MATEMÁTICAS

SEXTO SEMESTRE

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

UNIDAD 1. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS

Clave
005143631/06143631

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Presentación de la unidad

Uno de los objetivos fundamentales del Análisis Matemático es el estudio de los procesos de aproximación. En ciertos casos la intención es acercarse a un objeto matemático (una función, un número, un conjunto, etc.) por medio de otros objetos "más simples" –más manejables o más conocidos- esperando que el objeto original herede algunas de las propiedades de los objetos de aproximación o al menos que el límite que está detrás del proceso de aproximación permita manipular mejor al primer objeto, que lo vuelva más cercano.

En tus cursos de cálculo aprendiste que hay funciones que pueden aproximarse mediante los polinomios de Taylor, sin embargo, no todas las funciones diferenciables admiten una aproximación de esta manera. Idealmente lo que se desea es aproximar una función continua cualquiera mediante una función polinomial. Los polinomios significan muchas ventajas para la representación en aproximación numérica, interpolación y modelación geométrica. Y han demostrado ser extremadamente útiles en la implementación de estrategias de cálculo digital.

En esta Unidad estudiarás el Teorema de Aproximación de Weierstrass, resultado esencial al buscar la mejor aproximación polinomial de una función continua.

Previamente, abordaremos el tema de series de números, cuyos resultados serán de gran ayuda para el buen entendimiento y manejo de resultados ulteriores.

Competencia específica

Aplicar el Teorema de Weierstrass para comprender que toda función real continua es límite uniforme de una sucesión de polinomios, utilizando las definiciones y propiedades de sucesiones, convergencia y continuidad.

Logros

- Asimilar los resultados más importantes sobre series de números.
- Identificar las hipótesis del Teorema de Weierstrass.
- Demostrar el Teorema de Weierstrass.
- Aplicar el Teorema de Weierstrass.

1.1. Series de números

Una serie es una suma $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, con una cantidad infinita de sumandos.

Formalmente la escribimos como $\lim_{n\to\infty}(a_1 + \cdots + a_n)$. Cómo sabes, un límite puede existir o no. Por esta razón, hay series convergentes y divergentes. Aprender a distinguirlas será nuestra principal motivación.

1.1.1. Series convergentes

A partir de una sucesión (a_n) de números reales, podemos generar una nueva sucesión (s_n):

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2, \cdots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \cdots$$

Los números s_n son llamados **sumas parciales** de la serie $\sum a_n$.

A su vez, el sumando a_n es el $\boldsymbol{n}$ **−ésimo** término (por el lugar que ocupa). También se le llama **término general** de la serie.

Definición. Si el límite $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ existe, diremos que la serie $\sum a_n$ es **convergente**, y definimos a $s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, como la **suma de la serie**.

Si el límite no existe, diremos que $\sum a_n$ es una serie **divergente**.

Veamos algunos ejemplos. Presta mucha atención, ya que aportarán resultados que más adelante citaremos y/o aplicaremos.

Ejemplo. La serie geométrica $1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$, es convergente cuando $|a| < 1$, y su suma es ${}^{1}/_{(1-a)}$. De inicio consideremos $0 < a < 1$, observa que las sumas parciales $s_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$, cuyo término general es $s_n = {}^{(1-a^{n+1})}/_{(1-a)}$, son estrictamente crecientes (i.e. $s_{n-1} < s_n$), y acotadas dado que $s_n < {}^{1}/_{(1-a)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además,

$$\lim_{n\to\infty}\left({}^{1}/_{(1-a)} - s_n\right) = \lim_{n\to\infty} {}^{a^n}/_{(1-a)} = 0,$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim\ (1 + a + a^2 + \cdots + a^n) = {}^{1}/_{(1-a)}$$

Los cálculos anteriores también son válidos si $-1 < a < 1$. Ya que $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ si $|a| < 1$, puesto que $\lim\ |a|^n = 0$ si y sólo si $\lim\ a^n = 0$.

Ejemplo. La serie $1 + 1 + {}^{1}/_{2!} + \cdots + {}^{1}/_{n!} + \cdots$, es convergente y su suma es el número e.

En efecto, las sumas parciales $s_n = 1 + 1 + {}^{1}/_{2!} + \cdots + {}^{1}/_{n!}$ son crecientes. Además, están acotadas, ya que

$$2 \leq s_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 3,$$

Para comprobar que están acotadas, sólo observa que $2 \leq s_n$ y si hacemos

$$u_n = 1 + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{2^2} \cdots + {}^{1}/_{2^n}$$

podemos aplicar lo visto en el Ejemplo 1,

$$u_n = \frac{1 - ({}^{1}/_{2})^{n+1}}{1 - {}^{1}/_{2}} = 2 - {}^{1}/_{2^n} \, ,$$

De donde se sigue que $s_n = 1 + u_n = 3 - {}^{1}/_{2^n}$, y por lo tanto $s_n < 3$. Finalmente, por un resultado visto en tu curso anterior, sabes que toda sucesión creciente y acotada es convergente, de modo que el límite existe, y lo escribimos como $e = \lim_{n\to\infty} s_n$.

El número $e = 2.7182 \ldots$ es una de las constantes más importantes para muchas ramas de las matemáticas, y especialmente para el Análisis matemático.

Ejemplo. La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, que tiene por término general $(-1)^{n+1}$, es divergente ya que la suma parcial s_n es cero si n es un número par, e igual a 1 si n es impar. Luego, hay dos subsucesiones de sumas parciales que convergen a límites distintos, y por los criterios de convergencia y divergencia de sucesiones, no existe $\lim s_n$.

Ejemplo. La serie $\sum {}^{1}/_{n(n+1)}$, con término general $a_n = 1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$, tiene como n –ésima suma parcial

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Luego $\lim\ (s_n) = 1$, y entonces $\sum {}^{1}/_{n(n+1)} = 1$.

En una serie $\sum a_n$, si $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, las sumas parciales de la serie $\sum a_n$ forman una sucesión creciente. Y por lo tanto, una serie $\sum a_n$ cuyos términos no son negativos, converge si y sólo si existe una constante k tal que $a_1 + \cdots + a_n \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por esta razón, se acostumbra utilizar la notación $\sum a_n \leq +\infty$ para señalar que la serie $\sum a_n$, con $a_n \geq 0$, es convergente.

