MATEMÁTICAS

SEXTO SEMESTRE

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

INFORMACIÓN GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Clave
005143631/06143631

Universidad Abierta y a Distancia de México

DCEIT

Índice

Presentación

El Análisis Matemático, es una rama de las matemáticas relativamente nueva. Nace en el siglo XIX, cuando el cálculo diferencial e integral estaba ya bastante desarrollado. Posteriormente surgieron nuevas y diferentes ramas de las matemáticas, al mismo tiempo que se descubrieron nuevos resultados y campos de aplicación, enriqueciendo y profundizando los conceptos existentes del cálculo.

Los matemáticos de la época advirtieron, por un lado, que sus fundamentos no eran tan sólidos, y por otro, que podían extenderlos y generalizarlos. Matemáticos como Lagrange y Cauchy precisaron las definiciones de límite, continuidad e integral. El matemático checo Bolzano, contribuyó notablemente al estudio de las funciones continuas y el alemán Karl Weierstrass introdujo el rigor y la formalidad científica, que hoy lo ubican como el padre del Análisis Matemático moderno.

Para el estudio de las funciones continuas, se hizo necesario profundizar en el entendimiento de la naturaleza y propiedades de los números reales. Sin embargo, su estudio requería comprender las funciones discontinuas a partir de las cuales surgen las funciones continuas como límite de funciones, ello sin saber de antemano si la función límite sería continua o no.

Así, el surgimiento y desarrollo del Análisis Matemático tiene una motivación abstracta, ligada a lograr una mayor comprensión de las matemáticas en sí mismas. Aunque también tienen una motivación real y objetiva, vinculada al entendimiento, resolución de problemas y retos que se plantea la humanidad para comprender mejor el universo que nos rodea.

El Análisis Matemático, además de tener aplicaciones en otras ramas de las matemáticas, como son ecuaciones diferenciales, teoría de conjuntos y probabilidad, tiene aplicaciones en otras ciencias como la física, la química, la biología, la astronomía o la economía, ligadas al establecimiento de leyes generales del comportamiento de la naturaleza, del hombre y a la solución de problemas científicos, tecnológicos y sociales muy concretos.

Por ejemplo, un conjunto de puntos puede representar diferentes cosas: un conjunto de funciones, donde cada elemento es una función; un conjunto de colores donde cada punto es un color, o un conjunto de personas, donde cada punto es una persona. La continuidad de una función puede representar la continuidad de la transmisión del sonido, la continuidad de una corriente de agua, de un flujo eléctrico o del paso del tiempo en un período dado.

Al observar las similitudes de los casos particulares, surge la idea de enfocarse en los aspectos afines. Mediante representaciones abstractas o modelos se logra hacer a un lado la información particular, lográndose delimitar los problemas comunes para su posterior estudio y solución.

Por lo anterior, esta unidad didáctica exige que desarrolles tu capacidad de abstracción para lograr un buen entendimiento. También es importante tener en cuenta que, para el estudio de esta unidad didáctica, necesitas manejar los resultados del cálculo diferencial e integral, de una y de varias variables y lo que aprendiste en tu curso de Análisis Matemático I.

La unidad didáctica se imparte en el sexto semestre de la Licenciatura en Matemáticas.

El curso consta de cuatro unidades. En la primera se estudia el Teorema de Aproximación de Weierstrass. En la segunda se define una nueva integral, la de Riemann-Stieljes, aprenderás sus propiedades y las diferencias y similitudes respecto de la integral de Riemann clásica. En la tercera unidad se presentan las nociones básicas de la teoría de la medida y en particular la definición de medida de Lebesgue que te será de utilidad para entender la definición de Integral de Lebesgue, el tema a tratar en la unidad cuatro.

