MATEMÁTICAS

SEXTO SEMESTRE

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

UNIDAD 3. CONCEPTOS PRELIMINARES DE TEORÍA DE LA MEDIDA

Clave
005143631/06143631

Universidad Abierta y a Distancia de México

DCEIT

Índice

Índice de figuras

Presentación de la unidad

La integral de **Riemann-Stieltjes** que se introdujo en la unidad anterior generaliza la **integral de Riemann**, la función integrante introducida en la integral de **Riemann-Stieltjes** adquiere un significado más particular cuando le asigna una "medida" a los conjuntos sobre los cuales se va a integrar. El uso de esta función nos permite generalizar el concepto de integral, incluso de funciones con "muchas" discontinuidades. En esta unidad se introduce el concepto de medida de un conjunto y más específicamente el de "medida de Lebesgue".

Competencia específica

Analizar el concepto de medida para clasificar conjuntos en $\mathbb{R}$ mediante la utilización de sus propiedades.

Logros

 *Figura 1*. Logros	• Identificar las propiedades de la medida de Lebesgue. • Clasificar conjuntos en $\mathbb{R}$.

3.1. Antecedentes

Emile Borel en 1898 fue el primero en establecer una teoría de la medida sobre los subconjuntos de los números reales conocidos ahora como **conjuntos de Borel**. En 1902 *H.* **Lebesgue** presentó su trabajo pionero sobre medida de **Lebesgue** y en 1918 *C.* **Carathéodory** introdujo y estudió las propiedades de medidas exteriores.

3.1.1. Medidas y conjuntos medibles

El concepto general de medida de un conjunto constituye una generalización natural de los siguientes conceptos:

- longitud de un segmento Δ,
- área de una figura plana *F*,
- volumen de una figura *G* del espacio,
- del incremento $f(b) - f(a)$ de una función no decreciente $f(t)$ en el segmento semiabierto $[a, b)$,
- de la integral de una función no negativa en una región lineal, plana, etc.

Un interés general es establecer una medida sobre la recta real, por el cual introduciremos un concepto de medida sobre ciertos conjuntos de una manera general.

La teoría de integración de Riemann presentada en adaptación de la teoría de Cauchy debilitando las hipótesis necesarias para que una función sea integrable. Mientras Cauchy restringía la integrabilidad a funciones continuas, Riemann dio una condición necesaria y suficiente para la integrabilidad de una función:

Una función acotada $f(x)$ es integrable en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ si y sólo si la suma de Cauchy

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}),$$

donde $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ y $t_k \in \left[x_{k-1,} x_k\right]$, se aproxima valor límite cuando el tamaño de la partición del se aproxima a 0. Este único valor límite es por definición es por definición $\int_a^b f(x)dx$.

Definición 1 [Semianillo] Sea X un conjunto no vacío. Una colección S de subconjuntos de X es llamado un **semianillo** si ésta satisface las siguientes propiedades.

a) El conjunto vacío pertenece a S, es decir $\emptyset \in S$.

b) Si $A, B \in S$; entonces $A \cap B \in S$; esto es, S es cerrado bajo intercesiones finitas.

c) El conjunto diferencia de cualesquiera dos conjuntos de S pueden ser escritos como la unión finita de un par de conjuntos disjuntos de S. Esto es, para cada $A, B \in S$; entonces existe $C_1 \ldots C_n \in S$ (dependiendo de A y B) tal que $A \setminus B = \cup_{i=1}^{n} C_i$ y $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Definición 2 [σ-conjunto] Sea S un semianillo de subconjuntos, subconjuntos de X. Un subconjunto A de X es llamado un **σ-conjunto** con respecto a S (simplemente un **σ-conjunto**) si existe una sucesión disjunta $\{A_n\}$ de S (esto quiere decir, $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$) tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Observación 1. Si $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, con $A_1, \dots, A_n \in S$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces A es un σ-conjunto.

Algunas propiedades de los σ-conjuntos están incluidas en el siguiente teorema.

Teorema 1.

Para algún semianillo S, se tiene las siguientes propiedades.

a) Si $A \in S$ y $A_1, \dots, A_n \in S$, entonces $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ puede ser escrito como la unión finita de conjuntos ajenos de S (entonces, este es un ***σ*-conjunto**).

b) Para cada sucesión $\{A_n\}$ de S, el conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un ***σ*-conjunto.**

c) Uniones numerables e intersecciones finitas de ***σ*-conjuntos** son ***σ*-conjuntos.**

Demostración. La prueba se hace por inducción sobre n. Para $n = 1$, el teorema es válido por la definición de semianillo. Ahora se asume que el teorema es válido para alguna n. Sea $A \in S$, y sean $A_1, \dots, A_n \in S$. Por hipótesis de inducción, existen $B_1, \dots, B_k \in S$ tal que $B = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B\_i$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = B \setminus A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{k} (B_i \setminus A_{n+1}).$$

Por la propiedad c) de semianillo, cada $B \setminus A_{n+1}$ puede ser escrito como la unión finita de conjuntos disjuntos de $\mathcal{S}$. Donde $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$, esto se sigue de $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ puede ser escrito como la unión finta de conjuntos disjuntos de $\mathcal{S}$. Esto completa la inducción y la prueba.

Sea $\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$. Donde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces se escribe $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ tal que $B_1 = A_1$ y $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para $n \geq 1$. Observamos que $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y por la propiedad a) cada B_i es un ***σ*-conjunto**. Ahora se sigue que A es en sí mismo un σ-conjunto.

Para la prueba de c) se sigue de b), y de la propiedad b) de semianillo.

Lema 1. Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos de un semianillo $\mathcal{S}$, entonces existe una sucesión disjunta $\{C_n\}$ de $\mathcal{S}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ y para n entonces existe algún k con $C_n \subseteq A_k$.

Definición 3 [Álgebra de conjuntos] Un conjunto no vacío $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X tal que es cerrado bajo intersecciones finitas y su complemento es llamado **álgebra de conjuntos**(o simplemente un **álgebra**). Esto es, $\mathcal{S}$ es un álgebra si satisface las siguientes propiedades:

a) Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$.
b) Si $A \in \mathcal{S}$, entonces $A^c \in \mathcal{S}$.

Teorema 2.

Para un álgebra de conjuntos $\mathcal{S}$, las siguientes propiedades se cumplen:

a) Los conjuntos $\emptyset, X \in \mathcal{S}$.

b) El álgebra $\mathcal{S}$ es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas.

c) El álgebra $\mathcal{S}$ es un semianillo.