Observación. Si $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y (a'_n) es una subsucesión de (a_n), entonces $\sum a_n \leq +\infty$ implicará que $\sum a'_n \leq +\infty$.

Ejemplo. La **serie armónica** $\sum {}^{1}/_{n}$ es divergente. En efecto, razonemos del siguiente modo:

Supongamos por un momento que la serie es convergente, i .e. $\sum \frac{1}{n} = s$, entonces $\sum \frac{1}{2n} = t$ sería convergente y $\sum \frac{1}{2n-1} = u$ también. Ahora bien, comprobar que $s_n = t_n + u_n$, no es muy complicado (sólo desarróllalo para las sumas parciales y lo verás). Luego, haciendo que $n \to \infty$ tendríamos que $s = t + u$. Sin embargo, $t = \sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = \frac{s}{2}$; y por lo tanto $u = t = \frac{s}{2}$.

A su vez, se cumple que

$$u - t = \lim_{n \to \infty} (u_n - t_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}\right) > 0$$

Lo que significa que $u > t$. Esta desigualdad establece una contradicción con la hipótesis, luego entonces la serie armónica es divergente.

Teorema 1. **Criterio de comparación**.- Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series cuyos términos son mayores o iguales a 0. Si existen $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $a_n \leq cb_n$ para todo $n > n_0$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la de $\sum a_n$, mientras que la divergencia de $\sum a_n$ implica la de $\sum b_n$.

Demostración.

Bajo las condiciones de la hipótesis del teorema, la desigualdad $a_n \leq cb_n$ se cumplirá para casi todos los valores de $n \in \mathbb{N}$, salvo en una cantidad finita de términos, para los cuales no podemos asegurar nada. Sin embargo, a partir de c podemos generar otro valor que satisfaga la desigualdad para todo $n \in \mathbb{N}$, por ejemplo $c' = c + {}^{a_1}\!/_{b_1} + \cdots + {}^{a_{n_0-1}}\!/_{b_{n_0-1}}$.

Así que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_n \leq cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La idea del argumento demostrativo es el siguiente: Supongamos que la segunda serie converge, luego por la desigualdad anterior, tendríamos que la segunda serie (creciente) estaría acotada superiormente (por un múltiplo del límite de la segunda serie) y por lo tanto la primera también sería convergente. Por otro lado, si la primera serie fuera divergente, tendríamos que la segunda serie nunca podría alcanzar un límite, en virtud de la desigualdad de la hipótesis.

La argumentación anterior, aunque intuitiva es perfectamente válida, de hecho suele ser lo que detona el argumento formal: Las sumas parciales s_n y t_n, de $\sum a_n$ y $\sum b_n$ respectivamente, determinan sucesiones crecientes tales que $s_n \leq ct_n$ para todo $n > n_0$. Y dado que $c > 0$, el que

(t_n) sea acotada implica que (s_n) también lo sea, y si (s_n) no es acotada entonces (t_n) tampoco lo será, pues $t_n \geq s_n/c$.

Ejemplo. Si $r > 1$, la serie $\sum {}^1/_{n^r}$ es convergente.

Veamos porque, sea c la suma de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}({}^2/_{2^r})^n$. Probaremos que toda suma parcial s_n de la serie $\sum \frac{1}{n^r}$ es menor que c. En efecto, sea n tal que $m \leq 2^n - 1$.

Luego,

$$s_m \leq 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) +$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^r} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^r}\right) ,$$

$$s_m < 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^r} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2^r}\right)^i < c$$

Dado que la serie armónica es divergente, y al aplicar el criterio de comparación obtendremos que $\sum \frac{1}{n^r}$ diverge también si $r > 1$, ya que ${}^1/_{n^r} > {}^1/_{n}$.

Teorema 2. El término general de una serie convergente tiene a cero cómo límite.

Demostración.

Si la serie $\sum a_n$ converge, al hacer $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, tendremos que $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ existe. Ahora, considera la sucesión (t_n) tal que $t_1 = 0$ y $t_n = s_{n-1}$. Luego, $\lim t_n = s$ y $s_n - t_n = a_n$. Por lo que $\lim a_n = \lim\ (s_n - t_n) = \lim\ (s_n) - \lim\ (t_n) = s - s = 0$.

1.1.2. Series absolutamente convergentes

Definición. Una serie $\sum a_n$ se define como **absolutamente convergente** cuando $\sum |a_n|$ converge.

Ejemplo. Si los términos de una serie convergente son todos del mismo signo, la serie misma será absolutamente convergente.

Ejemplo. Si $-1 < a < 1$, entonces la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ es absolutamente convergente, ya que $\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$ es una serie geométrica, y $|a^n| = |a|^n$ siempre que $-1 < a < 1$.

Ejemplo. Veamos ahora un ejemplo de una serie convergente que no es absolutamente convergente: $\sum_{n=0}^{\infty} {(-1)^{n+1}}/{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.
Si en esta serie tomamos la suma de los valores absolutos, resulta la serie armónica, que sabemos diverge. A su vez, la convergencia de la original, resultará del teorema siguiente.

Teorema 3. (Leibniz). Si (a_n) es una sucesión monótona decreciente que tiende a cero entonces $\sum (-1)^{n+1} a_n$ es una serie convergente.

Demostración.

Si $s_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$. Tendremos que $s_{2n} = s_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n}$, y $s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$. Observamos entonces, que las sumas parciales con índice par forman una sucesión creciente (ya que $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$), a su vez las de índice impar forman una sucesión decreciente (ya que $-a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0$). Por otro lado $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$, de modo que $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \geq 0$.

De lo anterior se sigue, que

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1$$

Asimismo $s_{2n} = \lim s_{2n-1}$, ya que $\lim a_n = 0$. Y por lo tanto, (s_n) converge, quedando demostrado el teorema.

Ejemplo. A partir del Teorema 3, sabemos que la serie $\sum(-1)^{n+1} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es convergente.