Conocimientos previos

Análisis matemático I (Sucesiones de funciones, convergencia puntual de sucesiones de funciones y convergencia uniforme de sucesiones de funciones), Cálculo de una y varias variables (Integral de Riemann) y Álgebra Lineal. Conocimientos básicos de álgebra lineal (aplicaciones lineales, matrices y determinantes) y de geometría euclídea.

Información general de la unidad didáctica

Competencia general

Desarrollar la teoría de integrabilidad para resolver una variedad más amplia de problemas matemáticos, así como conocer sus aplicaciones directas a otras ramas de la matemática y otras ciencias mediante el dominio de los métodos matemáticos de la Teoría de la Medida.

Competencias específicas

Unidad 1: Aplicar el Teorema de Weierstrass para comprender que toda función real continua es límite uniforme de una sucesión de polinomios, utilizando las definiciones y propiedades de sucesiones, convergencia y continuidad.

Unidad 2: Aplicar las propiedades de la integral de Riemann- Stieljes para resolver problemas de integración mediante la comparación con la Integral de Riemann clásica.

Unidad 3: Analizar el concepto de medida para clasificar conjuntos en $\mathbb{R}$ mediante la utilización de sus propiedades.

Unidad 4: Aplicar el concepto de integral de Lebesgue para calcular integrales sobre dominios no tradicionales mediante la identificación de sus características.

Logros

Unidad 1.

- Asimilar los resultados más importantes sobre series de números.
- Identificar las hipótesis del Teorema de Weierstrass
- Demostrar el Teorema de Weierstrass
- Aplicar el Teorema de Weierstrass

Unidad 2.

- Comparar integral de contra integral de Riemann.
- Resolver problemas utilizando integración por partes.
- Resolver problemas utilizando el Teorema de Cambio de Variable.

Unidad 3

- Identificar las propiedades de la medida de Lebesgue.
- Clasificar conjuntos en R.

Unidad 4.

- Definir la integral de Lebesgue.
- Comparar la integral de Lebesgue con los conceptos previos de medida y de integral de Riemann.
- Establecer propiedades básicas de la integral de Lebesgue.

Información general de la unidad didáctica

Competencias transversales

Comunicación

- Capacidad de comunicación oral y escrita.

Gestión de información

- Capacidad de investigación
- Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.
- Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de diversas fuentes.

Pensamiento crítico

- Capacidad de actuar ante nuevas situaciones.
- Capacidad crítica y autodidacta.
- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.

Trabajo colaborativo

- Capacidad para trabajar en equipo.
- Capacidad de formular y gestionar proyectos.

Solución de problemas y toma de decisiones

- Capacidad creativa
- Capacidad para la toma de decisiones.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Capacidad de organizar y planificar el tiempo.
- Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica.

Información general de la unidad didáctica

Relación con el perfil de egreso

El perfil de egreso de la Unidad didáctica de Análisis Matemático te ayuda a modelar situaciones matemáticas que pueden ser utilizados en diferentes disciplinas que se relacionan con el área matemática. Asimismo, sabrás utilizar esos conceptos matemáticos para describir situaciones y problemas concretos.

Relación con otras unidades didácticas

La relación más estrecha del análisis matemático I y Análisis matemático II tiene que ver con la teoría de la probabilidad, los campos de la Física, Álgebra y Geometría.

Temario

Unidad 1. Aproximación de funciones continuas

1.1Series de números

1.1.1. Series convergentes

1.1.2. Series absolutamente convergentes

1.1.3. Criterios de convergencia

1.1.4. Reordenamientos

1.2. Aproximación de funciones

1.2.1. ¿Qué es aproximar funciones?