Demostración.

a) Dado que $\mathcal{S}$ es no vacío existe algún $A \in \mathcal{S}$. Ahora, por hipótesis $A^c \in \mathcal{S}$, así, $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{S}$. Más aún, $X = \emptyset^c \in \mathcal{S}$.

b) Sea $A,\ B \in \mathcal{S}$. Entonces $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{S}$, el resto de la prueba se sigue por inducción.

c) Solo se tiene que verificar para la propiedad 3) de la definición de semianillo, pero esto se observa de la identidad $A \setminus B = A \cap B^c$.

Ejemplo

Para algún conjunto no vacío X, la colección $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$ es un álgebra de conjuntos.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos disjuntos y distintos del vacío de un conjunto X. Entonces $\mathcal{S} := \mathcal{F} \cup (\emptyset)$ es un semianillo de subconjuntos de X. Para ver esto, se observa que primero $\emptyset \in \mathcal{S}$. Ahora, si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces B es vacío o igual a A. Del mismo modo, $A \setminus B$ es o bien vacío o igual a A. Por lo tanto, $A,\ B \in \mathcal{S}$ implica que $A \setminus B$ pertenece a $\mathcal{S}$, y así, $\mathcal{S}$ es un semianillo.

Definición 4 [Anillo de conjuntos] Un **anillo de conjuntos** (o simplemente un anillo) es un conjunto no vacío de subconjuntos $\mathcal{R}$ de un conjunto X satisfacer las siguientes propiedades:

a) Si $A, B \in \mathcal{R}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{R}$.

b) Si $A,\ B \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Cada anillo $\mathcal{R}$ contiene el conjunto vacío. En efecto, dado que $\mathcal{R}$ es no vacío, entonces existe $A \in \mathcal{R}$, por lo que $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{R}$. Cada álgebra de conjuntos es un anillo de conjuntos. Además, un anillo $\mathcal{R}$ es necesariamente un semianillo. En efecto, si $A, B \in \mathcal{R}$, entonces la relación $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ muestra que $A \cap B \in \mathcal{R}$.

Definición 5 [σ-Anillo] Un álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un conjunto X se llama **σ-álgebra** si cada unión de una colección numerable de miembros de $\mathcal{S}$ esta nuevamente en $\mathcal{S}$. Es decir, además $\mathcal{S}$ es un álgebra, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ esta $\mathcal{S}$ para cada sucesión $\{A_n\}$, de $\mathcal{S}$.

En virtud de $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c$, esto se sigue de que todas σ-álgebra de conjuntos es cerrado bajo intercesiones finitas. Cada colección de subconjuntos: $\mathcal{F}$ de un conjunto no vacío X está contenido en una σ-álgebra más pequeña (con respecto a la relación de inclusión). Esta σ-álgebra es la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{F}$ (nótese que $\mathcal{P}(X)$ es uno de ellos), que se llama la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$.

Definición 6 [Conjuntos de Borel] Los conjuntos de Borel de un espacio topológico (X, r) son conjuntos de la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos.

La σ-álgebra de todos los conjuntos de Borel de (X, r) se denotan por $\mathcal{B}$.

Se introduce la noción de medida sobre una σ-álgebra y se consideran el concepto de medida cero.

Definición 7 [Medida] Sea $(X; \mathcal{S})$ un espacio medible. Una medida en $(X; \mathcal{S})$ es una función $\mu: X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) $\mu \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{S}$.

c) μ es σ-aditiva, i.e. Si (E_n) es una sucesión de elementos disjuntos entre sí de S, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definición 8 [Medida Finita] Sea μ una medida en $(X, \mathcal{S})$. Se dice que μ es **finita** si no toma el valor extendido ∞.

Si es posible hallar una sucesión (E_n) de elementos de $\mathcal{S}$ tal que $X = \bigcup_{n+1}^{\infty} E_n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se dice que μ es σ-finita. Se observa que toda medida finita es automáticamente σ-finita.

Las siguientes propiedades son consecuencias de la definición.

Proposición 1. Sea μ una medida en $(X, \ \mathcal{S})$ entonces

a) μ es aditiva, esto quiere decir $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$ si $E, F \in \in \mathcal{S}, \mu(E_1 \cap E_2) = \emptyset$.

b) μ es monótona; es decir, si $E \subset F$, con $E, F \in \mathcal{S}$, entonces se tiene: $\mu(E) \leq \mu(F)$.

c) μ es sustractiva; es decir, si $E \subset F$, con $E, F \in \mathcal{S}$ y $\mu(E) < \infty$, entonces $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Demostración.

Para a), sean $F_1 = E_1, F_2 = E_2, F_n = \emptyset$, entonces (F_n) es una sucesión de elementos de $\mathcal{S}$ y por la Proposición 1 inciso a) y b) obtenemos:

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \mu(E_1) + \mu(E_2),$$

La aditivita puede extenderse por inducción a cualquier número finito de elementos ajenos.

a) De la identidad $F = (F \setminus E) \cup E$ (unión disjunta de elementos de $\mathcal{S}$), se obtiene del inciso anterior que: $\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(E)$, así se tiene que $\mu(E) \leq \mu(F)$ por (Proposición 1 b).

b) De la identidad $\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(E)$, obtenemos al restar $\mu(E) < \infty$ que:
$\mu(F) - \mu(E) = \mu(F \setminus E)$. Nótese que la valida aún si $\mu(F) = \infty$.

Ejemplo.

1. Sean $(X, \mathcal{S})$ es un espacio medible arbitrario y $x_0 \in X$ fijo definimos $\mu: \mathcal{S} \to \{0,1\}$ como sigue:

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 \; si \; x_0 \in E, \\ 0 \; si \; x_0 \notin E. \end{cases}$$

La medida μ es una medida finita, llamada la **medida unitaria concentrada en x_0.**

2. Sean $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible, $\mu_1, \mu_2 \colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ medidas y $c_1, c_2 \ \geq 0$ entonces

$\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 \colon \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}$,

es una medida.

Teorema 3.

Sea $\mathcal{S}$ un semianillo, y sea $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ una función. Entonces μ es una medida sobre $\mathcal{S}$ si y sólo si μ satisface las siguientes condiciones.

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) Si $A \in \mathcal{S}$, $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{S}$ y satisface $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces $\sum_{i=i}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A)$ se satisface.

c) Si $A \in \mathcal{S}$ y $\{A_n\}$ satisface $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, entonces μ es σ-subaditiva.

Demostración.

Supóngase μ es una medida sobre $\mathcal{S}$. Entonces por definición, $\mu(\emptyset) = 0$. Para b) supongamos que $A \in \mathcal{S}$, y los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ satisfacen $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$. Entonces conjuntos disjuntos $B_1, \ldots, B_m$ de $\mathcal{S}$ tal que $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$. Sea $C_1 = A_1, \ldots, C_n = A_n$, y $C_{n+i} = B_i$ para $1 \leq i \leq m$. Entonces los conjuntos $C_1, \ldots, C_{n+m}$ son disjuntos y $A = \bigcup_{i=1}^{m+n} C_i$. Por la propiedad de aditivita finita de μ, se tiene

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{m+n} \mu(C_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Por la σ-subaditividad de μ, se asume que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tal que $A \in \mathcal{S}$ y $\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$. Sea $B_1 = A_1$ y $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para $n \geq 1$. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $B_n \subseteq A_n$ para cada n.