Pero no es absolutamente convergente. Observemos que la n −ésima suma parcial de la serie $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$, es

$$s_n = \log 2 + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \log 2 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \cdots + \log(n+1) - \log(n)$$
$$= \log(n+1).$$

Luego entonces, $\lim s_n = +\infty$.

Definición. Una serie convergente $\sum a_n$ tal que $\sum |a_n| = +\infty$, se llama **condicionalmente convergente**.

En una serie, ¿qué pasaría si cambiamos de manera arbitraria los signos de algunos términos?

O mejor aún, si el cambio de signo se hace sobre un subconjunto infinito de términos.

La intuición nos alerta sobre un resultado impredecible. Sin embargo, veremos que bajo ciertas premisas iniciales, no todo resulta caótico. De hecho, si la serie es convergente y los todos los términos son mayores o iguales a 0, entonces aunque se cambie el signo a una cantidad infinita de términos, obtendremos una serie convergente.

Teorema 4. Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Demostración.

Sea $\sum |a_n|$ una serie convergente. Para todo número natural n, vamos a definir los números p_n y q_n del siguiente modo:

$$p_n = \begin{cases} a_n, & si\ a_n \geq 0 \\ 0, & si\ a_n < 0 \end{cases}$$

$$q_n = \begin{cases} -a_n, & si\ a_n \leq 0 \\ 0, & si\ a_n > 0 \end{cases}$$

Los números p_n y q_n, los llamamos respectivamente, parte positiva y parte negativa de a_n. Observa que para cada $n \in \mathbb{N}$, al menos uno de los números p_n y q_n es cero.

Luego entonces, $(p_n\ , q_n \geq 0)$, $(p_n\ , q_n \leq |a_n|)$, $p_n + q_n = |a_n|$.

Finalmente, por el Teorema 1 las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son convergentes. Por lo que también será convergente la serie $\sum a_n = \sum(p_n - q_n) = \sum p_n - \sum q_n$.

Observa que si la serie $\sum a_n$, es condicionalmente convergente, obligadamente tenemos que $\sum p_n = +\infty$ y $\sum q_n = +\infty$. De otro modo, si sólo una de estas dos series fuese convergente, digamos la primera, tendríamos que $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n = a - \infty = -\infty$. Y si ambas son convergentes, tendríamos que $\sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n < +\infty$, luego la serie resultaría ser absolutamente convergente.

1.1.3. Criterios de convergencia

Teorema 5. Sea $\sum b_n$ una serie absolutamente convergente tal, que $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión (a_n/b_n) está acotada (sabemos que converge), entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

Demostración.

Si ocurre que para algún $c > 0$, se cumple $\left|{}^{a_n}/_{b_n}\right| \leq c$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$; entonces tendríamos que $|a_n| \leq c|b_n|$. Luego por el criterio de comparación (ver Teorema 1) la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

■

Corolario. (**Criterio de d'Alambert**) Sea $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si existe una constante c tal que $|\,a_{n+1}/a_n\,| \leq c < 1$ para todo n suficientemente grande (un caso particular, sería que $\lim\ |a_{n+1}/a_n\,| < 1$), entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

Demostración. Supongamos que para todo n suficientemente grande se cumple

$$|a_{n+1}/a_n| \leq c = {}^{c^{n+1}}/_{c^n}\,,$$

de modo que

$$|a_{n+1}|/_{c^{n+1}} \leq |a_n|/_{c^n}\,.$$

Afirmamos entonces, que la sucesión ${|a_n|}/{c^n} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decreciente a partir de un determinado índice, y por lo tanto está acotada. Luego, dado que la serie $\sum c^n$ es absolutamente convergente, y a partir del Teorema 5 deducimos que $\sum a_n$ converge absolutamente.

Para el caso particular, donde exista $\text{lím } |a_{n+1}|/|a_n| = L < 1$, elegimos un número c tal que $L < c < 1$, con esto tendremos que $|a_{n+1}|/|a_n| < c$ para todo n suficientemente grande (en virtud de un **Resultado*** clásico de límites). Con lo que estaremos en el caso ya demostrado.

[**Resultado***. En teoría de límites se estudió, que si $a = \lim x_n$ y si $b < a$, entonces para todo n suficientemente grande, se cumple $b < x_n$. Equivalentemente, si $a < b$, tendremos que $x_n < b$ para todo n suficientemente grande]

Generalmente, para calcular el $\text{lím } |a_{n+1}/a_n| = L$ es que aplicamos el Criterio de d'Alambert. En tal caso si $L > 1$, la serie será divergente, pues $|a_{n+1}/a_n| > 1$, de donde $|a_{n+1}| > |a_n|$ para todo n suficientemente grande, con lo que el término general a_n no tiende a cero. Por otro lado, si $L = 1$, el criterio como tal nada nos permite saber, ya que la serie bien puede ser convergente (caso $\sum {1}/{n^2}$) o divergente (caso $\sum {1}/{n}$).

Teorema 6. (Criterio de Cauchy) Si existe un número real c tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (en particular si $\text{lím } \sqrt[n]{|a_n|} < 1$) la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

Demostración.

Si $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ entonces $|a_n| \leq c^n$ para todo n suficientemente grande. Y dado que la serie geométrica $\sum c^n$ es convergente, a partir del criterio de comparación deducimos que $\sum a_n$ converge absolutamente.

En la situación particular que exista $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, se elije c tal que $L < c < 1$. Luego $\sqrt[n]{|a_n|} < c$ para todo n suficientemente grande (ver **Resultado***) y una vez más, caemos en el caso anterior.

Es importante notar, que al aplicar el criterio de Cauchy, nuevamente se está intentando calcular $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Si $L > 1$ la serie es divergente, ya que para fines prácticos tendremos que $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ para todo n suficientemente grande, luego $|a_n| > 1$, de modo que la serie $\sum a_n$ es divergente (pues su término general no tiende a cero). Finalmente, cuando $L = 1$, la serie puede ser convergente (caso $\sum {}^1/_{n^2}$) o divergente (caso $\sum {}^1/_n$).