1.2.2. Funciones continuas extrañas

1.3. Teorema de aproximación de Weierstrass

1.3.1. Enunciado, demostración y consecuencias notables

1.3.2. Algunas generalizaciones

Unidad 2. Integral de Riemann Stieljes

2.1. Antecedentes

2.1.1. Definición de la Integral de Riemann-Stieljes. Notación

2.1.2. Propiedades

2.1.3. Integración por partes

2.2. Teorema de cambio de variable

2.2.1. Enunciado y demostración del teorema

2.2.2. Aplicaciones

Unidad 3. Conceptos preliminares de Teoría de la Medida

3.1. Antecedentes

3.1.1. Medidas y conjuntos medibles

3.1.2. Definición de medida de Lebesgue. Propiedades

3.1.3. Conjunto Lebesgue medibles

3.2. Funciones medibles

3.2.1. Algunas aplicaciones

Unidad 4. Integral de Lebesgue

4.1. antecedentes

4.1.1. Definición de la integral de Lebesgue

4.1.2. Propiedades

4.1.3. Comparación contra la integral de Riemann

4.2. integral de Lebesgue de una función acotada sobre un conjunto de medida finita

4.2.1. Lema de Fatou

Metodología

En esta unidad didáctica, trabajarás contenidos que involucran aspectos teóricos y prácticos los cuales te permitirán desarrollar el conocimiento analítico. La metodología de trabajo consiste en lograr el aprendizaje a través de la reflexión de ideas matemáticas, la resolución de problemas y la práctica constante mediante ejercicios dirigidos y puntuales en su temática. Posteriormente a la exposición de los resultados teóricos, y en ocasiones previo a ello, se verán ejemplos que motiven, contextualicen y refuercen el concepto teórico en cuestión. Todo esto, en beneficio de una óptima comprensión e integración de los temas y subtemas que conforman a las unidades del curso.

Las actividades propuestas en cada una de las unidades están formadas por ejercicios y problemas, en los que deberás aplicar tus conocimientos adquiridos. Recuerda que si en algún momento te resulta complicado obtener la solución de algún ejercicio o problema puedes consultar a tu figura académica, quien te apoyará en tus necesidades, retroalimentándote con información y buenas sugerencias según sea la situación.

Esquema de evaluación

La evaluación del aprendizaje es un proceso, a través del cual se observa, recoge y analiza información relevante del proceso de aprendizaje de los estudiantes, con la finalidad de reflexionar, emitir juicios de valor, así como tomar decisiones pertinentes y oportunas para optimizarlo (Díaz Barriga A.F. & Hernández R.G., 2005). Orienta la toma de decisiones, da pauta a determinar acciones en términos de valoración de conocimientos, nivel del desempeño, reorientaciones de aprendizaje, mejora del proceso educativo y adecuación de actividades, entre otras acciones.

De acuerdo con lo anterior, mediante la evaluación te brindaremos apoyo y seguimiento para identificar las dificultades en el desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes del proceso integral de aprendizaje.

En el marco del Modelo educativo de la UnADM, la evaluación de la unidad didáctica se realiza en los siguientes momentos:1) formativa y 2) sumativa.

Evaluación formativa

Se realiza en paralelo al desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de cada unidad, y sirve para localizar dificultades cuando aún estás en posibilidad de remediarlas.

En este primer momento de evaluación, se aplican estrategias asociadas a las:

Actividades individuales (tareas). Se trata de un primer momento de aprendizaje, en el cual se consideran tus perspectivas, experiencias, intereses, capacidades y necesidades.

Actividades colaborativas (foros). El trabajo colaborativo fomenta y promueve el aprendizaje en contribución con otros compañeros, ya que eres responsable no sólo de tu aprendizaje, sino de contribuir a que los demás aprendan en equipo y se fomente un ambiente de confianza; por ende, que se logren las metas de aprendizaje

Evaluación sumativa

Se aplica al final del proceso de tu experiencia de aprendizaje, su propósito es verificar los resultados alcanzados y el grado de aprendizaje o nivel de conocimientos, habilidades y actitudes que hayas adquirido.

Este segundo y último momento de evaluación, se mide y valora a través de las siguientes actividades:

Evidencias de aprendizaje. Son actividades que tienen como objetivo integrar el proceso de construcción de tu aprendizaje, la evaluación, la retroalimentación y la planeación de la nueva ruta de aprendizaje que seguirás de acuerdo con los resultados individuales obtenidos.