También, para sucesión $\{B_n\}$ es disjunta, y para cada $n \geq 2$ existe un par de conjuntos disjuntos $C_1^n, \dots, C_{kn}^n$ en $\mathcal{S}$ tal que $B_n = \bigcup_{i=1}^{K_n} C_i^n$. Obsérvese que por b) y por $\bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n \subseteq A_n$ para cada n, se sigue que $\sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_i^n) \leq \mu(A_n)$. (Para n=1, hacemos $k_1 = 1$ y $C_1^1 = A_1$.)

Ahora, observemos que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n}(C_i^n \cap A)$, es una unión disjunta. Por lo tanto la σ-aditividad de μ se obtiene

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_1^n \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_l^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A la inversa, si el conjunto de funciones $\mu: \mathcal{S} \to [0, \infty]$ satisface las tres condiciones anteriores, μ es σ-aditiva por la combinación de los incisos b) y c). Por lo tanto, μ es una medida.

Definición 9 [Conjunto nulo] Un conjunto E es llamado un **conjunto nulo** si $\mu(E) = 0$. Denotamos a este por $\mathcal{N}(\mu)$, es decir:

$$\mathcal{N}(\mu) = \{E \in \mathcal{S}: \mu(E) = 0\}.$$

A partir de la propiedad de un σ-subaditividad de μ que una unión numerable de conjuntos nulos es de nuevo un conjunto vacío. Los conjuntos nulos jugarán un papel importante en la teoría de la integración.

Teorema 4. Cada conjunto nulo es medible.

Demostración. Sea $E \subseteq X$ con $\mu(E) = 0$. Entonces la monotonía de μ implica $\mu(A \cap E) = 0$ para cada $A \subseteq X$. Por consiguiente, para cada subconjunto A de X se tienen

$$\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) = \mu(A \cap E^c) \leq \mu(A),$$

donde la primera desigualdad se cumple en virtud de la σ-subaditividad de μ. Por lo tanto, E es medible.

Lema 1. Sean los conjuntos $E_1, \dots, E_n$ los conjuntos y medibles. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{I=1}^{n}(A_n \cap E_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i)$$

esto se cumple para cada conjunto A de X.

Demostración. La prueba es por inducción sobre n. Obviamente, el resultado es cierto para $n = 1$. Supongamos ahora es cierto para algún n, y sean que los conjuntos $E_1, \dots, E_n, E_{n+1}$, conjuntos disjuntos y medibles. Si $A \subseteq X$, entonces

$$\mathrm{A} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \backslash E_{n+1} = A \cap E_{n+1}$$

$$A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap (E_{n+1})^c = A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right].$$

Por lo tanto, usando la medida de E_{n+1}, vemos que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}(A \cap E_i\ )\right) = \mu\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right]\right) =$$

$$\mu\left(A \cap \left(\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right]\right) \cap E_{n+1}\right) + \mu\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap (E_{n+1})^C\right)$$

$$\mu(A \cap E_{n+1}) + \mu\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A \cap E_i).$$

donde la última igualdad se cumple por la hipótesis de inducción. La inducción es ahora completar, y la prueba está terminada.

Definición 10 [Completo] Un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se llama completo, si siempre que $E \in \mathcal{N}(\mu)$ y $F \subset E$, entonces $F \in \mathcal{S}$, en cuyo caso también se tiene que $F \in \mathcal{N}(\mu)$. También decimos que en este caso μ es una medida completa.

Teorema 4. Sea μ una medida definida sobre el espacio medible $(X, \mathcal{S})$.

a) Si (E_n) es una sucesión creciente de elementos $\mathcal{S}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\uparrow\infty} \mu(E_n)$$

Donde $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \mu(E_n)$ significa que el límite es el de una sucesión creciente.

b) Si (E_n) es una sucesión decreciente de elementos de $\mathcal{S}$, entonces

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \lim_{n\downarrow\infty} \mu(F_n).$$

Si además $\mu(F_n) < \infty$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ entonces se tiene la igualdad.

Demostración.

a) Si $\mu(E_n) = \infty$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces ambos miembros de la expresión son iguales ∞. Así supondremos que $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $E_0 = \emptyset$ y $G_k = E_k - E_{k-1} (K \geq 1)$; entonces (G_n) es una sucesión de elementos ajenos en $\mathcal{S}$ tal que:

$$E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_k \;\; n \in \mathbb{N},$$

Y por tanto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_k.$$

Usando la σ-aditividad y la sustractividad de μ obtenemos:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(G_k)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mu(E_k) - \mu(E_{k-1})) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Finalmente, se observa que por la monotonía de μ, el límite es una sucesión creciente.

b) Si $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_k \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} k_k\right) \leq \mu(F_n) \; para \; todo \; n,$$

y como la sucesión es decreciente, entonces:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \lim_{n\downarrow\infty} \mu(F_n).$$

Supongamos que $\mu(F_n) < \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$, sea n_0 el primero natural con dicha propiedad. Definimos $E_k = F_{n_0} - F_{n_0}$, entonces (E_k) es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{S}$ con $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = F_{n_0} - \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Se sigue del inciso a) y de sustracción de μ que:

$$\mu(F_{n_0}) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \lim_{k\uparrow\infty} (E_k) =$$

$$\mu(F_{n_0}) - \lim_{k\downarrow\infty} \mu(F_{n_0+k}) = \mu(F_{n_0}) - \lim_{k\downarrow\infty} \mu(F_n).$$

Pero $\mu(F_n)$ es finito porque se puede restar y concluir que:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{k\downarrow\infty} \mu(F_n).$$

Ejemplo.

Supóngase que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es no decreciente y continua; esto es, $\lim_{x\uparrow a} f(x) = f(a)$ para cada $a \in \mathbb{R}$. Consideremos el semianillo

$\mathcal{S} = \{[a,b)\colon a,b \in \mathbb{R} \text{ y } a \leq b\}$

Ahora se define $\mu\colon \mathcal{S} \to [0.\infty)$ por $\mu\big([a,b)\big) = f(b) - f(a)$ si $a < b$ y $\mu(\emptyset) = 0$. Observamos que esta función es una medida.

3.1.2. Definición de medida de Lebesgue. Propiedades

En esta sección se presenta una forma de construir medidas con distintas propiedades a partir de conceptos más primitivos, se demuestra la unicidad de la medida obtenida y dando como caso particular la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Definición 11 [Casi-medida].

