



Matemáticas

Variable compleja II

6° Semestre

Unidad 2. Análisis complejo

Clave:

05143632

Universidad Abierta y a Distancia de México





Índice

Presentación de la unidad	3
Competencia específica	4
Logros	4
2.1. Teorema de Cauchy-Goursat	4
2.1.1. Teorema integral de Cauchy-Goursat	6
2.1.2. Fórmula integral de Cauchy	9
2.2. Holomorfismo	13
2.2.1. Funciones holomorfas	14
2.2.2. Teorema de Morera (recíproco de Cauchy-Goursat)	16
2.2.3. Teorema fundamental del álgebra	17
2.2.4. Teorema de Liouville	19
Cierre de la unidad	22
Para saber más	22
Fuentes de consulta	23



Unidad 2. Análisis complejo

Presentación de la unidad

El análisis complejo es la parte de las matemáticas que estudia cómo se comportan las funciones de variable compleja a través de resultados específicos y en esta segunda unidad se plantea la teoría necesaria para estudiar y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat. Además de otros teoremas (Liouville, teorema fundamental del álgebra, Morera) importantes para la solución de integrales de variable compleja.

Dentro del análisis complejo, la mayor parte de las veces, se necesitan de teoremas que permiten la solución de diferentes problemas aplicados, los cuales se verán dentro de esta unidad, que tiene dos teoremas, por la cual tendrás que revisar y aprender sus aplicaciones, dado que es muy indispensable para la solución de problemas. Esos teoremas son:

- Teorema de Cauchy-Goursat (Tipos de integrales)
- Holomorfismo

El primer teorema permite integrar funciones de acuerdo a ciertas características y la segunda se apoya de la primera para resolver integrales de variable compleja.

Para diferenciar los teoremas, ejemplos, propiedades y definiciones, cada uno de ellos se presentará con un color de fondo específico.



Unidad 2. Análisis complejo

Competencia específica

Aplicar el análisis de variable compleja para resolver problemas relacionados con integrales de línea de funciones holomorfas, por medio del teorema de Cauchy-Goursat y holomorfismo de funciones.

Logros

- Aplicar las herramientas que proporciona el análisis complejo.
- Resolver integrales a través del teorema de Cauchy-Goursat.
- Diferenciar las características de los teoremas de holomorfismo complejo para resolver problemas de los diferentes tipos de integrales que involucran funciones holomorfas.

2.1. Teorema de Cauchy-Goursat

Ahora que sabes la teoría básica para resolver integrales de variable compleja, es momento de aplicar los teoremas que te permitirán integrar funciones sobre diferentes regiones y curvas.

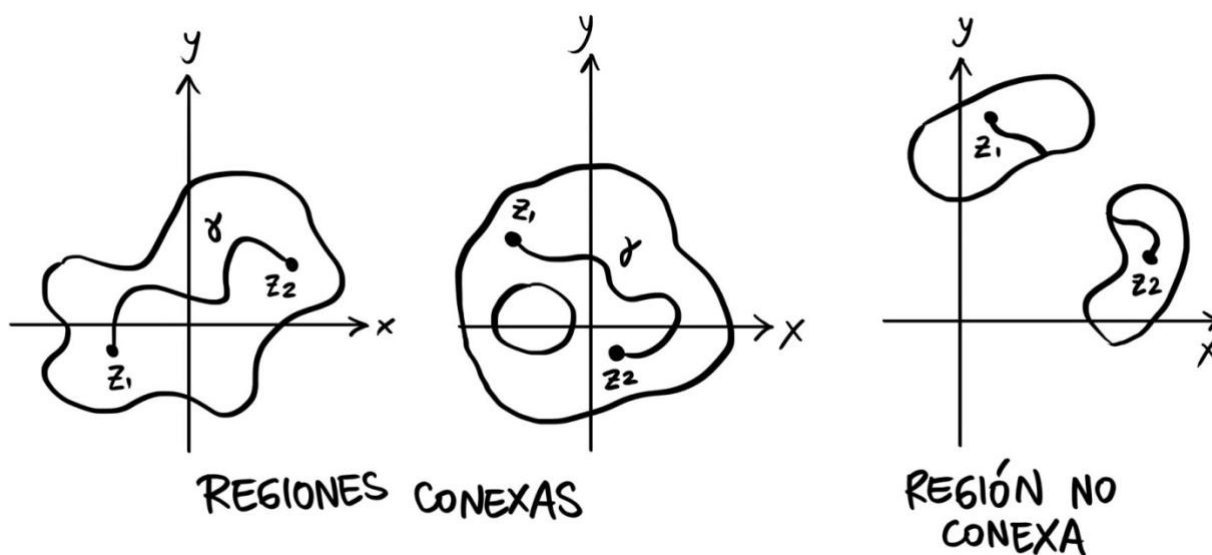
Las regiones son conjuntos donde se define el dominio de la función $f(z)$.

