



MATEMÁTICAS

SEXTO SEMESTRE

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

UNIDAD 4. INTEGRAL DE LEBESGUE

Clave

005143631/06143631

Universidad Abierta y a Distancia de México





Unidad 4. Integral de Lebesgue

Índice

Presentación	2
Competencia específica	2
Logros	2
4.1. Antecedentes	3
4.1.1. Definición de la integral de Lebesgue	6
4.1.2. Propiedades	14
4.1.3. Comparación contra la integral de Riemann	17
4.2. Integral de Lebesgue de una función acotada sobre un conjunto de medida finita	21
4.2.1. Lema de Fatou	22
Cierre de la unidad	30
Para saber más	31
Fuentes de consulta	32

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Logros	2
Figura 2. Blog de Terence Tao	31



Unidad 4. Integral de Lebesgue

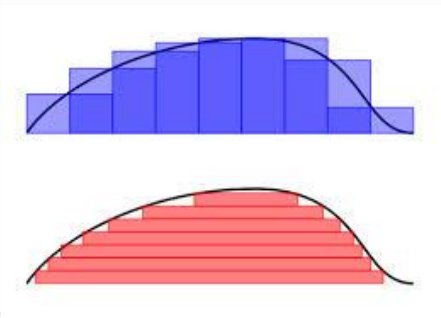
Presentación

Para desarrollar la teoría de integrabilidad es indispensable definir la integral de Lebesgue para funciones medible no negativas, así como establecer unas de sus propiedades fundamentales. Además de hacer la comparación con la integral de Riemann. Observarás que la colección de funciones semicontinuas superiormente es un espacio de funciones y este conjunto son las funciones Lebesgue integrables.

Competencia específica

Aplicar el concepto de integral de Lebesgue para calcular integrales sobre dominios no tradicionales mediante la identificación de sus características.

Logros

 <i>Figura 1. Logros.</i>	• Definir la integral de Lebesgue. • Comparar la integral de Lebesgue con los conceptos previos de medida y de integral de Riemann. • Establecer propiedades básicas de la integral de Lebesgue.
---	--



Unidad 4. Integral de Lebesgue

4.1. Antecedentes

Para poder explicarte las ideas que motivaron la teoría de integración será necesario que conozcas algunos conceptos, los cuales serán tomados en gran parte del libro *Lebesgue theory of integration. Its origins and development*.

Se puede decir que Lebesgue creó la primera teoría de la integración. Hay varias definiciones, teoremas y ejemplos que existían antes de su trabajo, pero carecían de la estructura y sistematización de una verdadera teoría, por ejemplo, la noción de integración introducida por Bernhard Riemann en 1854 se deriva de las ideas presentadas por Cauchy (1760-1848); en ésta Riemann define la condición de integrabilidad para una función $f(x)$ sobre un intervalo de la siguiente manera:

La función $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ si y sólo si las sumas de Cauchy

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}),$$

donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, se aproximan a un único valor límite cuando el tamaño de la partición del intervalo se aproxima a 0. Este único valor es por definición $\int_a^b f(x)dx$.

Históricamente esto representó una gran innovación, ya que se involucraba el concepto de función $x \rightarrow f(x)$ como una asignación diferente a la idea que se tenía en esos días. A continuación se definen algunos conceptos que permiten dar un breve panorama histórico de la integral de Lebesgue.

Sea S un conjunto acotado de números reales. Sean $I_1, I_2, \dots, I_n$ un conjunto finito de intervalos que cubren S . El contenido externo de S , $c_e(S)$, es el ínfimo de números reales de la forma $\sum_{k=1}^n L(I_k)$, donde I_k cubre a S , y $L(I_k)$ es la longitud del intervalo I_k . Análogamente, el contenido interno de S , $c_i(S)$, se define como el supremo de $\sum_{k=1}^n L(I_k)$, donde $I_k \cap I_{k'} = \emptyset$ y $\bigcup_{k=1}^n I_k \subset S$. Se dice que un conjunto es Jordan-medible si $c_i(S) = c_e(S)$.



Unidad 4. Integral de Lebesgue

Estas nociones sugirieron dos nuevas caracterizaciones de la condición de integrabilidad de Riemann. La primera de ellas adopta una visión geométrica, considerando la integral de una función en términos del área delimitada por su gráfica. Dada una función f definida y acotada en el intervalo $[a, b]$, sea E el conjunto de puntos del plano delimitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces f es Riemann-integrable si y sólo si el conjunto E es Jordan-medible, y

$$\int_b^a |f| = c(E), \quad \int_b^a f = c(E^+) - c(E^-),$$

donde E^+ y E^- denotan el semiplano positivo y negativo, la segunda caracterización de la condición de integrabilidad de Riemann consiste en que las integrales superior e inferior de f sean iguales, esto es,

$$\underline{\int_b^a f} = \overline{\int_b^a f},$$

siendo el supremo $\underline{\int_b^a f}$ y $\overline{\int_b^a f}$, el supremo y ínfimo, de

$$L = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), \quad y \quad U = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ denotan una partición de $[a, b]$, y m_i y M_i denotan, el ínfimo y el supremo de $f(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$.

Las dos caracterizaciones expuestas anteriormente hacen ver que una generalización de los conceptos de medida y medible permitiría una extensión de los conceptos de integral e integrabilidad. En otras palabras, supón que $\mathcal{M}$ denota la clase de conjuntos medibles que contiene la clase de conjuntos Jordan-medibles, y que una medida $m(E)$, ha sido definida para todos los elementos de $\mathcal{M}$ de tal manera que $m(E)$ coincide con $c(E)$ cuando E es Jordan-



Unidad 4. Integral de Lebesgue

medible. Con estas dos caracterizaciones surgen conceptos más amplios sobre medida, que representan la generalización de la integral de Riemann; cuando $\mathcal{M}$ denota la clase de conjuntos Lebesgue-medibles, las definiciones resultan ser la de la integral de Lebesgue para funciones acotadas. Fue a través de estas consideraciones que Lebesgue obtiene su generalización para la integral.