Sea $X \neq \emptyset$; y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un álgebra. Una casi-medida es una función conjuntista $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu(A) \geq 0$, para toda $A \in \mathcal{A}$.

3) Si (A_n) es una sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observamos de la definición que como $\mu(\emptyset) = 0$, entonces μ es aditiva y además monótona.

Consideremos ahora (A_n) una sucesión de elementos no necesariamente disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene que:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Si $\mu(X) < \infty$ entonces decimos que μ es finita y si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$con $\mu(A_n) < \infty$, entonces la casi-medida se llama σ-finita.

El siguiente concepto es el de media exterior, será usado para construir una medida.

Definición 12 [Medida exterior].

Una medida exterior es una función conjuntista $\rho: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

1) $\rho(\emptyset) = 0$.

2) $\rho(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{P}(X)$.

3) $\rho(E) \leq \rho(F)$ si $E \subset F \subset X$. (Monotonía)

4) $\rho(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n)$ para toda sucesión (E_n) de subconjuntos de X. (σ-subaditividad)

Notamos que por la propiedad 1), ρ también es subaditiva y de forma análoga al caso de las casi-medidas, si $\rho(X) < \infty$ se llama finita y si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$con $\rho(E_n) < \infty$, se denomina σ-finita.

Una manera muy común dentro del análisis para obtener funciones que son medidas, es extender funciones para que éstas tengan un dominio más grande y cumplan las condiciones para ser medidas. Asociada a cada casi-medida tenemos una medida exterior, que resulta de extender la casi-medida, el método que se dará es "aproximar desde afuera" a los subconjuntos de X, por medio de cubiertas numerables de elementos de $\mathcal{A}$.

Ejemplo. Medida exterior.

Considera $\mathbb{R}$ con la topología dada por la métrica usual, para este ejemplo se considera cualquier espacio métrico separable, los cuales son segundo numerables, es decir tienen una base numerable para su topología. Sea

$\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ Una base numerable para la topología de $\mathbb{R}$. Definimos $\rho : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1]$ de la siguiente manera:

$$\rho(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(E)}{2^n}$$

en donde:

$\rho_n(E) = \begin{cases} 1 \ si \ E \cap U_n \neq \emptyset, \\ 0 \ si \ E \cap U_n = \emptyset. \end{cases}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

Entonces ρ es una medida exterior y tiene la siguiente propiedad:

$$\rho(E) = \rho(\bar{E})$$

para todo $E \subset X$, donde $\bar{E}$ es la cerradura de E.

La siguiente es la definición de la medida exterior generada por una casi-medida μ.

Definición 13 [Medida exterior generada por una casi-medida].

Sea $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una casi-medida. Definimos $\mu^*: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ de la siguiente forma:

$$\mu^*(E) = inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{A} \ (n \in \mathbb{N}) \right\}$$

para todo $E \subset X$.

Una sucesión (A_n) de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es llamada una $\mathcal{A}$ -cubierta de E, μ^* se denomina la medida exterior generada por μ a continuación se demuestra que esta función está bien definida y que en efecto es una medida exterior.

Observación 2. Dada una casi-medida μ, la función μ^* definida antes siempre existe pues para todo $E \subset X$ ya que $X \in \mathcal{A}$, se tiene que el conjunto de $\mathcal{A}$-cubiertas es no vacío, por lo tanto, el conjunto de sumas a las que obtenemos el ínfimo también es no vacío y es acotado inferiormente por cero, ahora por propiedades vistas en cursos anteriores de Cálculo, el ínfimo existe. Notemos que con las definiciones presentadas para este curso, tanto $\mu(E)$, como $\mu^*(E)$ pueden tener el valor ∞ para algún $E \subset X$.

Teorema 5. La función $\mu^*: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ de la definición anterior es una medida exterior y además es una extensión de μ, es decir:

$$\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$$

Demostración. De la definición se tiene que como $0 \leq \mu(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$, entonces $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ para cualquier sucesión (A_n) de elementos de $\mathcal{A}$, así dado $E \subset X$ tienes que cero es cota inferior del conjunto $\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ , } A_n \in \mathcal{A}\ (n \in \mathbb{N})\}$, por lo que

$$0 \leq \mu^*(E).$$

Considera la $\mathcal{A}$-cubierta de $\emptyset$ dada por $\emptyset, \emptyset, \ldots$, entonces $\mu^*(\emptyset) \leq 0$ ya que μ es una casi-medida y junto a la conclusión anterior tenemos que $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Sean $E \subset F \subset X$. Como toda $\mathcal{A}$-cubierta de F es $\mathcal{A}$-cubierta de entonces, de la definición tenemos que:

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(F).$$

Observa ahora la σ-subaditividad de μ^*. Sea (E_n) una sucesión de subconjuntos de X. Si $\mu^*(E_{n_0}) = \infty$ para algún n_0, entonces por la monotonía se tiene:

$$\infty = \mu^*(E_{n_0}) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

así que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Ahora supón que $\mu^*(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\epsilon > 0$, para cada n tomamos una $\mathcal{A}$-cubierta numerable $\left(A_i^{(n)}\right)$ de E_n tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i^{(n)}\right) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n)$ tenemos que el conjunto $\{A_i^{(n)}: (i,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ es una $\mathcal{A}$-cubierta de $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y por lo tanto se verifica que:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{(i,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mu\left(A_i^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i^{(n)}\right)\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\,(E_n)\right) + \epsilon$$

Esto pasa para cualquier ϵ arbitraria así tenemos que $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$, lo que prueba que la función μ^* es σ-subaditiva, por lo tanto constituye una medida exterior.

Sea $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$, sean (A_i) una $\mathcal{A}$-cubierta de A y $B_i = A \cap A_i$, entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_i$ y además $\mu(B_i) \leq \mu(A_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$ por lo que $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, entonces por las propiedades de μ tenemos que:

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

por lo tanto

$$\mu(A) = \mu^*(A),$$

así que μ^* extiende a μ.

Por otra parte, μ es σ-finita si y sólo si μ^* es σ-finita.

La noción de medida de Lebesgue es una extensión natural de los conceptos de longitud, área y volumen. En particular, la medida de Lebesgue alguna figura geométrica en $\mathbb{R}^2$ resulta ser su área mientras que en $\mathbb{R}^3$ es su volumen.

Sea $\mathcal{S}$ un semianillo que contiene el conjunto vacío y todos los conjuntos de la forma $A = \prod_{i=1}^{n}[a, b)$, donde $-\infty < a_i < b_i < \infty$ para cada $i \in \mathbb{N}$, se observa que la función $\lambda: \mathcal{S} \to [0, \infty)$ definida por $\lambda(\emptyset) = 0$ y $\lambda(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ es σ-aditiva.