Definición

Un conjunto D se dice conexo por trayectorias, si $\forall z_0, z_1$ existe una curva σ continua de z_0 a z_1 .



Unidad 2. Análisis complejo



Regiones conexas y no conexas

Definición

Una región $D \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexa, si D es conexo y toda curva $\sigma \in D$ puede deformarse en alguna otra $\tilde{\sigma}(t) \in D$.



Regiones simplemente conexas y no conexas

Observación



Unidad 2. Análisis complejo

Las curvas cerradas simples σ separan al plano en dos regiones, una es el interior de la curva (acotada) y la otra su exterior (no acotada). Éstas nuevas regiones son subconjuntos abiertos y conexos del plano.

2.1.1. Teorema integral de Cauchy-Goursat

El teorema de Cauchy-Goursat asegura que si la función f' es holomorfa, su función f también lo es. Esto facilita el cálculo de la integral de funciones que presentan algún tipo de singularidad (puntos en los que no está definida la función).

Lema

Sea $f(z)$ función holomorfa sobre una región cerrada, el conjunto $D = \{z, z_0 | z, z_0 \in \sigma, z_0 \text{ es punto interior de } \sigma\}$, con σ curva cerrada simple con orientación positiva. La región D puede cubrirse por un número finito de n cuadrados completos y/o parciales, tales que para cada punto fijo z_j , con $j = 1, 2, 3, \dots, n$. De forma que se satisface la siguiente desigualdad para todos los demás puntos fijos de dichos cuadrados.

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} \right| \leq f'(z_j) < \varepsilon; \text{ para } z \neq z_j \text{ y } \forall \varepsilon \in \mathbb{Z}^+.$$

Teorema de Cauchy-Goursat

Sea $f(z)$ holomorfa, sobre y en el interior de un contorno cerrado simple D , entonces se cumple que:

$$\oint_D f(z) dz = 0$$

Demostración:

Primero vamos a cubrir de cuadrados a la región D , con las mismas condiciones del lema anterior.



Unidad 2. Análisis complejo

Sea A el j -ésimo cuadrado de la región D , el punto fijo $z_0 \in A$ y $\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$. Ahora definiremos la siguiente función:

$$\delta_j(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j} & z \neq z_j \\ 0 & z = z_j \end{cases} ; j = 1, 2, \dots, n$$

Ya que la función satisface las hipótesis del lema anterior, se cumple que $\left| \frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j} \right| < \varepsilon$. Por ello es posible afirmar que:

- a) $|\delta_j(z)| < \varepsilon$
- b) $\delta_j(z)$ es continua en A por ser $f(z)$ continua.
- c) El $\lim_{z \rightarrow z_j} \delta_j(z) = 0$.

Las curvas σ_j con orientación positiva que cubren cada cuadrado (entero o partes) de la región D .

Por la forma en que hemos definido a δ_j , para cualquier punto $z \in \sigma_j$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_j} f(z) dz &= [f(z_j) - z_j f'(z_j)] \int_{\sigma_j} dz + f'(z_j) \int_{\sigma_j} z dz + \int_{\sigma_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \\ \int_{\sigma_j} f(z) dz &= \int_{\sigma_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \end{aligned}$$

Ya que las primeras dos integrales son cero al satisfacer las condiciones del teorema de Cauchy que aprendiste en la unidad 1 (subtema 1.3.2).

Por sus propiedades, al reescribir la integral se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_j} f(z) dz &= \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_j} f(z) dz \\ \sum_{\sigma_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz &= \int_{\sigma} f(z) dz \end{aligned}$$

La última igualdad es posible porque cualesquiera par de cuadrados (enteros o partes) se cancelan entre sí con sus lados adyacentes; es decir, sólo quedan los que se encuentran a lo largo de los arcos que forman a σ .



Unidad 2. Análisis complejo

Nuevamente aplicamos las propiedades de la integral para afirmar que:

$$\left| \int_{\sigma} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{\sigma_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right|$$

Basta encontrar una cota superior para la desigualdad de la izquierda y con ello habremos terminado la demostración.

Sea s_j igual a la longitud de un lado de los cuadrados que recubren a D , a_j = área de cada cuadrado, a = la suma de todos los a_j ; L_j = longitud de cada σ_j y L es la longitud total del contorno D . Entonces

$$\left| \int_{\sigma_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right| < \sqrt{2} a_j \varepsilon (4a_j + L_j) < \varepsilon (4\sqrt{2} a^2 + \sqrt{2} a L)$$

Por lo tanto $\left| \int_{\sigma} f(z) dz \right| < \varepsilon (4\sqrt{2} a^2 + \sqrt{2} a L)$ como se requería.