Con el nacimiento de medida atribuido a Emile Borel, el cual estudió las propiedades que una medida debía tener, se da la definición de premedida; nombre que más adelante asignaría Lebesgue. Borel, sin embargo, no probó la existencia y unicidad de dicha definición, pero gracias a las aportaciones de Lebesgue y al trabajo de Borel, es que queda incluido en la integral de Lebesgue. A los conjuntos que se refería Borel, Lebesgue los llamó borelianos.

Dos de los problemas más importantes que motivaron una nueva definición de integral son las series trigonométricas y el teorema fundamental del cálculo. El primero de estos problemas lo presentó Fourier en 1822: si una función F se puede representar como una serie trigonométrica. Es decir cuando es cierto que:

$$\int_b^a \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_b^a u_n(x)$$

Fourier asumió que la respuesta es 'siempre'. Hacia finales del siglo se demostró que no se podía integrar término a término ya que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ no tiene por qué ser Riemann integrable. Otro gran problema fue el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_b^a f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

El trabajo de Ulisse Dini y Vito Volterra mostró que existen funciones con derivadas acotadas pero no integrables. Más adelante se encontraron nuevas funciones, como las monótonas integrables, tales funciones sirvieron como ejemplo para probar que el teorema a tales funciones



Unidad 4. Integral de Lebesgue

no es aplicable. El trabajo de Lebesgue en el teorema fundamental del cálculo fue muy importante en el descubrimiento de que una función continua con variación acotada posee una derivada finita salvo quizás en un conjunto de medida cero.

Hoy en día todavía se siguen generando consecuencias de la teoría de Lebesgue, y enumerar las consecuencias sería muy difícil, tan solo se puede decir que los dos campos donde ha tenido mayor repercusión son el cálculo y la probabilidad.

4.1.1. Definición de la integral de Lebesgue

En el capítulo 3.2 se describen conceptos y algunas aplicaciones para las funciones medibles, sin embargo se retomaron los conceptos y teoremas más relevantes para este capítulo, ya que son fundamentales y además son de gran importancia para el desarrollo de esta unidad.

Definición 1. [Espacio medible]. Un **espacio medible** es una pareja $(X, \mathcal{S})$ en la que X es un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de X .

Definición 2. [Función medible] Sean $(X, \mathcal{S})$ y $(Y, \mathcal{S}')$ dos espacios medibles. Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **función medible** relativa a las σ -álgebras $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ si $f^{-1}(\mathcal{S}') \subset \mathcal{S}$, esto quiere decir $f^{-1}(E') \in \mathcal{S}$, para todo $E' \in \mathcal{S}'$. Si $Y = \mathbb{R}$ y $\mathcal{S}' = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ (donde $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ es el álgebra de Borel en $\mathbb{R}$), entonces diremos que f es medible si $f^{-1}(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{S}$.

Proposición 1. Sean $(X, \mathcal{S})$ y $(Y, \mathcal{S}')$ dos espacios medibles y $f: X \rightarrow Y$ una función. Supongamos que existe $\mathbb{E}' \subset \mathcal{P}(Y)$ tal que $\mathcal{S}(\mathbb{E}') = \mathcal{S}'$.

Demostración. Si $f: X \rightarrow Y$ es una función y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(A)$ una σ -álgebra, entonces:

$$\{F \subset Y: f^{-1}(F) \in \mathcal{S}\}$$



Unidad 4. Integral de Lebesgue

es una σ -álgebra de subconjuntos de Y . Ahora sea $\mathcal{K} = \{F' \subset Y : f^{-1}(F') \in \mathcal{S}\}$ es una σ -álgebra que por hipótesis contiene a $\mathbb{E}'$. Así $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(\mathbb{E}') \subset \mathcal{K}$, por lo tanto

$$f^{-1}(\mathcal{S}') \subset f^{-1}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{S}.$$

Notación. Si $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida, entonces se dice que una relación se mantiene casi en donde quiera (abreviado c.d.q.), cuando la relación se mantiene en casi todas partes con respecto a la medida exterior μ^* generada por μ . Las relaciones que se van a utilizar en esta sección se resumen a continuación. Suponemos que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida dada y que f y g denotan funciones reales definida en X .

- a) $f = g$ c.d.q. si $\mu^*\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0$.
- b) $f \geq g$ c.d.q. si $\mu^*\{x \in X : f(x) < g(x)\} = 0$.
- c) $f_n \rightarrow f$ c.d.q. si $\mu^*\{x \in X : f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0$.
- d) $f_n \uparrow f$ c.d.q. si $f_n \leq f_{n+1}$ c.d.q. para toda n y $f_n \rightarrow f$ c.d.q.
- e) $f_n \downarrow f$ c.d.q. si $f_{n+1} \leq f_n$ c.d.q. para toda n y $f_n \rightarrow f$ c.d.q.

Para el especial en el que $Y = \mathbb{R}$ y $\mathcal{S}' = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ se obtiene:

Corolario 1. Sean $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible y $f: X \rightarrow Y$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) f es $\mathcal{S}$ -medible.



Unidad 4. Integral de Lebesgue

- b) $f^{-1}((c, \infty)) = \{x \in X: f(x) > c\}$ pertenece a $\mathcal{S}$ para todo $c \in \mathbb{R}$.
- c) $f^{-1}((-\infty, c)) = \{x \in X: f(x) < c\}$ pertenece a $\mathcal{S}$ para todo $c \in \mathbb{R}$.
- d) $f^{-1}((-\infty, c]) = \{x \in X: f(x) \leq c\}$ pertenece a $\mathcal{S}$ para todo $c \in \mathbb{R}$.
- e) $f^{-1}([c, \infty)) = \{x \in X: f(x) \geq c\}$ pertenece a $\mathcal{S}$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b) $(c, \infty) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

b) $\Rightarrow$ c) $f^{-1}((-\infty, c]) = X - f^{-1}((c, \infty))$ pertenece a $\mathcal{S}$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

c) $\Rightarrow$ d) $f^{-1}((-\infty, c)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty, c - \frac{1}{n}])$ pertenece a $\mathcal{S}$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

d) $\Rightarrow$ e) $f^{-1}([c, \infty)) = X - f^{-1}((-\infty, c))$ pertenece a $\mathcal{S}$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

e) $\Rightarrow$ a) Sea $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(X)$, entonces existe una σ -álgebra $\mathcal{S}(\mathbb{E}) \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\mathbb{E}' = \{[c, \infty): c \in \mathbb{R}\}$. Entonces $\mathcal{S}(\mathbb{E}')$ es una σ -álgebra, y además se cumple que $\mathcal{S}(\mathbb{E}') = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

Teorema 1. Si f es una función medible y $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $f = g$ c.d.q., entonces g es una función medible.