Teorema 6. La función $\lambda: \mathcal{S} \to [0, \infty)$ definida anteriormente es una medida, llamada la **medida de Lebesgue** sobre $\mathcal{S}$.

Demostración.

a prueba es por inducción sobre la dimensión de $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathcal{S}_n$ que denota el semianillo $\mathcal{S}$ sobre $\mathbb{R}^n$, y sus corresponde funciones por λ_n. Para $n = 1$ resulta de un ejemplo anterior. Ahora supóngase que λ_n es una medida para alguna n. Observamos que λ_{n+1} es σ-aditiva sobre $\mathcal{S}_{n+1}$. Para terminar, sea $A \times [a, b) = \bigcup_{i=1}^{\infty}[A_i \times [a_i, b_i)]$, con $A \in \mathcal{S}_n$, $A_i \in \mathcal{S}_n$ para cada i, y la sucesión $\{A_i \times [a_i, b_i)\}$ son pares disjuntos. Se deduce que $\chi_{A\times[a,b)} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i\times[a_i,b_i)}$. Ahora para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\chi_A(x) \cdot \chi_{[a,b)}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{[a_i,b_i)}(t).$$

Fijemos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, y sea $\phi_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i}(x) \cdot \chi_{[a_i,b_i)}(t)$. Entonces cada ϕ_k es una función para $(\mathbb{R}, \mathcal{S}_1, \lambda_1)$ tal que $\phi_k(t) \uparrow \chi_A(x) \cdot \chi_{[a,b)}(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, así que se tiene que $\sum_{i=1}^{k}(b_i, a_i)\chi_{A_i}(x) \uparrow (b-a)\chi_A(x)$ para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Como por hipótesis de inducción $(\mathbb{R}, \mathcal{S}_n, \lambda_n)$ es un espacio de medida puede verse que:

$$\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i)\lambda_n(A_i) \uparrow (b-a)\lambda_n(A).$$

Esto es,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{n+1}\left(A_i \times [a_i, b_i)\right) = \lambda_{n+1}\left(A \times [a, b)\right).$$

Por lo tanto es λ_{n+1} es σ-aditiva.

Un intervalo de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma $\prod_{i=1}^{n} I_i$ donde cada I_i , es un intervalo de $\mathbb{R}$. Si cada I_i; es además un intervalo abierto y acotado de $\mathbb{R}$, entonces $\prod_{i=1}^{n} I_i$; es llamado un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Además se observa que cada intervalo de esta forma es una medida de Lebesgue.

Una fórmula útil para la medida de Lebesgue exterior es la siguiente:

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(I_i) \colon \text{donde cada } I_i \text{ es un intervalo abierto acotado y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$$

3.1.3. Conjuntos Lebesgue medibles

En general puedes ver que no todas las medidas exteriores son medidas, esto suele ocurrir porque el $\mathcal{P}(X)$ es un dominio "muy grande". La manera en que procede es elegir algunos subconjuntos de X en donde la medida exterior sea aditiva.

La definición que se utilizará fue dada por K. Carathéodory en 1918.

Definición 13 [Lebesgue-medible].

Sea $\rho: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida exterior. Decimos que $E \subset X$ es **Lebesgue-medible** (o **ρ-medible**) si:

$$\rho(B) = \rho(B \cap E) + \rho(B \setminus E)$$

Para todo $B \subset X$. Es decir si E y $X \setminus E$ dividen aditivamente a cualquier subconjunto de X.

Se Denota $\mathcal{A}^{\rho} = \{E \subset X: E\ es\ Lebesgue - medible\}$ y en el caso de una medida exterior μ^* generada por una casi-medida μ, denotaremos $\mathcal{A}^* = \{E \subset X: E\ es\ \mu^* - medible\}$.

Observación 3. Nota que como toda medida exterior es subaditiva, basta pedir:

$$\rho(B) \geq \rho(B \cap E) + \rho(B \setminus E)$$

para todo $B \subset X$.

La proposición siguiente es para identificar algunos de los elementos de $\mathcal{A}^{\rho}$.

Proposición 2. Sea $\rho: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida exterior, entonces:

a) $E \in \mathcal{A}^{\rho} \Leftrightarrow X \setminus E \in \mathcal{A}^{\rho}$.

b) $E \in \mathcal{A}^{\rho}, si\ \rho(E) = 0$.

Demostración.

a) $E \in \mathcal{A}^{\rho} \Leftrightarrow \rho(B) = \rho(B \cap E) + \rho(B \setminus E) = \rho\big(B \setminus (X \setminus E)\big) + \rho(B \cap (X \setminus E) \Leftrightarrow (X \setminus E) \in \mathcal{A}^{\rho}$.

b) Como ρ es no-negativa y monótona se tiene que:

$$\rho(B \cap E) = 0\ y\ \rho(B \setminus E) \leq \rho(B)\ para\ todo B \subset X$$
$$\Rightarrow \rho(B) \geq \rho(B \cap E) + \rho(B \setminus E)$$

Por la Observación 2 se tiene que $E \in \mathcal{A}^{\rho}$.

Teorema 6. (De extensión de K. Carathéodory – E. Hopf (1918)).

Sea $\rho: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida exterior, entonces:

a) $\mathcal{A}^{\rho}$ es una σ-álgebra.

b) $\bar{\rho} = \rho|_{\mathcal{A}^{\rho}}: \mathcal{A}^{\rho} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una medida completa. En caso de que $\rho = \mu^{*}$ sea la medida exterior generada por una casi-medida $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, entonces:

c) $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^{*}$

Demostración.

a) Por la proposición 1, se tiene que $\mathcal{A}^{\rho}$ es cerrado bajo complementos y $\rho(\emptyset) = 0$, entonces $\emptyset \in \mathcal{A}^{\rho}$; basta demostrar que $\mathcal{A}^{\rho}$ es cerrado bajo uniones numerables.

Sean $E_1, E_2 \in \mathcal{A}^{\rho}$, de la definición de conjuntos Lebesgue-medibles se tiene que para todo $B \subset X$ el conjunto E_2 cumple:

$$\rho(B \cap E_1) = \rho\big((B \cap E_1) \cap E_2\big) + \rho\big((B \cap E_1) \setminus E_2\big) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\rho(B \setminus E_1) = \rho\big((B \setminus E_1) \cap E_2\big) + \rho\big((B \setminus E_1) \setminus E_2\big) \qquad \textbf{(2)}$$

Sumando (1) y (2), como $E_1 \in \mathcal{A}^{\rho}$:

$$\begin{aligned}\rho(B) = \rho(B \cap E_1) + \rho(B \setminus E_1) = \rho(B \cap E_1 \cap E_2) + \rho\big((B \cap E_1) \setminus E_2\big)\\ +\rho\big((B \cap E_2) \setminus E_1\big) + \rho\big(B \setminus (E_1 \cup E_2)\big)\end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

Esto es válido para cualquier $B \subset X$ y podemos sustituir B por $B \cap (E_1 \cup E_2)$ en la ecuación (3):

$$\rho\big(B \cap (E_1 \cup E_2)\big) = \rho(B \cap E_1 \cap E_2) + \rho\big((B \cap E_1) \setminus E_2\big) + \rho((B \cap E_2) \setminus E_1) \qquad \textbf{(4)}$$

Despejando $\rho(B \cap E_1 \cap E_2)$ de (4) y sustituyendo en (3) tenemos que:

$$\rho(B) = \rho\big(B \cap (E_1 \cup E_2)\big) + \rho\big(B \setminus (E_1 \cup E_2)\big)$$

para todo $B \subset X$, por lo tanto $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}^{\rho}$. Se sigue por inducción que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{A}^{\rho}$.