Ejemplo. Sea $a_n = \left({}^{\log n}/_n\right)^n$. Dado que $\sqrt[n]{a_n} = {}^{\log}/_n$ tiende a cero, la serie $\sum a_n$ es convergente.

El presente resultado, relaciona los dos anteriores.

Teorema 7. Dada (a_n) una sucesión cuyos términos son diferentes de cero. Si $\text{lím}\, |a_{n+1}|/|a_n| = L$, entonces $\text{lím} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Demostración.

Por simplicidad, supondremos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso $L \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, se fijan K y M tales, que $L - \varepsilon < K < L < M < L + \varepsilon$. Por lo que existe p con la propiedad de que $n \geq p \Longrightarrow K < {}^{a_{n+1}}/_{a_n} < M$. Si multiplicamos miembro a miembro las $n - p$ desigualdades $K < {}^{a_{p+i}}/_{a_{p+i-1}} < M$, con $i = 1, \cdots, n - p$; vemos que $K^n < {}^{a_n}/_{a_p} < M^{n-p}$ para todo $n > p$. Luego, escribimos $\alpha = {}^{a_p}/_{K^p}$ y $\beta = {}^{a_p}/_{M^p}$. Y entonces $K^n\alpha < a_n < M^n\beta$. Sacando raíces, llegamos a $K\sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\alpha} < M\sqrt[n]{\beta}$ para todo $n > p$. Teniendo en cuenta que $L - \varepsilon < K,\ M < L + \varepsilon$, $\lim \sqrt[n]{\alpha} = 1$ y $\lim \sqrt[n]{\beta} = 1$, podemos concluir que exister$_0 > p$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow L - \varepsilon < K\sqrt[n]{\alpha}$ y $M\sqrt[n]{\beta} < L + \varepsilon$. Entonces $n > n_0 \Longrightarrow L - \varepsilon < \sqrt[n]{\alpha} < L + \varepsilon$.

Caso $L = 0$. Sólo hay que considerar única y exclusivamente a M en la prueba del caso $L \neq 0$.

Ejemplo. A partir del resultado anterior (T. 7), nos va a resultar que $\lim {}^{n}/_{\sqrt[n]{n!}} = e$, veamos porque. Escribiendo $a_n = {}^{n^n}/_{n!}$, resulta ${}^{n}/_{\sqrt[n]{n!}}$. Por otro lado

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!}\frac{n!}{n \cdot n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

y así $\lim\left({}^{a_{n+1}}/_{a_n}\right) = e$, de donde se sigue que $\lim \sqrt[n]{a_n} = e$.

1.1.4. Reordenamientos

Definición. Decimos que una serie $\sum a_n$ es **incondicionalmente convergente** si, para cualquier biyección $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si hacemos $b_n = a_{\varphi(n)}$, la serie $\sum b_n$ es convergente. Como consecuencia de posteriores resultados, tendremos que si $\sum a_n$ es incondicionalmente convergente, entonces $\sum b_n = \sum a_n$, independientemente de la biyección φ.
Esta es la forma sugerida, para afirmar que la suma $\sum a_n$ no depende del orden de sus términos. Aunque no siempre suceda.

Ejemplo. La serie

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge, pero no incondicionalmente, dado que

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots.$$

Luego podemos escribir

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots.$$

$$\frac{s}{2} = 0 - \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots.$$

Haciendo la suma, término a término,

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \cdots.$$

Y así, la última serie tiene por suma a $\frac{3s}{2}$ y tiene los mismos términos que la serie inicial, cuya suma es s, pero en orden distinto.

Teorema 8. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente entonces para toda biyección $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, haciendo $b_n = a_{\varphi(n)}$, se tiene $\sum b_n = \sum a_n$.

Demostración.

Inicialmente vamos a suponer que $a_n \geq 0$; escribimos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ y $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. Observa como, para cada $n \in \mathbb{N}$, los números $\varphi(1), \cdots, \varphi(n)$ pertenecen al conjunto $\{1,2,\cdots,m\}$, donde m es el mayor de los $\varphi(i)$. Luego entonces

$$t_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{j=1}^{m} a_j = s_m.$$

Vemos como, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s_m < t_n$. De donde se sigue, que $\lim t_n < \lim s_n$, es decir $\sum b_n = \sum a_n$.

Para el caso general, tendremos que $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$, donde p_n y q_n son respectivamente, la parte positiva y negativa de a_n. A su vez, toda reordenación (b_n) de los términos a_n, determina reordenaciones (u_n) de los p_n y (v_n) de los q_n, de forma tal que u_n y v_n son respectivamente, la parte positiva y negativa de b_n. Y por lo que hemos visto, $\sum u_n = \sum p_n$ y $\sum v_n = \sum q_n$. Luego,

$$\sum a_n = \sum u_n - \sum v_n = \sum b_n$$

En el siguiente resultado, veremos que únicamente las series absolutamente convergentes, serán también incondicionalmente convergentes.

Teorema 9. (Riemann). Si se alterna convenientemente el orden de los términos de una serie condicionalmente convergente es posible hacer que su suma sea igual a cualquier número real prefijado.

Demostración.

Sea la serie $\sum a_n$ de la hipótesis del teorema. Elegimos un número c, y comenzamos a sumar los términos positivos de $\sum a_n$, en el orden natural, esto es uno a uno, deteniéndonos si al sumar a_{n_1}, el resultado supera por primer vez al número c. Podemos hacer lo anterior, ya que la suma de los términos positivos de $\sum a_n$ es $+\infty$.

A la suma así construida, le añadimos los términos negativos, también en su orden natural, uno a uno, y nos detenemos en el primer momento en que, si al sumar el término negativo a_{n_2}, la suma resulte menor que c (lo que es posible ya que la suma de los términos negativos es $-\infty$). Repitiendo el proceso de manera análoga, obtendremos una nueva serie cuyos términos son los mismos de $\sum a_n$, pero en un orden distinto. A su vez, las sumas parciales de esta nueva serie oscilan alrededor de c de forma tal que, a partir del índice n_1, la diferencia entre cada una de ellas es inferior, en su valor absoluto, al término a_{n_k}, justo en donde tuvo lugar el último cambio de signo. Finalmente, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$ puesto que la serie $\sum a_n$ converge. Luego entonces, las sumas parciales de la nueve serie convergen a c.