Demostración.

Si $A = \{x \in X: f(x) = g(x)\}$, entonces por hipótesis $\mu^*(A) = 0$ (recuerda que μ^* es la medida exterior), por lo que A es medible. Ahora, sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Como f es una función medible, $f^{-1}(\mathcal{O})$ es medible, y por lo tanto, $A^c \cap g^{-1}(\mathcal{O}) = A^c \cap f^{-1}(\mathcal{O})$ es un conjunto medible. Además, dado que $A \cap g^{-1}(\mathcal{O})$ tiene medida exterior cero, es medible. Por lo tanto,



Unidad 4. Integral de Lebesgue

$$g^{-1}(\mathcal{O}) = [A \cap g^{-1}(\mathcal{O})] \cup [A^c \cap g^{-1}(\mathcal{O})]$$

es un conjunto medible, por lo tanto g es una función medible.

Se continuará con más propiedades de las funciones medibles.

Teorema 2. Si f y g son funciones medibles, entonces los tres conjuntos

- a) $\{x \in X: f(x) > g(x)\},$
- b) $\{x \in X: f(x) \geq g(x)\}$ y
- c) $\{x \in X: f(x) = g(x)\}$

son todos medibles.

Demostración.

a) Si $r_1, r_2, \dots$ es una enumeración de los números racionales de $\mathbb{R}$, entonces

$$\{x \in X: f(x) > g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{x \in X: f(x) > r_n\} \cap \{x \in X: g(x) \geq f(x)\}],$$

que es medible, ya que es una unión numerable de conjuntos medibles.



Unidad 4. Integral de Lebesgue

b) Se nota que $\{x \in X: f(x) \geq g(x)\} = \{x \in X: g(x) > f(x)\}^c$, el cual es un conjunto medible por el inciso anterior (a).

c) Se observa que

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X: f(x) \geq g(x)\} \cap \{x \in X: g(x) \geq f(x)\},$$

los cuales son medibles por el inciso anterior (b).

Definición 3. [Parte positiva y parte negativa]. Sea una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, se definen los conjuntos

$$f^+ = \max\{f(x), 0\}, \quad f^- = \max\{-f(x), 0\} \quad \text{y} \quad |f| = \max\{f(x), -f(x)\}$$

La función f^+ es llamado la **parte positiva**, a f^- se le llama la **parte negativa**, y a $|f|$ el **valor absoluto** de f .

El siguiente teorema recordará algunas propiedades de funciones medibles, estudiadas anteriormente, con el fin de observar que la combinación de funciones medibles produce funciones medibles.

Teorema 3. Para dos funciones medibles f y g las siguientes afirmaciones son válidas:

- a) $f + g$ es una función medible.
- b) fg es una función medible.
- c) $|f|, f^+$ y f^- son funciones medibles.



Unidad 4. Integral de Lebesgue

Recordar que dada $\{x_n\}$ una sucesión acotada de $\mathbb{R}$, el **límite superior** de $\{x_n\}$ se define como:

$$\limsup x_n = \inf_n \left[\sup_{k \geq n} x_k \right],$$

y el **límite inferior** de $\{x_n\}$ por:

$$\liminf x_n = \sup_n \left[\inf_{k \geq n} x_k \right].$$

Por lo tanto, $\limsup f_n(x)$ y $\liminf f_n(x)$ ambos existen en $\mathbb{R}$. Por consiguiente, $\limsup f_n$ y $\liminf f_n$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ esta definido para cada $x \in X$ como:

$$(\limsup f_n)(x) = \limsup f_n(x) \text{ y } (\liminf f_n)(x) = \liminf f_n(x).$$

Teorema 4. Para una sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles, la siguiente afirmación es válida:

- Si $f_n \rightarrow f$, entonces f es una función medible.

Demostración.

Sea $A = \{x \in X : \lim f_n(x) = f(x)\}$. Dado que $f_n \rightarrow f$ c.d.q., se sigue que $\mu^*(A^c) = 0$. Entonces A^c es medible y por lo tanto, también lo es el conjunto A . Ahora sea $a \in \mathbb{R}$. Se observa la siguiente igualdad:

$$A \cap f^{-1}((a, \infty)) = A \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a + \frac{1}{n}, \infty\right)\right) \right]$$



Unidad 4. Integral de Lebesgue

y como cada f_i es medible se tiene que $A \cap f^{-1}((a, \infty))$ es un conjunto medible. Además, $A^c \cap f^{-1}((a, \infty))$ es un conjunto medible ya que es un subconjunto de un conjunto de medida cero. Por lo tanto,

$$f^{-1}((a, \infty)) = [A \cap f^{-1}((a, \infty))] \cup [A^c \cap f^{-1}((a, \infty))]$$

es un conjunto medible. Esto se sigue directamente del teorema 1, por lo tanto f es una función medible.

Definición 4. [Conjuntos de $\mathcal{S}$ -medibles]. Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida fijo. Denotamos por:

$$\mathbb{M}(X, \mathcal{S}) \text{ y } \mathbb{M}^+(X, \mathcal{S})$$

al conjunto de funciones reales $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ que son $\mathcal{S}$ -medibles y al subconjunto de éste consiste de las funciones no-negativas, respectivamente. De manera análoga definimos:

$$\bar{\mathbb{M}}(X, \mathcal{S}) \text{ y } \bar{\mathbb{M}}^+(X, \mathcal{S}),$$

para funciones extendidas que son $\mathcal{S}$ -medibles.