Ejemplo

Evalúa la integral $\oint_D z^n dz$ sobre la curva $|z| = 4$ en sentido positivo, para $n \geq 0$.

Solución:

Ya que el círculo de radio 4 es una curva cerrada simple, aplica el teorema de Cauchy-Goursat.

1. Parametriza el círculo, entonces $\sigma(\theta) = 4e^{i\theta}$ y su $\sigma'(\theta) = 4ie^{i\theta}$.
2. Sustituye en la integral $f(z) = z^n$

$$\oint_{\sigma} z^n dz = \int_0^{2\pi} 4e^{i\theta n} (4ie^{i\theta}) d\theta = i4^{(n+1)} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n+1)} d\theta$$

3. Ya que $e^{i\theta(n+1)} = \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta$

La integral es:

$$i4^{(n+1)} \int_0^{2\pi} \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta = \left[\frac{4^{(n+1)}}{n+1} \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta \right]_0^{2\pi} = 0$$



Unidad 2. Análisis complejo

2.1.2. Fórmula integral de Cauchy

La fórmula de Cauchy se aplica a funciones sobre un contorno cerrado simple, y te servirá para determinar el valor de la función en un punto que está en la región.

Definiciones

1. Para una curva cerrada simple σ sobre una región D , se satisface la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} \pm 1, & z_0 \text{ está dentro de } \sigma \\ 0, & z_0 \text{ está fuera de } \sigma \end{cases}; z_0 \in D.$$

2. Sea σ cerrada simple en D , $z_0 \in D$ tal que $z_0 \notin \sigma$. Entonces el **índice** de σ con respecto a z_0 , se define como:

$$I(\sigma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

Dicho índice calcula el número de vueltas que σ da alrededor de z_0 .

Ejemplo

Cuál es el índice de σ sobre $z_0 \in |z| = 1$, de la función $f(z) = \frac{1}{z}$.

La parametrización del círculo de radio uno es $\sigma(\theta) = ne^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi n$. Entonces la integral es $\int_0^{2\pi} idz = 2i\pi n$.

Ahora sabes que una curva σ (en sentido positivo) alrededor del círculo de radio R en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi n$, tiene un índice de valor: $I(\sigma, z_0) = n$.

Es importante señalar que éste valor no se altera (salvo en signo), si recorre la trayectoria en sentido negativo, entonces el índice será $I(-\sigma, z_0) = -n$.



Unidad 2. Análisis complejo

De manera similar, si se tiene una curva σ cuyo índice es $I(\sigma, z_0)$, la curva homotópica a esta tendrá el mismo índice, es decir $I(\sigma, z_0) = I(\tilde{\tau}, z_0)$.

Teorema de la fórmula de Cauchy (fórmula integral de Cauchy)

Sea $f(z)$ holomorfa en el interior y exterior del contorno cerrado simple σ , entonces se cumple la siguiente igualdad:

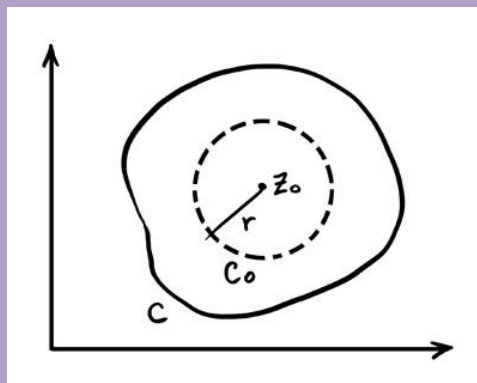
$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\sigma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

Demostración

Sea $f_1(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)}$ holomorfa excepto en el punto $z = z_0$ sobre σ . Se puede asegurar lo anterior porque $f(z)$ es holomorfa por hipótesis. Al aplicar el teorema de la deformación, sabemos que existe una función homotópica que permite la siguiente igualdad.

$$\oint_{\tau} \frac{f(z)}{(z - z_0)} = \oint_{\sigma} \frac{f(z)}{(z - z_0)}$$

Sea τ homotópica a σ , definida como $\tau = |z - z_0| < R$ tal que $\tau \subseteq \sigma$.