Actividad complementaria. Esta actividad es planeada por la figura académica considerando las competencias y logros de la unidad didáctica, toda vez que identifica los conocimientos, habilidades y actitudes que te hizo falta desarrollar o potenciar (se realiza en una ocasión al finalizar la última unidad).

Actividad de reflexión. Es un ejercicio de metacognición que permite que tomes conciencia de tu proceso de aprendizaje, el punto de partida son las experiencias del contexto académico y la reflexión sobre tu desempeño. Se trata de una acción formativa que parte de tu persona y no del saber teórico, que considera tu experiencia de aprendizaje (se realiza en una ocasión al finalizar la última unidad).

A continuación, se presenta el esquema general de evaluación correspondiente a esta unidad didáctica:

Esquema general de evaluación		
Tipo de evaluación	**Actividades**	**Puntaje**
Formativa	Actividades individuales	30%
	Actividades colaborativas	10%
Sumativa	Evidencias de aprendizaje	40%
	Actividad complementaria	10%
	Actividad de reflexión	10%
Total		**100**

Recuerda que la calificación final que te permitirá acreditar se asigna de acuerdo con los criterios e instrumentos de evaluación establecidos para cada actividad, los cuales son diseñados con base en las competencias y logros de esta unidad didáctica.

Fuentes de consulta

Básica

- Apostol, Tom. (1981). Mathematical Analysis. USA: Addison Wesley.
- Bartle, R. (1980). Introducción al Análisis Matemático. México: Limusa.
- Bartle, R. (1984). Introducción al Análisis Matemático de una variable. México, D. F.: Limusa.
- Charalambos, D. (1998). Principles of Real Analysis. USA: Academic Press.
- De Barra, G. (2000). Measure Theory and Integration. India: New Age International.
- Folland, G. B. (1999). Real Analysis: Modern Techniques and their Applications. USA: Wiley.
- Galaz, F. (2002). Medida e Integral de Lebesgue en. México: University Press.
- Grabinsky, G. (1997). La función continua no diferenciable de Weierstrass. Recuperado de https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.a982a5fc75ae0162.67726162696e736b792e706466.pdf
- Grabisnky, G. (2011). Teoría de la Medida. México: Facultad de Ciencias UNAM.
- Halmos, P. R. (1991). Measure Theory. USA: Springer Verlag.
- K. Weierstrass. (1885). Uber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Vernderlichen. Sitzungsberichte der Kniglich Preuischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 663-689 und 789-805.
- M. H. Stone. (1937). Applications of the thoery of Boolean rings to general topology. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 41, No. 3, 375-481.

- Montalvo, F. (2003). El Teorema de Stone-Weierstrass. En Cálculo Diferencial e Integral en varias variables (págs. 31-38). Extremadura, España. Recuperado de http://matematicas.unex.es/~montalvo/Analisis_Varias_Variables/apuntes/indice.pdf

- Murillo, R. (1997). El teorema de aproximación de Weierstrass. Recuperado de https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.9da3c5dad16cc1fe.6d7572696c6c6f2e706466.pdf

- Protter, M. (1991). Basic Elements of Real Analysis. USA: Springer Verlag.

- Royden, H. L. (1988). Real Analysis. New York: Macmillan.

- Royden, H; Fitzpatrick, P. (2010). Real Analysis. USA: Pearson.

- Rudin, W. (1980). Principios de Análisis Matemático. México: Mc Graw Hill.

- Sánchez, C; Valdés, C. (2004). De los Bernoulli a los Bourbaki. España: Nivola.

- Schram, M. (1996). Introduction to Real Analysis. USA: Prentice Hall

- Vargas C. (1997). Origen y desarrollo del teorema de aproximación de Weierstrass.