Definición 5. [$\mathcal{S}$ -simple] Sea un espacio medible. Una función $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama $\mathcal{S}$ -simple si s toma solamente un número finito de valores y es $\mathcal{S}$ -medible.

A continuación se describe a estas funciones. Sea $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función $\mathcal{S}$ -simple y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ todos los valores (diferentes) tomados por s ; si

$$E_i = s^{-1}(\{\alpha_i\}) = \{x \in X: s(x) = \alpha_i\},$$

entonces



Unidad 4. Integral de Lebesgue

$$E_i \in \mathcal{S}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{y} \quad s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}. \quad 3.1$$

Inversamente, si s es una combinación lineal de funciones características de conjuntos ajenos en $\mathcal{S}$, entonces es $\mathcal{S}$ -medible. Concretamente si $s = \sum_{i=1}^n \beta_i \chi_{F_i}$ entonces para todo $c \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in X: s(x) > c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \beta_i \leq c \text{ para todo } i = 1, \dots, n \\ \bigcup \{F_i: \beta_i > c\}, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

por lo tanto es $\mathcal{S}$ -medible. Así, s es $\mathcal{S}$ -simple si y sólo si es una combinación lineal de funciones características de conjuntos ajenos en $\mathcal{S}$. A la descripción de s como en 3.1 con los α_i diferentes y con los E_i ajenos, la llamaremos canónica.

Definición 6. [Integral de funciones simples no negativas]. Sea $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función simple y no negativa. Sea $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$ su descripción canónica. Definimos la **integral de s** con respecto a la medida μ , denotada por $\int s \, d\mu$ como el número real, dado por:

$$\int s \, d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(E_j).$$

La definición anterior tiene la desventaja de requerir la descripción canónica de s , sin embargo será posible eliminar esta restricción en cuanto se establezcan las siguientes propiedades.

Definición 7. [Función escalonada]. Una función ϕ es llamada **función escalonada** si ϕ tiene una representación de la forma $\phi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{\beta_j}$, donde cada β_j es un conjunto que tiene medida finita, esto quiere decir que $\mu(\beta_j) < \infty$.

Definición 8. [Función superior]. Una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **función superior** si existe una sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones escalonadas tal que:

$$a) \quad \phi_n \uparrow f \text{ c.d.q. y,}$$



Unidad 4. Integral de Lebesgue

$$b) \lim \int \phi_n d\mu < \infty.$$

La colección de todas las funciones superiores se denota por $\mathcal{U}$.

Definición 9.[Integral de Lebesgue] Sea f una función semicontinua superiormente tal que $\phi_n \rightarrow f$ es convergente. Entonces la **integral de Lebesgue** (o simplemente integral) de f se define por

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n d\mu$$

Una vez más, se hace hincapié en el hecho de que el valor de la integral de Lebesgue de función superior es independiente de la sucesión de funciones escalonadas.

4.1.2. Propiedades

Proposición 2. Sean $s, t \in \mathbb{M}^+(X, \mathcal{S})$ y $c \geq 0$ dados, entonces:

- a) $\int c \cdot s d\mu = c \int s d\mu.$
- b) $\int (s + t) d\mu = \int s d\mu + \int t d\mu.$

Demostración.

1) Si $c = 0$, entonces $cs = 0\chi_x$, así que $\int c \cdot s d\mu = 0$, $\mu(X) = 0 = c \int s d\mu.$

Si $c > 0$ y $\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$ es la descripción canónica de s , entonces

$$\sum_{j=1}^n c \cdot \alpha_j \chi_{E_j},$$

es la descripción canónica de $c \cdot s$, así que:



Unidad 4. Integral de Lebesgue

$$\int c \cdot s \, d\mu = \sum_{j=1}^c c \cdot \alpha_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(E_j) = c \int s \, d\mu.$$

2) Se escribe a s y t en su forma canónica:

$$s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j} \quad \text{y} \quad t = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{F_j}$$

luego entonces $s + t$ admite la siguiente representación:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (\alpha_j + \beta_k) \chi_{E_j \cap F_k},$$

la cual podría ser no ser la canónica. Sean $c_1, \dots, c_p$ los distintos números reales del conjunto

$$\{\alpha_j + \beta_k : j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m\}$$

y

$$G_l = \bigcup \{E_j \cap F_k : \alpha_j + \beta_k = c_l\}, \quad l = 1, \dots, p$$

Se observa que $\mu(G_l) = \sum_{(l)} \mu(E_j \cap F_k)$, en donde la notación $\sum_{(l)}$ significa que la suma se extiende sobre las parejas (j, k) tales que $\alpha_j + \beta_k = c_l$. En estos términos, la descripción canónica de $s + t$ esta dada por:

$$\sum_{l=1}^p c_l \chi_{G_l},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int (s + t) \, d\mu &= \sum_{l=1}^p c_l \mu(G_l) = \sum_{l=1}^p \sum_{(l)} c_l \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{l=1}^p \sum_{(l)} (\alpha_j + \beta_k) \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (\alpha_j + \beta_k) \mu(E_j \cap F_k) \end{aligned}$$



Unidad 4. Integral de Lebesgue

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^m \beta_k \sum_{j=1}^n \mu(E_j \cap F_k) \\
 &\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m \beta_k \mu(F_k) = \int S \, d\mu + \int t \, d\mu.
 \end{aligned}$$

Por inducción, es posible generalizar a proposición 2 b) para cualquier numero finito.

Teorema 5. Si f y g son funciones superiores tales que $f \geq g$ c.d.q., entonces $\int f \, d\mu \geq \int g \, d\mu$.
En particular si $f \in \mathcal{U}$ y satisface $f \geq 0$ c.d.q., entonces $\int f \, d\mu \geq 0$.