1.2. Aproximación de funciones

Karl Weierstrass (2004). Obtenido el 10 de mayo desde http://www.biografiasyvidas.com/biografia/w/weierstrass.htm

Karl Weierstrass (1815 Ostenfelde - 1897 Berlín) es conocido como el padre del Análisis Matemático moderno. Una de sus muchas aportaciones fue la de haber introducido la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad y, en general, el haber construido los fundamentos del Análisis Matemático dándole la formalidad con que lo conocemos ahora. Su rigor y formalismo eran inusuales para la época por lo que asombraron, y en ocasiones desconcertaron, a los matemáticos más reconocidos. Sus principales aportaciones matemáticas giraron en torno al estudio de las series infinitas destacando de forma sobresaliente la introducción del concepto de convergencia. Gran parte de su formación fue autodidacta y ya tenía 40 años de edad cuando publicó su primer artículo de matemáticas.

En esta unidad conocerás uno de los más importantes teoremas de aproximación de funciones continuas, el teorema de aproximación de Weierstrass que afirma que las funciones reales continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado pueden ser aproximadas arbitrariamente por un polinomio.

Este resultado es muy útil para el desarrollo de nuevas teorías pues permite simplificar la demostración de ciertos teoremas: Si la propiedad a demostrar se preserva al tomar límites uniformes, entonces es suficiente demostrarla solamente para polinomios.

Es importante que recuerdes los conceptos de función continua y función uniformemente continua que aprendiste en tu curso de cálculo diferencial, también los de sucesiones de funciones y convergencia uniforme que estudiaste en Análisis matemático I.

1.2.1 ¿Qué es aproximar funciones?

En algunas aplicaciones es conveniente **aproximar** funciones mediante otras funciones más sencillas. Así, por ejemplo las funciones trigonométricas, las logarítmicas y las exponenciales son "complicadas" en el sentido de que toman valores reales que no pueden ser expresados explícitamente en términos de sus argumentos. Para usar estas funciones en cálculos prácticos debemos recurrir a buenas aproximaciones de ellas.

En este caso entenderemos por **aproximar,** al hecho de definir otra función con el mismo dominio y codominio que la función dada de manera que en cualquier punto del dominio la función de aproximación sea muy parecida a la función original, es decir, que la diferencia entre ambas imágenes sea casi cero.

Recordemos algunas definiciones aprendidas en tus cursos previos.

Continuidad	Una función $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en el conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, se dice que es continua en el punto $a \in X$ cuando, para todo $\varepsilon > 0$, se puede obtener $\delta > 0$ tal que $a \in X$ y $\|x - a\| < \delta$ impliquen $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Con simbología matemática, f continua en el punto a significa: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ni\ a \in X$ y $\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. * f es continua en $A \subseteq \mathbb{R}$, si f es continua en a, para todo $a \in A$.
Continuidad uniforme	Una función $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua en el conjunto X cuando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, se puede obtener $\delta >$

	0 tal que $x, y \in X$, $\lvert y - x \rvert < \delta$ implican $\lvert f(y) - f(x) \rvert < \varepsilon$. Con simbología matemática, f uniformemente continua en el conjunto X significa: $\forall\ \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0\ \ni\ x, y \in X\ \text{y}\ \lvert y - x \rvert < \delta \Longrightarrow \lvert f(y) - f(x) \rvert < \varepsilon.$ * Una función uniformemente continua $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en todos los puntos del conjunto X. Sin embargo, el recíproco es falso.

En el primer caso, la existencia de δ depende de ε y a. Mientras que, en el segundo, depende únicamente de ε. También aprendiste que las funciones continuas definidas sobre intervalos cerrados y acotados resultan ser uniformemente continuas.

Teorema. (Continuidad uniforme). Sean $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathrm{f}: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ entonces f es uniformemente continua en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Usaremos estos conceptos para analizar el resultado principal de esta Unidad, el Teorema de aproximación de Weierstrass.

Las dos formas más sencillas de aproximar una función continua son mediante una función escalonada y mediante una función lineal por partes.

Definición. (Función escalonada). Sean $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f es una **función escalonada** si toma tan sólo un número finito de valores diferentes, es decir Im_f es finito.

Ejemplo. La función $f: [-1,2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ {}^{1}\!/_{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \leq x < 2 \end{cases}$$

Es una función escalonada. A partir de su gráfica puedes ver porqué se llama función escalonada.

Una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado puede ser aproximada mediante funciones escalonadas, como demostraremos en el teorema siguiente.

Teorema 1. Sean $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, y $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ si $\varepsilon > 0$, entonces existe una función escalonada $f_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para toda $x\epsilon[a,b]$.

Demostración.

Por el Teorema de continuidad uniforme sabemos que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, es uniformemente continua en $[a,b]$, entonces si $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a,b]$ y

$|x - y| < \delta$, Entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sea $m\epsilon\mathbb{N}$ suficientemente grande para que $h = \frac{b-a}{m} < \delta$. Dividamos ahora el intervalo $[a,b]$ en m intervalos ajenos de longitud h, así: $I_1 = [a, a+h]$, $I_2 = [a+h, a+2h], \dots, I_k = [a+(k-1)h, a+kh], \dots, I_m = [a+(m-1)h, a+mh = b]$.

Como la longitud de cada subintervalo I_k es $h < \delta$, la diferencia entre dos valores cualesquiera de f en I_k es menor que ε.