Sea (E_n) una sucesión de elementos de $\mathcal{A}^\rho$, a partir de ella es posible construir una sucesión (F_n) tal que:

· $F_n \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

· $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$ y

· $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Esto es un ejercicio sencillo de teoría de conjuntos así que se dará por hecho. Si tomamos una sucesión cualquiera, la unión de los elementos de esta sucesión puede ser sustituida por la unión de elementos disjuntos de elementos también de $\mathcal{A}^\rho$, así que basta probar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}^\rho$, donde (E_n) es una sucesión de elementos ajenos de $\mathcal{A}^\rho$.

Si E_1, E_2 son disjuntos la ecuación (4) se convierte:

$$\rho\big(B \cap (E_1 \cup E_2)\big) = \rho(B \cap E_1) + \rho(B \cap E_2) \text{ para todo } B \subset X \tag{5}$$

Nuevamente procediendo por inducción se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\rho\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho(B \cap E_i) \tag{6}$$

para todo $B \subset X$ con $E_1, \dots, E_n$ subconjuntos ajenos en $\mathcal{A}^\rho$.

Sea (E_i) una sucesión de conjuntos ajenos, denota:

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \ (n \geq 1) \ y \ E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

entonces $X \setminus E \subset X \setminus F_n$ y como $F_n \in \mathcal{A}^\rho$ se sigue de (6), y de lo obtenido a partir de (3) y (4) que:

$$\rho(B) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \rho(B \cap E_i)\right) + \rho(B \setminus E)$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ y $B \subset X$, por lo que:

$$\rho(B) \geq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho(B \cap E_i)\right) + \rho(B \setminus E)$$

y como ρ es σ-subaditiva entonces $\rho\big(B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)\big) = \rho(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \cap E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \rho(B \cap E_i)$, por lo tanto:

$$\rho(B) \geq \rho(B \cap E) + \rho(B \setminus E) \tag{7}$$

para todo $B \subset X$, así que $E \in \mathcal{A}^{\rho}$, por lo tanto, $\mathcal{A}^{\rho}$ es una σ-álgebra.

b) Por la definición de la $\bar{\rho}: \mathcal{A}^{\rho} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ésta es no-negativa y $\bar{\rho}(\emptyset) = 0$. Así que basta probar que $\overline{\rho}$ es σ-aditiva.

Para facilitar la nomenclatura decimos que una sucesión de subconjuntos es disjunta si: $E_j \cap E_i = \emptyset$ cuando $i \neq j$.

Sean (E_i) una sucesión disjunta de elementos en $\mathcal{A}^{\rho}$ y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ por el inciso (a) $E \in \mathcal{A}^{\rho}$, así $\bar{\rho}(E) = \rho(E)$. Si ponemos $B = E$ en (7) tenemos que:

$$\bar{\rho}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\rho}(E_i) \,,$$

y como ρ es σ-subaditiva, $\bar{\rho}$ es σ-subaditiva, por lo que:

$$\bar{\rho}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\rho}(E_i),$$

por lo tanto $\bar{\rho}$ es subaditiva. Por lo tanto ρ es medida.

Sean $E \in \mathcal{A}^{\rho}$ con $\bar{\rho}(E) = 0$ y $F \subset E$ dados, entonces $\rho(F) = 0$ y por Proposición 1.b) tenemos que $F \in \mathcal{A}^{\rho}$, eso prueba que $\bar{\rho}$ es completa.

c) Sea $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una casi-medida y $\rho = \mu^*$ la medida exterior generada. Como $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra basta probar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Sean $A \in \mathcal{A}$ y $B \subset X$, si $\mu^*(B) = \infty$, entonces

$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$, esto de manera trivial. Ahora supongamos $\mu^*(B) < \infty$. Para $\epsilon > 0$ dada, hallemos una $\mathcal{A}$-cubierta numerable (A_n) de B tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(B) + \epsilon \, .$$

Como $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$, por la monotonía y la σ-subaditividad de μ^* y la aditividad de μ obtenemos:

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{n} (A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(B) + \epsilon.$$

Esto ocurre para cualquier $\epsilon > 0$, así que $A \in \mathcal{A}^*$.

Nuevamente para facilitar notación denotaremos $\bar{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$.

Hasta ahora se ha dado una forma de construir una medida para una σ-álgebra a partir de una medida exterior, o más general, de una casi-medida; podemos preguntarnos las propiedades que esta medida tiene con respecto a la función que tomamos como base para construirla, el siguiente teorema da una información muy importante a este respecto para un tipo especial de casi-medida, nos dice que la medida $\bar{\mu}$ que construimos sobre la σ-algebra $\mathcal{A}^*$ es única con las propiedades que se expusieron, esto se verá con más claridad en el enunciado siguiente.

Teorema 7. (H. Hahn (1921).

Sean $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una casi-medida σ-finita, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}^*$ y $\nu: \mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida tal que: $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $\bar{\mu}(E) = \nu(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}^*$.

Esta unicidad es importante en el momento en que deseamos plantearnos la construcción de medidas distintas a las que ya tenemos, pues con esas propiedades sólo tenemos una posibilidad de extender a la casi medida μ.

Teorema 8.

Un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ es Lebesgue medible si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe un conjunto abierto A, tal que $E \subseteq A$, y $\lambda(A \setminus E) < \epsilon$.

El teorema expresa que aquellos conjuntos que son Lebesgue medibles en $\mathbb{R}$ pueden ser aproximados "desde afuera" por abiertos del espacio, esta condición es bastante útil para caracterizar los conjuntos medibles, pues de inicio nos dice que todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ son Lebesgue medibles, más aún el siguiente resultado hace ver que la categoría de los Lebesgue medibles incluye a todos los conjuntos de Borel.