Demostración.

Sea $\{\phi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ sucesiones para f y g , respectivamente, entonces $\min\{\phi_n, \psi_n\} \uparrow g$ c.d.q., y así, $\min\{\phi_n, \psi_n\}$ es una sucesión que genera a g . Entonces se tiene $\int \phi_n \, d\mu \geq \int \frac{1}{2}(\phi_n + \psi_n - |\phi_n - \psi_n|) \, d\mu$ para cada n . Por lo tanto,

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n \, d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{1}{2}(\phi_n + \psi_n - |\phi_n - \psi_n|) \, d\mu = \int g \, d\mu$$

con lo que se obtiene la desigualdad.

Teorema 6. Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones superiores tal que $f_n < f_{n+1}$, $f_n \rightarrow f$ c.d.q. y el $\lim \int f_n \, d\mu < \infty$, entonces f es una función superior y $\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$.

Demostración.

Para cada i se elige una sucesión $\{\phi_n^i\}$ de funciones superiores, tal que $\phi_n^i \uparrow f_i$ c.d.q. Ahora para cada n sea, $\psi_n = \max\{\phi_n^1, \dots, \phi_n^n\}$, y hay que notar cada ψ_n es una función escalonada tal que



Unidad 4. Integral de Lebesgue

$\psi_n \uparrow f$ c.d.q. Además, observar que $\psi_n < f_n$ para cada n , y en consecuencia, $\lim \int \psi_n d\mu \leq \lim \int f_n d\mu < \infty$. Ahora, dada cualquier i se tiene $\phi_n^i \leq \psi_n$ para toda $n \geq i$, se sigue que $\int f_i d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n^i d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n d\mu$ para todo i .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n d\mu = \int f d\mu.$$

4.1.3. Comparación contra la integral de Riemann

Se revisa la relación que existe entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann, limitándonos al caso más sencillo de la medida lineal de Lebesgue en la recta.

Teorema. Si existe la integral de Riemann

$$I = (R) \int_a^b f(x) dx,$$

entonces f es integrable según Lebesgue y

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera P_n la partición del segmento $[a, b]$ en 2^n intervalos mediante los puntos:

$$x_k = a + \frac{k}{2^n} (b - a)$$

Para el cálculo de la integral de Riemann se toman:

$$m_{nk} = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_{nk} = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

La sumas inferior y superior de f para esta partición del intervalo $[a, b]$ están dadas respectivamente por:



Unidad 4. Integral de Lebesgue

$$L(P_n, f) = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} m_{nk}$$

$$U(P_n, f) = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk},$$

Como f es Riemann integrable, se cumple que:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f).$$

Se eligen

$$\overline{f_n}(x) = M_{nk}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$\underline{f_n}(x) = m_{nk}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k]$$

En el punto $x = b$ las funciones $\overline{f_n}$ y $\underline{f_n}$ pueden ser definidas arbitrariamente. Se deja como practica el ejercicio de probar que las integrales de Riemann son:

$$\int_{[a,b]} \overline{f_n}(x) d\mu = U(P, f),$$

$$\int_{[a,b]} \underline{f_n}(x) d\mu = L(P, f)$$

Como la sucesión $\{\overline{f_n}\}$ es no creciente y la sucesión $\{\underline{f_n}\}$ no decreciente, se tiene que en casi todos los puntos

$$\overline{f_n}(x) \rightarrow \overline{f}(x) \geq f(x), \quad \underline{f_n}(x) \rightarrow \underline{f}(x) \leq f(x)$$

Esto ocurre por las propiedades de las sucesiones.

Por las propiedades de la integral de Lebesgue tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \overline{f}(x) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \overline{f_n}(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} U(P, f) = I = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \underline{f_n}(x) d\mu \\ &= \int_{[a,b]} \underline{f}(x) d\mu \end{aligned}$$



Unidad 4. Integral de Lebesgue

De manera que:

$$\int_{[a,b]} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)| d\mu = \int_{[a,b]} [\bar{f}(x) - \underline{f}(x)] d\mu = 0$$

y por consiguiente en casi todos los puntos de $[a, b]$ se cumple que:

$$\bar{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$$

es decir,

$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$$

y por lo tanto

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I.$$

Las siguientes observaciones se darán para mostrar algunas diferencias respecto a estos dos tipos de integrales.

Existen funciones acotas que son integrables según Lebesgue, pero no integrables según Riemann, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

La función de Dirichlet dada por:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Es Lebesgue integrable, pero no integrable según Riemann.

Las funciones no acotadas no son integrables según Riemann, pero muchas de ellas son integrables según Lebesgue. En particular cualquier función $f(x) \geq 0$ para la cual la integral de Riemann



Unidad 4. Integral de Lebesgue

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

existe para cada $\varepsilon > 0$ y tiene un límite finito I cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, es integrable en $[a, b]$ según Lebesgue y

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

Se puede ver las integrales impropias

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

en el caso en que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b |f(x)|dx = \infty,$$

no existen en el sentido de Lebesgue, ya que la integrabilidad de $f(x)$ implica la integrabilidad de $|f(x)|$. Por ejemplo, la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$$

existe como integral impropia de Riemann (convencionalmente convergente), pero no existe como integral de Lebesgue.

Si una función se considera en toda la recta (o en una semirrecta), su integral de Riemann puede existir solamente en el sentido impropio. Si esta integral converge absolutamente, también existirá en este caso la correspondiente integral de Lebesgue teniendo el mismo valor. En cambio, si esta integral converge convencionalmente, la función no será integrable en el sentido de Lebesgue. Por ejemplo, la función



Unidad 4. Integral de Lebesgue

$$\frac{\sin x}{x}$$

no es integrable según Lebesgue en toda la recta ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Sin embargo, como se sabe, la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

existe y es igual a π .

