontera de V, si toda bola con centro en *p* contiene puntos de V y puntos de U que no están en V:

$$p \text{ es punto forntera de } V \Leftrightarrow \forall r > 0, B_r(p) \cap V \neq \emptyset \text{ y } B_r(p) \cap V^c \neq \emptyset$$

Frontera de un conjunto

La frontera de V, es el conjunto de todos los puntos frontera de V, y se denota:

∂V = {*p* ∈ U | *p* es punto frontera de V}

Cerradura de un conjunto

La cerradura de V, es el conjunto unión su frontera, y se denota:

$$\bar{V} = V \cup \partial V$$

Punto de acumulación

Un punto *q* ∈ U, es punto de acumulación de V, si toda bola agujerada con centro en *q* contiene elementos de V:

$$q \text{ es punto de acumulación de } V \Leftrightarrow \forall r > 0, {B_r}^o(q) \cap V \neq \emptyset$$

El conjunto de puntos de acumulación de un conjunto V, se denota:

V' = {*q* ∈ U | *q* es punto de acumulación de V.

Si V es un subconjunto de un espacio métrico (U, *d*), entonces se verifica que:

V es cerrado

a) $\Leftrightarrow V = \bar{V}$

b) $\Leftrightarrow V' \subset V$

c) $\Leftrightarrow \partial V \subset V$

Es pertinente hacer la observación de que hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$, con la métrica usual o euclidiana, el conjunto de puntos en el intervalo [0, 1) no es ni abierto porque no todos sus puntos son puntos interiores, el 0 es un elemento del intervalo y no es un punto interior; y, tampoco es cerrado, porque 1 es un punto de acumulación que no pertenece al intervalo.

Como has notado, dos métricas pueden genera distintas topologías (distintos conjuntos abiertos) en un mismo espacio. Las métricas que generan los mismos conjuntos abiertos en un espacio, se llaman métricas equivalentes.

Definición. **Distancias o métricas equivalentes**. Sean d y d' dos métricas en un espacio U. Decimos que d y d' son equivalentes, si generan los mismos conjuntos abiertos en U; es decir, las dos distancias generan la misma topología, $\mathcal{T}_{d} = \mathcal{T}_{d'}$.

No siempre ocurre que dos distancias generan la misma topología. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, con la métrica discreta, d_D, un conjunto que consta de un solo punto {(*x*, *y*)} es abierto; pero, con la métrica usual o euclidiana, el conjunto {(*x*, *y*)} no es abierto.

El siguiente resultado nos permite establecer condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo dos métricas definen la misma topología en un espacio métrico.

Teorema. Sean d y d' dos distancias definidas en un espacio métrico U. Entonces:

d y d' son equivalentes $\Leftrightarrow \forall u \in U$ y $\forall r > 0$, existen $\delta > 0$ y $\delta' > 0$ tales que:

$$B_{d_\delta}(u) \subset B_{d'_r}(u) \quad \text{y} \quad B_{d'_{\delta'}}(u) \subset B_{d_r}(u)$$

Cierre de la unidad

En esta unidad has aprendido:

- Los teoremas de completitud de los números reales. Esto te será de gran utilidad en las siguientes unidades que estudiaremos las condiciones bajo las cuales un espacio métrico es completo.
- Las propiedades de un espacio vectorial euclidiano, un espacio vectorial normado y un espacio vectorial métrico. Así como la herramienta topológica básica para continuar tus estudios.

Para saber más

Consulta las siguientes ligas.

- Este sitio web: Lasmatemáticas.es, contiene un listado de videos relacionados a la topología: http://www.youtube.com/playlist?annotation_id=annotation_473177&feature=iv&list=PL91053E26803C7E65&src_vid=Vqkgz5kf5IM

- Si te interesa profundizar en el estudio de los subespacios vectoriales, en la siguiente liga encontraras varios videos que explican algunos de sus aspectos y una amplia gama de problemas relacionados:
- Las matemáticas.es (s.f.). Espacios vectoriales. Recuperado de https://www.dmae.upct.es/~juan/videosfund/ev.htm

  Se trata de un sitio a cargo del Departamento de Matemáticas Aplicadas y Estadística de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de la Universidad Politécnica de Cartagena.

Fuentes de consulta

Básica

- Bartle, R. G. (1964) *The Elements of Real Analysis*, New York: J. Wiley.
- Bartle, R. G., Sherbert D. R. (1984) *Introducción al Análisis Matemático de una variable*, Limusa.
- Dieudonné, J. (1968) *Éléments d'analyse*, Paris: Gauthier-Villars.
- Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. (1975) *Introductory Real Analysis*, New York: Dover.
- Royden, H. L. (1988) *Real Analysis*, New York: Macmillan.
- Rudin, Walter. (1965) *Principles of Matematical Analysis*, New York: McGraw-Hill.
- T. M. Aopostol. (1976) *Análisis Matemático*, Reverté, S.A.