Teorema 9. Si E es un conjunto de Borel sobre $\mathbb{R}^n$, entonces E es Lebesgue medible

3.2. Funciones medibles

El concepto de función medible es importante porque permite construir un conjunto de funciones que contiene a otras funciones definidas en cursos anteriores tales como las continuas, las **Riemann-Integrables,** y cómo estas satisfacen ciertas propiedades algebraicas, además, las variables aleatorias definidas en Probabilidad son un ejemplo de función de medida, la definición de función medible es casi copia de la continua, lo que nos recuerda la manera en que la matemática se generaliza.

3.2.1. Algunas Aplicaciones

Ya que existe la posibilidad de que algún conjunto tenga medida infinita, se trabaja con el sistema de números reales ampliado al que se denota por $\mathbb{R}^*$ es decir, se agregarán los símbolos $\{-\infty, \infty\}$ que cumpla ciertas propiedades.

Definición 14. El **sistema de los reales extendido** está formado por los números reales y los símbolos $-\infty, \infty$ tal que las operaciones entre reales son las ya definidas, $a < \infty$, $-\infty < a$, para todo real a, $a + \infty = \infty$, para a real o $a = \infty$;$a \cdot \infty = \infty (a > 0)$; $a \cdot \infty = -\infty (a < 0)$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $0 \cdot \infty = \infty$, se dan definiciones similares para $-\infty$ y finalmente $\infty - \infty$, no está definido.

Una propiedad se satisface **casi en todas partes (c.t.p.)**, si se satisface en todo punto excepto un conjunto de medida cero, es decir si *A* es el conjunto en que falla la condición, entonces $\mu^*(A) =) 0 \ (donde\ \mu^*\ es\ la\ medida\ exterior\ generada\ por\ \mu$ y se denota que la propiedad se cumple *c.t.p.*

Definición 15. Un **espacio de medida** es una terna (X, S, μ) formada por un conjunto $X(de\ reales)$, un $\sigma - anillo\ S$, y una medida μ sobre S.

Las propiedades más usadas serán las siguientes:

1. $f = g\ c.t.p\ si\ \mu^*(\{x \in X | f(x) \neq g(x)\}) = 0.$

2. $f \geq g\ c.t.p.si\ \mu^*(\{x \in X | f(x) < g(x)\}) = 0.$

3. $f_n \to g_n\ c.t.p.\ \mu^*(\{x \in X | f_n(x) \nrightarrow g_n(x)\}) = 0.$

4. $f_n \uparrow f\ p.c.t.$. si $f_n \leq \mathrm{f_{n+1}}$ p.c.t. para toda *n* y $f_n \to f$ p.c.t.

5. $f_n \downarrow f\ \ p.c.t.$. si $f_{n+1} \leq f_n$ p.c.t. para toda *n* y $f_n \to f$ p.c.t

Definición 16. Sea $f: X \to \mathbb{R}$ una función. Si $f^{-1}(\mathcal{O})$ es medible para todo abierto $\mathcal{O}\ de\ \mathbb{R}$, entonces se dice que f es una **función medible.**

Un primer teorema nos caracteriza a las funciones medibles.

Teorema 9. Para cada función $f: X \to \mathbb{R}$, las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. f es medible.

2. $f^{-1}((a,b))$ es medible para cada intervalo abierto acotado (a,b) de $\mathbb{R}$.

3. $f^{-1}(\mathcal{C})$ es medible para todo subconjunto cerrado $\mathcal{C}\ de$ $\mathbb{R}$.

4. $\mathrm{f}^{-1}([\mathrm{a},\infty))$ es medible para todo$a \in \mathbb{R}$.

5. $f^{-1}((-\infty,a])$ es medible para todo $a \in \mathbb{R}$.

6. $f^{-1}(B)$ es medible para todo subconjunto de Borel B.

Ejemplos.

Si f es medible entonces $\{x: f(x) = \alpha\}\ es\ medible, pues$ $\{x: f(x) = \alpha\} = \{x: f(x) \geq \alpha\} \cap \{x: f(x) \leq \alpha\}$ para α real finito, para $\alpha = \infty$, se tiene $\{x: f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x: f(x) > n\}$, de manera similar para $\alpha = -\infty$.

Las funciones constantes son medibles ya que $f^{-1}([a,\infty))$=$\emptyset\ o\ \mathbb{R}$ que es medible para todo a real.

La función característica sobre cualquier conjunto A es medible, si y sólo si A es un conjunto medible ya que $\{x \in \mathbb{R}: \chi_A(x) < \alpha\} = A, \mathbb{R}\ o \emptyset$, dependiendo del valor de α.
Las funciones continuas son medibles, ya que $f^{-1}((\alpha,\infty))$ es abierto para todo α y por tanto medible.

Se define la igualdad p.c.t. (para casi todo) lo que nos da una forma de equivalencia entre funciones medibles.

Teorema 10. Si f es una función medible y $g: X \to \mathbb{R}$ satisface $f = g$ p.c.t., entonces g es una función medible.

Demostración.

Si $A = \{x \in X: f(x) \neq g(x)\}$, entonces de la hipótesis $\mu^*(A) = 0$, y así A es medible. Ahora, sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Ya que f es medible, $f^{-1}(\mathcal{O})$ es medible, de aquí que $A^c \cap g^{-1}(\mathcal{O}) = A^c \cap f^{-1}(\mathcal{O})$ es un conjunto medible. Ya que $A \cap g^{-1}(\mathcal{O})$ tiene medida exterior cero, es medible. De aquí,

$$g^{-1}(\mathcal{O}) = [A \cap g^{-1}(\mathcal{O})] \cup [A^c \cap g^{-1}(\mathcal{O})]$$

Es un conjunto medible, así que g es una función medible.

Otras propiedades de las funciones medibles se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema 11. Si f y g son funciones medibles, entonces los siguientes conjuntos

a) $\{x \in X: f(x) > g(x)\}$.
b) $\{x \in X: f(x) \geq g(x)\}$.
c) $\{x \in X: f(x) = g(x)\}$.

Son todos medibles.

Demostración.

Demostraremos a) y los otros se deducen de éste.

Sea $r_1, r_2, \ldots$ un enumeración de los números racionales de $\mathbb{R}$, entonces

$\{x \in X: f(x) > g(x)\} = \cup_{n=1}^{\infty}[\{x \in X: f(x) > r_n\} \cap \{x \in X: g(x) < r_n\}]$ es medible ya que es unión numerable de conjuntos medibles.

El siguiente teorema establece que la medibilidad es preservada por operaciones algebraicas entre funciones.

Teorema 12. Sean f y g funciones medibles, entonces las siguientes proposiciones son válidas:

1. $f + g$ es una función medible.

2. fg es una función medible.

3. $|f|, f^+, y\ f^-$ son funciones medibles.
4. $f \vee g$ y $f \wedge g$ son funciones medibles.

Demostración.