4.2. Integral de Lebesgue de una función acotada sobre un conjunto de medida finita

El teorema de convergencia monótona tiene la desventaja de ser aplicable sólo bajo condiciones muy restrictivas, sin embargo un corolario de éste, conocido como el Lema de P. Fatou (1878-1929), puede ser usado con sucesiones de funciones no necesariamente convergentes. Es interesante hacer notar que este resultado fue probado por Fatou en el contexto de series trigonométricas.



Unidad 4. Integral de Lebesgue

4.2.1. Lema de Fatou

Definición 1. [Lebesgue integrable]. Una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **Lebesgue integrable** (o simplemente **integrable**) si existen dos funciones superiores u y v tales que $f = u - v$. La integral de Lebesgue se define por

$$\int f \, d\mu = \int u \, d\mu - \int v \, d\mu.$$

Cabe señalar que el valor de la integral es independiente de la representación como una diferencia de dos funciones superiores. De hecho, si $f = u - v = u_1 - v_1$ c.d.q. tal que las funciones u, v, u_1 y v_1 son funciones superiores, entonces $u + v_1 = v + u_1$ c.d.q. y por las propiedades de la integral se tiene $\int u \, d\mu - \int v \, d\mu = \int u_1 \, d\mu - \int v_1 \, d\mu$.

Teorema 1. La colección de todas las funciones Lebesgue integrable es un espacio de funciones.

Demostración.

Sea f y g dos funciones integrables con representación $f = u - v$ c.d.q. y $g = u_1 - v_1$ c.d.q. Entonces se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} f + g &= (u + u_1) - (v + v_1), \\ \alpha f &= \alpha u - \alpha v \text{ si } \alpha \geq 0, \\ \alpha f &= [(-\alpha)v] - [(-\alpha)u] \text{ si } \alpha < 0, \quad \text{y} \\ f^+ &= (u - v)^+. \end{aligned}$$

expresar las funciones anteriores como las diferencias de dos funciones superiores. Esto demuestra que la colección de todas las funciones integrables es un espacio de funciones.



Unidad 4. Integral de Lebesgue

Teorema 2. Si f y g son dos funciones integrables, entonces

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$$

para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Teorema 3. Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función de medida que satisface $f(x) \geq 0$ c.d.q. para toda x . Entonces existe una sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones simples tal que $0 \leq \phi_n(x)$ y $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ para toda $x \in X$.

Demostración.

Para cada n sea $A_n^i = \{x \in X : 2^{-n} \cdot (i-1) \leq f(x) < 2^{-n} \cdot i\}$ para cada $i = 1, 2, \dots, n2^n$, y obsérvese que $A_n^i \cap A_n^j = \emptyset$ si $i \neq j$. Dado que f es medible, todas las A_n^i son conjuntos medibles.

Ahora, para cada n defínase $\phi_n = \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} 2^{-n} (i-1) \chi_{A_n^i}$, y nota que $\{\phi_n\}$ es una sucesión de funciones simples. Además, se verifica que $0 \leq \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq f(x)$ se cumple para todo x y toda n . Más aún, si x es fijo, entonces $0 \leq f(x) - \phi_n(x) \leq 2^{-n}$ la igualdad vale para aquellas n suficientemente grandes. Por lo tanto, $\phi_n(x) \uparrow f(x)$ se cumple para todo x , y prueba del teorema ésta terminado.

Da por finalizado el teorema.

Teorema 4. Si una función integrable f satisface $f \geq 0$ c.d.q., entonces f es una función superior.

Demostración.



Unidad 4. Integral de Lebesgue

Sean u y v funciones superiores tales que $f = u - v$ c.d.q. Así como u y v son límites de una sucesión de funciones escalonadas c.d.q., existe una sucesión $\{\psi_n\}$ de funciones escalonadas tal que $\psi_n \rightarrow f$ c.d.q. Dado que $f \geq 0$ c.d.q., se sigue que $\psi_n^+ \rightarrow f$ c.d.q.

Por el teorema 3, existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples que satisfacen que $0 \leq s_n \uparrow f$ c.d.q. Ahora, para cada n sea $\phi_n = \min\{s_n, \max\{\psi_i^+ : i = 1..n\}\}$, entonces $\{\phi_n\}$ es una sucesión de funciones escalonadas tales que $0 \leq \phi_n \uparrow f$ c.d.q. Basta mostrar que $\{\int \phi_n d\mu\}$ es acotado. En efecto, de $\phi_n + v \leq f + v \leq u$ c.d.q. y de la monotonía y la linealidad de la integral se sigue que $\int \phi_n d\mu + \int v d\mu \leq \int u d\mu$, y además $\int \phi_n d\mu \leq \int u d\mu - \int v d\mu < \infty$ para toda n . La prueba del teorema está completa.

Si f es una función integrable, entonces por el teorema pasado f^+ y f^- son ambas funciones superiores, y también $f = f^+ - f^-$ es una descomposición de f como una diferencia de dos funciones superiores positivas. En particular,

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Usualmente esta fórmula es usada por algunos autores para definir la integral de Lebesgue.

Teorema 5. Sea f una función medible. Si existen dos funciones integrables h y g tal que $h \leq f \leq g$ c.d.q., entonces f es también una función integrable.

Demostración.

Se escribe la desigualdad en la forma $0 \leq f - h \leq g - h$ c.d.q., se puede suponer sin pérdida de generalidad que $0 \leq f \leq g$ casi donde quiera.

Por el teorema 4, g es una función superior. Entonces existe una sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones escalonadas tal que $0 \leq \phi_n \uparrow g$ c.d.q. Por el teorema 3 existe una sucesión $\{\psi_n\}$ de funciones



Unidad 4. Integral de Lebesgue

simples tales que $0 \leq \psi_n \uparrow f$ c.d.q. Pero entonces $\{\min\{\phi_n, \psi_n\}\}$ es una sucesión de funciones escalonadas tal que $\min\{\phi_n, \psi_n\} \uparrow f$ c.d.q. y $\int \min\{\phi_k, \psi_k\} d\mu \leq \lim \int \phi_n d\mu = \int g d\mu < \infty$ para toda k . Así $f \in \mathcal{U}$, por lo tanto f es una función integrable.