Definimos ahora la función:

$$f_\varepsilon: [a,b] \rightarrow R \text{ tal que } f_\varepsilon(x) = f(a+kh) \text{ para } x \in I_k \;\; k = 1,2, \dots m$$

que, en efecto es una función escalonada, pues es constante en cada intervalo I_k y, por la manera en que la construimos se cumple que si $x \in I_k$ entonces

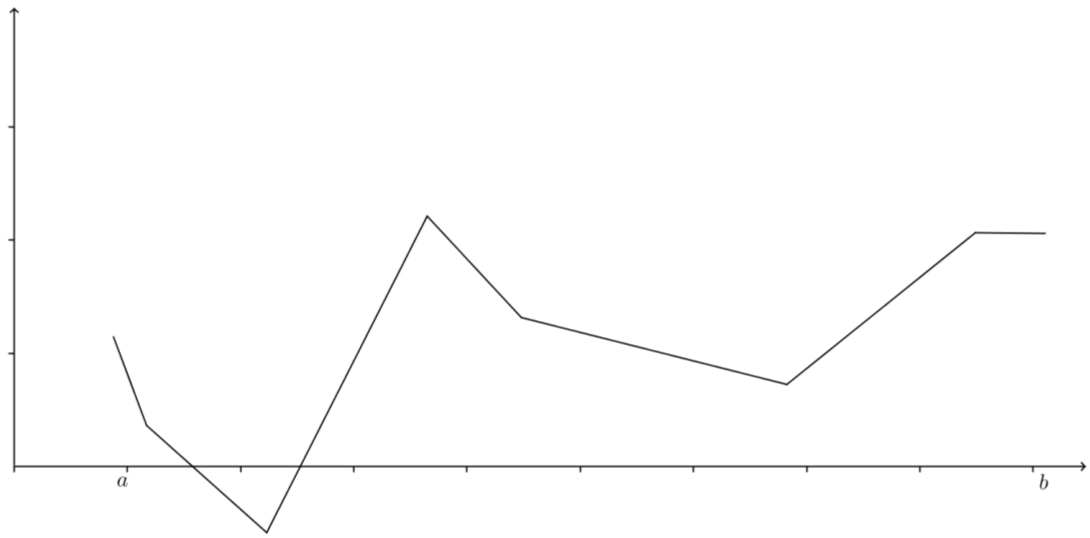
$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(a+kh)| < \varepsilon$$

Por lo que $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para toda $x\epsilon[a,b]$.

Las funciones escalonadas son extremadamente simples pero no son continuas (excepto las constantes), y con frecuencia se desea aproximar funciones continuas con otras funciones continuas simples. Ahora demostraremos que es posible aproximar funciones continuas mediante funciones lineales por partes que son continuas.

Definición. (Función lineal por partes). Sean $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que f es una **función lineal por partes en $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$**, si $[a,b]$ es la unión finita de intervalos ajenos $I_1, I_2, \dots I_m$ tales que la restricción de f a cada intervalo I_k es una función lineal.

Notemos que la gráfica de una función lineal por partes es una colección de segmentos de recta y para que la función pueda ser continua estos segmentos han de estar unidos por sus puntos terminales a los segmentos correspondientes a los intervalos adyacentes. (ESTA PODRÍA SER UNA FIGURA)



Función continua definida por intervalos

Una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado puede ser aproximada mediante una función lineal por partes continua, como demostraremos en el teorema siguiente.

Teorema 2. Sean $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, y $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$ si $\varepsilon > 0$, entonces existe una función lineal por partes continua $f_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para toda $x\epsilon[a, b]$.

Demostración. Nuevamente, el teorema de continuidad uniforme garantiza la continuidad uniforme de f en $[a, b]$.

Así, si $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a, b]$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sea $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $h = \frac{b-a}{m} < \delta$, y dividamos ahora el intervalo $[a, b]$ en m intervalos ajenos de longitud h: $I_1 = [a, a + h], \dots I_k = [a + (k - 1)h, a + kh], \;\; k = 2, \dots, m$. En cada subintervalo I_k definamos f_ε como la recta que une a los puntos:

$$(a+(k-1)h, f(a+(k-1)h)) \quad \text{y} \quad (a+kh, f(a+kh))\,.$$

La función f_ε así definida es una función lineal por partes continua en $[a,b]$, puesto que para cada $x \in I_k$ el valor de $f(x)$ está a menos de ε unidades de $f(a+(k-1)h)$ y $f(a+kh)$, se tiene entonces que $|f(x)-f_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ para toda $x\epsilon[a,b]$.

El Teorema principal de esta unidad es también un teorema de aproximación; su autor, Karl Weierstrass realizó grandes aportaciones matemáticas durante el siglo XIX. Él tenía 70 años cuando publicó este resultado (Vargas Jarillo, 1997), (Murillo, 1997) refiriéndose a (K. Weierstrass, 1885).

Teorema de aproximación de Weierstrass. Sean $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, y $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ si $\varepsilon > 0$, entonces existe un función polinomial $p_\varepsilon:[a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)-p_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ para toda $x\epsilon[a,b]$.

Mientras que en los Teoremas 1 y 2 la estrategia es exhibir explícitamente la función de aproximación, el Teorema de aproximación de Weierstrass procede de otra manera: demuestra que cualquier función continua es límite uniforme de una sucesión de funciones polinomiales. Para entender esta estrategia será necesario que recuerdes algunos conceptos que aprendiste en tus cursos previos.

1.2.2. Funciones continuas extrañas

En la Unidad 2 de Análisis Matemático I, aprendiste a trabajar con sucesiones de funciones y a extender a ellas los conceptos de convergencia de sucesiones numéricas que habías estudiado en tus cursos de Cálculo.

Tal como sucede en las sucesiones de números reales, en las que para cada número natural se tiene un número real, en una **sucesión de funciones** hay una función por cada natural.

Recordemos la definición y algunos resultados sobre convergencia

Definición. (Sucesión de funciones). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y supongamos que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ existe una función $f_n: A \longrightarrow \mathbb{R}$ decimos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$.

Convergencia puntual	Sean $\{f_n(x)\}$, $f(x)$ definidas en $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que f es el **límite puntual** de $\{f_n(x)\}$ en A, si $\forall \boldsymbol{a} \in\ A$ ocurre que $$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$ y se denota: $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{p}{=} f(x) \text{ ó } f_n \overset{p}{\longrightarrow} f$$ También se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a f en A.
Convergencia uniforme	Sean $\{f_n(x)\}$, $f(x)$ definidas en $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que f es el **límite uniforme** de $\{f_n(x)\}$ en A, si $$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$ y se denota: $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{u}{=} f(x) \text{ ó } f_n \overset{u}{\longrightarrow} f$$ También se dice que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a f en A.