1) Si c es un número constante, entonces $c - g$ es medible, ya que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $\{x \in X: c - g(x) \geq a\} = \{x \in X: g(x) \leq c - a\}$ es un conjunto medible, ahora si $a \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto $(f + g)^{-1}([a, \infty)) = \{x \in X: f(x) + g(x) \geq a\} = \{x \in X: f(x) \geq a - g(x)\}$ es medible por el teorema anterior, por tanto $f + g$ es medible.

2) Nota que f^2 es medible, ya que si $a \in \mathbb{R}$, entonces se tiene $\{x \in X: f^2(x) \leq a\} = \emptyset$ si $a < 0$ y $\{x \in X: f^2(x) \leq a\} = f^{-1}([-\sqrt{a}, \sqrt{a}])$ si $a \geq 0$. Por tanto f^2 es medible, también cf es una función medible para *c* constante, ya que si $A = \{x \in X: cf(x) \geq a\}$, entonces $A = \{x \in X: f(x) \geq \frac{a}{c}\}$ para *c>0* y $A = \{x \in X: f(x) \leq \frac{a}{c}\}$ para $c < 0$, combinando 1) y la relación $fg = 1/2[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$.

3) La medibilidad de $|f|$ se sigue de las relaciones $\{x \in X : |f(x)| \leq a\} = \emptyset$ si $a < 0$, y $\{x \in X : |f(x)| \leq a\} = \{x \in X : f(x) \leq a\} \cap \{x \in X : f(x) \geq -a\}$ si $a \geq 0$.
Para f^+ *y* f^- usa las identidades $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ y $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$.

4) Las identidades $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ y $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ nos dan los resultados junto con (1).

La medibilidad de funciones con la condición c.p.t (casi para todo), se preserva en sucesiones convergentes como queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 13. Para una sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles, las siguientes proposiciones son válidas:

1) Si $f_n \to f$ c.p.t., entonces *f* es una función medible.

2) Si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión acotada para cada *x*, entonces $\limsup f_n$ y $\liminf f_n$ son ambas funciones medibles.

Demostración.

1) Sea $A = \{x \in X : \lim f_n(x) = f(x)\}$ ya que $f_n \to f$ c.p.t. se sigue que $\mu^*(A^c) = 0$. Por tanto A^c y A son medibles. Ahora mostraremos que f es medible. Sea $a \in \mathbb{R}$ y observemos la igualdad $A \cap f^{-1}\big((a, \infty)\big) = A \cap \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}(\left(a + \frac{1}{n}, \infty\right))\right]$ y la medibilidad de cada f_i muestra que $A \cap f^{-1}\big((a, \infty)\big)$ es un conjunto medible. También $A^c \cap f^{-1}((a, \infty))$ es medible por ser subconjunto de un conjunto de medida cero, así $f^{-1}\big((a, \infty)\big) = \big[A \cap f^{-1}\big((a, \infty)\big)\big] \cup \big[A^c \cap f^{-1}\big((a, \infty)\big)\big]$ es un conjunto medible y por tanto *f* es una función medible.

2) Sea $\{f_n(x)\}$ sucesión acotada para cada *x*. Mostraremos que $\limsup f_n$ es una función medible. La medibilidad de $\liminf f_n$ se sigue de la identidad $\liminf f_n =$

$-\lim\sup(-f_n)$. Ahora notemos que $\lim\sup f_n$=$\bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{k=n}^{\infty} f_k$, fijemos n natural, y sea $h_m = f_n \vee f_{n+1} \vee \cdots \vee f_{n+m}$ es medible para cada m, y ya que $h_m \uparrow \bigvee_{k=n}^{\infty} f_k = g_n$(en todo), se sigue de (1) que g_n es una función medible. Ya que $g_n \downarrow \lim\sup f_n$(en todo lado) se sigue de (1) que $\lim\sup f_n$ es una función medible.

El último teorema de este tema relaciona la convergencia uniforme con la convergencia en medida, este teorema se atribuye al matemático ruso Dimitry Fedorovich Egorov (1864-1931).

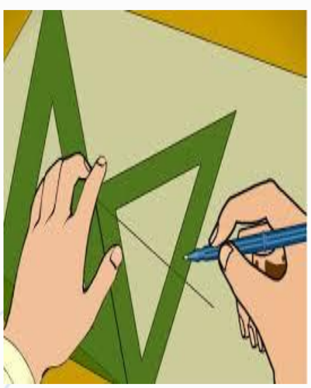
Teorema 14 (Egorov). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \to f$ p.c.t., y sea E un subconjunto medible de X tal que $\mu^*(E) < \infty$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto medible $F\ de\ E$ con $\mu^*(F) < \varepsilon$, y con $\{f_n\}$ convergiendo uniformemente a $f\ en\ E \setminus F$.

Cierre de la unidad

La medida de Lebesgue es de alguna forma una generalización del concepto de conjunto abierto, ya que todos los conjuntos abiertos son medibles. La generalización natural del concepto de función continua es la función medible con los conjuntos medibles haciendo el papel de los abiertos, también toda función continua es medible. Una ventaja de las funciones medibles queda manifiesta en el Teorema de **Egorov:** la cerradura bajo sucesiones de funciones convergentes es algo que no se da en las funciones continuas, esta convergencia es tan fuerte que la convergencia es uniforme.

El contenido de esta unidad es necesario para la siguiente en la que se definirá la Integral de **Lebesgue**, un paso más en la generalización del concepto de integral, que permitirá tener una mayor cantidad de funciones integrables.

Para saber más

 *Figura 2.* Blog matemático.	El blog de Terence Tao, uno de los matemáticos más notables de nuestra época, entre otras secciones presenta: libros, resúmenes de artículos, *apps*, etc. sobre Matemáticas en general en particular en Teoría de la Medida.	http://terrytao.wordpress.com/
 *Figura 3.* Aplicación de la teoría de la medida.	Interesante artículo sobre la aplicación de la Teoría de la Medida a la Ingeniería de Software.	http://www.cin.ufpe.br/~ssj/on_the_application_of_measurement_theory_825427.pdf

Fuentes de consulta

Básica

- Charalambos, D. (1998). *Principles of Real Analysis*. USA: Academic Press.
- De Barra, G. (2000). *Measure Theory and Integration.* India: New Age International.
- Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*. USA: Wiley.
- Galaz, F. (2002). *Medida e Integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$*.* México: University Press.
- Grabisnky, G. (2011). *Teoría de la Medida*. México: Facultad de Ciencias UNAM.
- Halmos, P. R. (1991). *Measure Theory.* USA: Springer Verlag.
- Royden, H; Fitzpatrick, P. (2010). *Real Analysis*. USA: Pearson.
- Sánchez, C; Valdés, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki.* España: Nivola.
- Schram, M. (1996). *Introduction to Real Analysis.* USA: Prentice Hall.