Teorema 6. [Levi] Supón que una sucesión de funciones integrables satisface $f_n \leq f_{n+1}$ c.d.q. para cada n y $\lim \int f_n d\mu < \infty$. Entonces existe una función f tal que $f_n \uparrow f$ c.d.q. (i por lo tanto $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$ es válido).

Demostración.

Sustituyendo $\{f_n\}$ por $\{f_n - f_1\}$ si es necesario. Se asume sin pérdida de generalidad que $f_n \geq 0$ c.d.q para cada n . Además, se asume que $0 \leq f_n(x) < f_{n+1}$ para toda $x \in X$. Sea $I = \lim \int f_n d\mu < \infty$. Para cada $x \in X$ sea $g(x) = \lim f_n(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, se considera el conjunto

$$E = \{x \in X : g(x) = \infty\}.$$

Entonces, $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} [\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > i\}]$, y entonces E es un conjunto medible. Así, se observa que $\mu^*(E) = 0$. Nota que cada función f_n es una función superior. Así, para cada i existe una sucesión $\{\phi_n^i\}$ de funciones escalonadas tal que $0 \leq \phi_n^i \uparrow f_i$ c.d.q.

Para cada n sea $\psi_n = \sup_{i \geq 1} \phi_n^i$, y nótese que $\{\psi_n\}$ es una sucesión de funciones escalonadas tal que $\psi_n \uparrow g$ c.d.q. y el $\lim \int \psi_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = I$. En particular, para cada k la sucesión de funciones escalonadas $\{\min\{\psi_n, k\chi_E\}\}$ satisface $\min\{\psi_n, k\chi_E\} \uparrow k\chi_E$ c.d.q esto se sigue que $\mu^*(E) < \infty$ y $k\mu^*(E) \leq \int \psi_n d\mu = I < \infty$ para cada k . Entonces $\mu^*(E) = 0$.

Partiendo de la definición $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = g(x)$ si $x \notin E$ y $f(x) = 0$ si $x \in E$. Entonces $f_n \uparrow f$ c.d.q. y el resultado se sigue de teorema 6 de la sección de propiedades.



Unidad 4. Integral de Lebesgue

Teorema 7. Sea $\{f_n\}$ una secuencia de funciones integrables no negativas tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu < \infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ define una función integrable y

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Demostración.

Para cada n sea $g_n = \sum_{i=1}^n f_i$, y nótese que g_n es una función tal que $g_n \uparrow \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ c.d.q. Ahora, por el **Teorema de Levi**, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ define una función integrable, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu,$$

con lo que termina la prueba.

Teorema 8. [Lema de Fatou] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables tal que $f_n \geq 0$ c.d.q. para cada n y $\liminf \int f_n d\mu < \infty$. Entonces $\liminf f_n$ define una función integrable, y

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Demostración.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $f_n \geq 0$ para toda $x \in X$ y y toda n . Dada una n , defínase $g_n = \inf\{f_i(x) : i > n\}$ para cada $x \in X$. Entonces cada g_n es una función medible, y $0 \leq g_n \leq f_n$ para toda n . Entonces por el teorema 5 existe una función integrable g tal que $g_n \uparrow g$ c.d.q. Se deduce que $g = \liminf f_n$ c.d.q., entonces el limite $\liminf f_n$ define una función integrable. Más aún

$$\int \liminf f_n d\mu = \int g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu,$$

y la prueba termina.



Unidad 4. Integral de Lebesgue

Ahora estás en condiciones de afirmar y probar la convergencia dominada de Lebesgue uno de los teoremas más importantes de la teoría de la integración.

Teorema 9. [Convergencia dominada de Lebesgue] Sea $\{f_n\}$ sea una sucesión de funciones integrables que satisfacen $|f_n| < g$ c.d.q. para toda n y alguna función fija e integrable g . Si $f_n \rightarrow f$ c.d.q. entonces f define una función integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Demostración. Nota que $|f| \leq g$ c.d.q. y la integrabilidad de f se sigue del teorema 5. Observa que la sucesión $\{g - f_n\}$ satisface las hipótesis del Lema de Fatou y por otra parte, $\liminf(g - f_n) = g - f$ c.d.q. Así,

$$\begin{aligned} \int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g - f) d\mu = \int \liminf(g - f_n) d\mu \\ &\leq \liminf \int (g - f_n) d\mu = \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\limsup \int f_n \leq \int f d\mu.$$

Del mismo modo, el Lema de Fatou aplica a la sucesión $\{g + f_n\}$ produce

$$\begin{aligned} \int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g + f) d\mu = \int \liminf(g + f_n) d\mu \\ &\leq \liminf \int (g + f_n) d\mu = \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu, \end{aligned}$$

y así

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Entonces el límite existe en $\mathbb{R}$, y el $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$ es válido.

El siguiente teorema caracteriza las funciones Lebesgue integrables en términos de alguna propiedad dada. Se emplea generalmente para demostrar que todas las funciones Lebesgue integrables poseen una propiedad determinada.



Unidad 4. Integral de Lebesgue

Teorema 10. Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y sea (P) una propiedad que puede o no tener una función integrable. Asíumase que:

- a) Si f y g son funciones integrables con la propiedad (P) , entonces $f + g$ y αf para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ tienen la propiedad (P) .
- b) Si f es una función integrable de manera que para cada $\epsilon > 0$ existe una función integrable g con la propiedad (P) satisface $\int |f - g| d\mu < \epsilon$, entonces f tiene la propiedad (P) .
- c) Para cada $A \in \mathcal{S}$ tal que $\mu(A) < \infty$, la función característica χ_A tiene la propiedad (P) .

Entonces, cada función integrable tiene la propiedad (P) .

Demostración.