En el primer caso para cada punto $a \in A$ fijo, se considera la sucesión formada por las imágenes de las funciones en el punto, tal sucesión es convergente y f, la función propuesta como límite, es aquella que en la que $f(a)$ se define como el límite de esa sucesión. Entonces $\{f_n(a)\}$ es una sucesión numérica que converge a $f(a)$ lo que, por definición significa que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N \;\Rightarrow\; |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

por lo que, la existencia de N depende no solamente de ε sino también del punto a.

El segundo caso es distinto, si observamos la definición podremos notar que la existencia de N depende únicamente de ε sin importar de qué punto del conjunto se tome.

En la Sección 2.2 del curso de Análisis Matemático I, se vieron con más detalles estos conceptos y así como ejemplos de sucesiones de funciones continuas que convergen puntualmente a una función que no es continua.

En la misma sección se demuestra que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua (Teorema A). Adicionalmente, sabes por el **Teorema de continuidad uniforme,** que las funciones continuas definidas en intervalos cerrados son uniformemente continuas. Estos dos hechos son precisamente los que garantizan la existencia del polinomio al que se refiere el Teorema de aproximación de Weierstrass, que en términos sencillos dice que:

> Las funciones polinomiales son continuas y convergen uniformemente a cualquier función continua dada.

La convergencia uniforme es una propiedad fuerte que preserva características fundamentales de las funciones que forman una sucesión. Cuando estudiaste la sección 2.2 del curso de Análisis

Matemático I, tuviste oportunidad de revisar con detalle algunas de ellas.

Contrastando con la convergencia uniforme de funciones continuas se tiene que el límite uniforme de funciones derivables no es necesariamente derivable: considera por ejemplo la función $f(x) = |x|$, esta función es continua en todo su dominio pero no es derivable en cero; sin embargo, el Teorema de aproximación de Weierstrass afirma que es posible aproximarla uniformemente con una sucesión de polinomios que son funciones infinitamente derivables.

De hecho fue Weierstrass quien en 1874, once años antes de establecer el teorema de aproximación, construyó una función continua que no es diferenciable en ningún punto. Nos cuenta G. Grabinsky en su interesante artículo (Grabinsky, 1997), acerca de este descubrimiento:

> "El impacto causado a la comunidad matemática fue inmenso y provocó reacciones muy variadas que iban desde la incredulidad hasta el horror, pero la grave llamada de atención estaba dada sobre el poco rigor y la engañosa intuición, y precipitó en gran medida la imperiosa necesidad de construir sobre bases irrefutables los números reales."

En el mismo artículo se encuentra la definición de tan interesante función y la demostración de que no existe algún punto en su dominio en que sea derivable. Incluimos aquí únicamente la definición.

Teorema. (Función de Weierstrass). Sean $b \in (0,1)$, $a \in \mathbb{Z}$ impar tales que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, entonces la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ no es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración. (Grabinsky, 1997)

Es por esto que el Teorema de aproximación de Weierstrass resulta tan sorprendente pues incluso estas funciones tan peculiares pueden ser aproximadas uniformemente por polinomios.

1.3. Teorema de aproximación de Weierstrass

En base a lo mencionado en el tema 1.2.1. Mencionamos el Teorema de Weierstrass, a partir de la aproximación de funciones.

Teorema. (**Aproximación de Weierstrass**). Sean $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, y $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$ si $\varepsilon > 0$, entonces existe un función polinomial $p_\varepsilon: [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in [a, b]$.

Alternativamente, dicho enunciado puede interpretarse como sigue.

Cualquier función real continua definida en un intervalo cerrado es límite uniforme de una sucesión de polinomios.

Esto también significa, desde un punto de vista topológico, lo siguiente.

El conjunto de funciones polinomiales es denso en el conjunto de funciones continuas definidas en un intervalo cerrado.

Existen muchas demostraciones de este Teorema, todas ellas, por demás interesantes, echan mano de distintas herramientas matemáticas de muy diversas áreas. La demostración que aquí presentaremos es una de las más elementales, no por ello menos bella y elegante. Es constructiva y se basa en la utilización de los denominados **Polinomios de Bernstein.**

1.3.1 Enunciado, demostración y consecuencias notables

El siguiente concepto introducido por Sergei Bernstein (Ucrania 1880-Moscú 1968) es para funciones continuas definidas en el intervalo $[0,1]$.

Definición. (**Polinomios de Bernstein**). Dada una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, se define la sucesión de polinomios

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

La función polinomial $B_n(x)$ se llama **el $\boldsymbol{n}$ −ésimo polinomio de Bernstein para $\boldsymbol{f}$**; es un polinomio de grado a lo más n, cuyos coeficientes dependen de:

1. Los valores que f toma en los $n+1$ puntos del intervalo $[0,1]$ separados por la misma distancia. Tales puntos son: $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$;
2. los coeficientes binomiales $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Teorema. (Aproximación de Bernstein). Sean $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, continua y $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in [0,1]$.

La demostración de este teorema no la incluiremos aquí, usa dos hechos que aprendiste durante el curso de Análisis Matemático I:

1. Toda función continua definida en un intervalo cerrado es acotada.

2. Toda función continua definida en un intervalo cerrado es uniformemente continua.

Ahora, utilizando el resultado anterior, vamos a enunciar y demostrar el siguiente teorema.

Demostración del Teorema de Aproximación de Weierstrass

Sean $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, y $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$. Definamos la siguiente función biyectiva $g:[0,1] \to [a,b]$, dada como $g(t) = a + t(b-a)$, para $t \in [0,1]$.