Supón primero que A es una σ -álgebra tal que $\mu^*(A) < \infty$. Así, existe una sucesión de conjuntos disjuntos $\{A_n\}$ de $\mathcal{S}$ tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hacer $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ para cada n y nótese que $B_n \uparrow A$. De $\chi_{B_n} = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}$ y de los incisos (c) y (a), puedes ver que χ_{B_n} tiene la propiedad (P) para cada n . Dada $\int |\chi_A - \chi_{B_n}| d\mu = \mu^*(A) - \mu(B_n) \rightarrow 0$, se deduce a partir de (b) que χ_A tiene a la propiedad (P) .

Después, supón que A es un conjunto medible de medida finita y sea $\epsilon > 0$. Entonces Existe una σ -álgebra B de medida finita tal que $A \subseteq B$ y $\mu^*(B) < \mu^*(A) + \epsilon$. Esto implica $\int |\chi_A - \chi_B| d\mu = \mu^*(B) - \mu^*(A) < \epsilon$. De lo anterior y de (b), se infiere que χ_A satisface la propiedad (P) .

Ahora, de (a) observa que cada función escalonada satisface la propiedad (P) . Pero entonces, se sigue de (b) que toda función superior satisface la propiedad (P) . Dado que cada función integrable es la diferencia de dos funciones superiores, usando (a), se infiere que en efecto cada función integrable satisface la propiedad (P) .



Unidad 4. Integral de Lebesgue

Teorema 11. Cada función integrable f es integrable sobre cada subconjunto medible de X . Además,

$$\int_E f \, d\mu + \int_{E^c} f \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

para cada subconjunto medible E de X .

El resto de esta sección trata de una observación relativa a las integrales de Lebesgue infinitas. Si $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ es la representación estándar de una función ϕ positiva simple, entonces la suma $\sum_{i=1}^n a_i \mu^*(A_i)$ tiene sentido como un número real extendido no-negativo. Si $\sum_{i=1}^n a_i \mu^*(A_i) = \infty$, entonces se acostumbra escribir $\int \phi \, d\mu = \infty$ y se dice que la integral de Lebesgue de ϕ es infinita.

Supón ahora que $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ es una función donde existe una sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones positivas simples tal que $\phi_n \uparrow f$ c.d.q. Entonces $\lim \int \phi_n \, d\mu$ existe como un número real extendido, y puedes ver que $\lim \int \phi_n \, d\mu$ es independiente de la sucesión $\{\phi_n\}$ elegida. En caso de que $\lim \int \phi_n \, d\mu = \infty$, escribimos $\int f \, d\mu = \infty$ y se dice que la integral de Lebesgue de f es infinita, pero no puede decirse que es una función integrable. En este sentido cada función positiva medible f tiene una integral de Lebesgue (finita o infinita) simplemente porque, por el teorema 3, existe una sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones positivas simples tal que $\phi_n \uparrow f$ c.d.q.

Además, si $f: X \rightarrow \mathbb{R}^*$ define una función medible, entonces se puede escribir $f = f^+ - f^-$ y por lo anterior, ambas integrales $\int f^+ \, d\mu$ y $\int f^- \, d\mu$ existe como números reales extendidos (no-negativos). Si una de estas integrales es un número real, entonces la integral de f se define como el número real extendido.

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$



Unidad 4. Integral de Lebesgue

De esta manera, es posible asignar una “integral” a una clase mucho más grande de funciones medibles de valores reales extendidos.

Una ventaja de la extensión por arriba de la integral es que una serie de teoremas puedes expresarla sin asumir la integrabilidad de Lebesgue en las funciones. Por ejemplo, el lema de Fatou puede ser escrito como sigue:

- Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles tales que $f_n \geq 0$ c.d.q. para cada n , entonces:

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$$

donde, por lo anterior, uno o ambos lados de la desigualdad puede ser infinito.

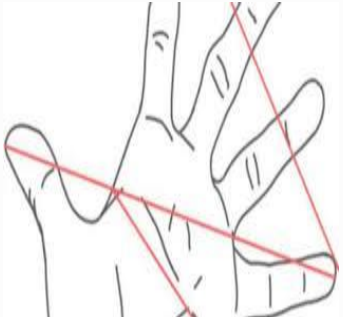
Cierre de la unidad



Unidad 4. Integral de Lebesgue

La integral de Lebesgue es de alguna forma la generalización natural del concepto de integral de funciones medibles en los conjuntos medibles. Una importancia fundamental es la que se manifiesta en **Lema de Fatou**: que argumenta la monotonía de la integral bajo sucesiones de funciones medibles. El contenido de esta unidad es fundamental para el desarrollo de la Teoría de Integración que es una de las ramas más importantes de la matemática con una aplicación directa en la estadística y probabilidad. El dominio de esta unidad didáctica permitirá al estudiante la resolución de problemas planteados en ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales con un entendimiento profundo de las propiedades y teoremas involucrados en la obtención de tales resultados.

Para saber más

 Figura 2. Blog de Terence Tao.	El blog de Terence Tao, uno de los matemáticos más notables de nuestra época, entre otras secciones presenta: libros, resúmenes de artículos, apps, etc. sobre Matemáticas en general en particular en Teoría de la Medida.	http://terrytao.wordpress.com/
---	--	--



Unidad 4. Integral de Lebesgue

Fuentes de consulta

Básica

- Charalambos A.D. (1998). *Principles of Real Analysis*. USA: Academic Press.
- De Barra, G. (2000). *Measure Theory and Integration*. India: New Age International.
- Folland, G. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*. USA: Wiley.
- Galaz, F. (2002). *Medida e Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$* . México: University Press.
- Grabisnky, G. (2011). *Teoría de la Medida*. México: Facultad de Ciencias UNAM.
- Halmos, P. (1991). *Measure Theory*. USA: Springer Verlag.
- Hawkins T. (1970) *Lebesgue theory of integration. Its origins and development*: Chelsea Publishing Company.
- Royden, H; Fitzpatrick, P. (2010). *Real Analysis*. USA: Pearson.
- Sánchez, C. C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki*. España: Nivola.
- Schram, M. (1996). *Introduction to Real Analysis*. USA: Prentice Hall.