Entonces g es continua, $g(0) = a$ y $g(1) = b$. Como f es continua, la composición $f \circ g$ también es continua. Por el Teorema de aproximación de Bernstein si $\varepsilon > 0$, entonces existe un entero N tal que para todo entero $n \geq N$, el n −ésimo polinomio de Bernstein
$B_n(f \circ g)$ satisface que

$$|(f \circ g)(x) - B_n(f \circ g)(x)| < \varepsilon \text{ para toda } x \in [0,1] \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

Como g es biyectiva y continua, entonces tiene una inversa continua $g^{-1}:[a,b] \to [0,1]$ dada como

$$g^{-1}(t) = \frac{t-a}{b-a} \text{ para } t \in [a,b].$$

Entonces, por (1) para toda $t \in [a,b]$, se tiene que

$$\left|f(t) - B_N(f \circ g)\left(g^{-1}(t)\right)\right| < \varepsilon.$$

Así,

$$\left|f(t) - B_N(f \circ g)\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon \text{ para toda } t \in [a,b].$$

Como $B_N(f \circ g)\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$ es una función polinomial en $[a,b]$. Definimos el polinomio buscado $p_\varepsilon \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Como $p_\varepsilon(x) = B_N(f \circ g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ por lo que se cumple que $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in [a,b]$.

Corolario. La sucesión $q_n(x) = B_n(f \circ g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ converge uniformemente a f en $[a,b]$.

Demostración.

Se sigue inmediatamente de (1).

La sucesión descrita en el corolario queda definida como:

$$\begin{aligned} q_n(x) &= B_n(f \circ g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (f \circ g)\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left(1 - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right)^{n-k} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (f \circ g)\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{k}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{k}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-k}$$

1.3.2. Algunas generalizaciones

Como vimos, el Teorema de aproximación de Weierstrass usa la continuidad uniforme de f la cual depende de la compacidad del intervalo $[a, b]$. En general, una función continua definida en un dominio no compacto no siempre es uniformemente continua. Gracias al Teorema de Heine-Borel –que estudiaste en la Unidad 3 de tu curso de Análisis Matemático I- sabemos que en $\mathbb{R}$ los conjuntos compactos son cerrados y acotados, es decir, los intervalos cerrados, por lo que no podremos extender este resultado de aproximación a una función continua definida en todo $\mathbb{R}$. Sin embargo, en la práctica, siempre se aplica el Teorema de aproximación en un intervalo cerrado que contenga a la región en que nos interese trabajar.

Weierstrass demostró entonces, la densidad de los polinomios en el espacio de las funciones reales continuas definidas en un intervalo compacto $C([a, b], \mathbb{R})$ (K. Weierstrass, 1885). Años más tarde Marshall H. Stone generalizó este resultado, (M. H. Stone, 1937), observando que esta densidad se debe a las propiedades algebraicas de los polinomios enriquecidas con las propiedades que las funciones continuas toman en dominios compactos.

Este resultado es el conocido Teorema de Stone-Weierstrass para conjuntos compactos en espacios métricos. Si X es un espacio métrico y $A \subseteq X$ un conjunto compacto, definimos $C(A, \mathbb{R})$

como el conjunto de todas las funciones reales continuas definidas en A con la norma del supremo, (d_∞, que estudiaste en la Unidad 1 de tu curso de Análisis Matemático I).

Stone observó que además $C(A,\mathbb{R})$, forma un *álgebra,* es decir, si

$$f,g \in C(A,\mathbb{R}) \text{ y } \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g, fg, \alpha f \in C(A,\mathbb{R}).$$

Un álgebra la puedes pensar como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con un producto definido sobre su elementos: si tomas dos funciones de $C(A,\mathbb{R})$ y construyes la función producto, no es muy difícil convencerte de que esta es nuevamente un elemento de $C(A,\mathbb{R})$ (es un buen ejercicio que demuestres esta afirmación).

Finalmente, Stone logró establecer con precisión las condiciones necesarias para garantizar la densidad de los polinomios en el espacio de las funciones continuas en un intervalo cerrado y en general en $C(A,\mathbb{R})$, para A compacto en un espacio métrico cualquiera. El enunciado del famoso Teorema quedó dado como sigue:

Teorema. (**Stone Weierstrass**). Sean X espacio métrico, $A \subseteq X$, conjunto compacto y $C(A,\mathbb{R})$ el espacio de las funciones reales continuas definidas en A.
Si existe B subálgebra de $C(A,\mathbb{R})$ que contiene a las funciones constantes y *separa puntos*, es decir $\forall x,y \in A \Rightarrow \exists f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$, entonces B es denso en $C(A,\mathbb{R})$.

Cierre de la unidad

En esta unidad has aprendido acerca de uno de los objetivos principales del Análisis Matemático: la aproximación de funciones y de este tema uno de los Teoremas más conocidos al respecto el Teorema de Aproximación de Weierstrass.

Aprendiste que las funciones polinomiales forman un conjunto denso en el espacio de funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y que esto se debe esencialmente al hecho de que tales funciones resultan ser uniformemente continuas en estos dominios y también pueden ser aproximadas uniformemente por polinomios en tales conjuntos. Todo ello gracias a la compacidad de los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$

Analizaste también como estas ventajas podían ser extendidas a espacios más generales dando lugar al Teorema de Stone-Weierstrass.

Fuentes de consulta

Básica

- Bartle, R. (1984). *Introducción al Análisis Matemático de una variable.* México, Ciudad de México, Limusa.
- Grabinsky, G. (1997). *La función continua no diferenciable de Weierstrass.* Recuperado de tbl_articulos.pdf2.a982a5fc75ae0162.67726162696e736b792e706466.pdf (miscelaneamatematica.org)

- K. Weierstrass. (1885). *Uber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Vernderlichen.* Sitzungsberichte der Kniglich Preuischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 663-689 und 789-805.

- M. H. Stone. (1937). Applications of the thoery of Boolean rings to general topology. *Transactions of the American Mathematical Society,* Vol. 41, No. 3 , 375-481.

- Montalvo, F. (2003). El Teorema de Stone-Weierstrass. En *Cálculo Diferencial e Integral en varias variables* (págs. 31-38). Extremadura, España.

- Murillo, R. (1997). *El teorema de aproximación de Weierstrass.* Recuperado de tbl_articulos.pdf2.9da3c5dad16cc1fe.6d7572696c6c6f2e706466.pdf (miscelaneamatematica.org)

- Royden, H. L. (1988). *Real Analysis.* New York: Macmillan.

- Vargas C. (1997). *Origen y desarrollo del teorema de aproximación de Weierstrass.*