El teorema de Cauchy-Goursat afirma que la integral

$$\oint_{\tau} \frac{1}{z - z_0} dz = 2i\pi$$



Unidad 2. Análisis complejo

Por lo tanto

$$2i\pi f(z_0) = \oint_{\tau} \frac{dz}{z - z_0} f(z_0)$$

$$\oint_{\tau} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2i\pi f(z_0) = \oint_{\tau} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Por demostrar:

$$\oint_{\tau} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0$$

Basta encontrar una cota para $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, aplica la definición de continuidad y la desigualdad que aprendiste en el subtema 1.3.1.

Entonces $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{R}$, ya que la circunferencia de $\sigma = 2\pi R$ se tiene que

$$\left| \oint_{\tau} \frac{f(z) - f(z_0)}{R} dz \right| \leq 2\pi\varepsilon$$

Por lo tanto $\oint_{\tau} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2i\pi f(z_0) = 0$, lo que implica que $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\tau} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. Por ser

$\oint_{\tau} \frac{f(z)}{(z - z_0)} = \oint_{\sigma} \frac{f(z)}{(z - z_0)}$, entonces $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\sigma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.

Ejemplo

Evalúa $\oint_{\sigma} \frac{\cos z}{z - 1} dz$ sobre $\sigma = (0,0) \cup (2,-2) \cup (2,2)$

Solución:

1. Observa que la curva define un triángulo (dibújala), entonces sea $z = 1$ punto interior a σ .
2. Toma a $f(z) = \cos z$ ya que es una función entera, satisface las condiciones de la fórmula integral de Cauchy.



Unidad 2. Análisis complejo

3. sustituye los valores y resuelve.

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\sigma} \frac{\cos z}{z-1} dz = 2i\pi \cos(1) = 1.99\pi i$$

Un resultado interesante a partir de la fórmula de Cauchy es su forma extendida, en la cual las derivadas de funciones holomorfas continúan preservando dicha propiedad.

Proposición (Fórmula extendida de Cauchy)

Sí $f(z)$ es holomorfa en un dominio D , entonces dicha función tiene n derivadas de diferente grado (orden) en todo su dominio, sí dicha función sigue siendo holomorfa sobre un contorno cerrado simple, entonces se satisface la siguiente igualdad.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\sigma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Ejemplo

Calcula el valor de la integral $\oint_{\sigma} \frac{z^3+2}{(z-1)^3}$ sobre la curva $|z| = 3$

Solución:

1. Ya que el numerador de la integral es de tercer grado, entonces $n = 2$, ya que por la fórmula extendida de Cauchy $n + 1 = 3$.
2. Para $z_0 = 1$, se tiene que $f^{(2)}(1) = \frac{2!}{2i\pi} \oint_{\sigma} \frac{z^3+2}{(z-1)^3}$
3. Calcula de $f(z) = z^3 + 2$ a $f'(z) = 3z^2$ y $f^{(2)}(z) = 6z$.
4. Sustituye los valores obtenidos y calcula la integral.



Unidad 2. Análisis complejo

$$\oint_{\sigma} \frac{z^3+2}{(z-1)^3} = i\pi f^{(2)}(1) = i\pi 6(1) = i\pi 6.$$

Recuerda que los cálculos anteriores son posibles por las características de σ y de nuestra $f(z)$ que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

El valor medio para funciones analíticas es una de las aplicaciones que se desprende la fórmula integral de Cauchy

Proposición (Valor medio de Gauss)

Si f es holomorfa sobre y en el interior de cualquier círculo $|z - z_0| \leq R \subseteq D$. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$$

D es conjunto abierto de $\mathbb{C}$.

Ejemplo

Calcula el valor medio de la función $f(z) = e^z$, sobre el círculo $|z| \leq 1$.

Solución

Ya que f es holomorfa, aplica la proposición anterior y sustituye los valores que sean necesarios. En este caso $z_0 = 0$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta = 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \right) = 1$$

2.2. Holomorfismo

En la asignatura de Variable compleja I estudiaste funciones que tienen sus primeras derivadas continuas (funciones holomorfas). Los teoremas que aprenderás a lo largo de éste subtema se



Unidad 2. Análisis complejo

aplican a dichas funciones. Uno de estos resultados es el teorema fundamental del álgebra, el cual garantiza la existencia de raíces (múltiples o no) en un polinomio de n -ésimo grado sobre el campo de los números complejos o reales.

2.2.1. Funciones holomorfas

El siguiente teorema te mostrará cómo el comportamiento de una función en un punto, puede determinar el comportamiento en su dominio.

Teorema

Sea $D \subset \mathbb{C}$ subconjunto no vacío y la función holomorfa $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, si existe un conjunto no vacío $A \subset D$ tal que $f(z) = 0 \forall z \in A$, entonces $f(z) = 0 \forall z \in D$.

Dejaremos pendiente la demostración de este resultado hasta la siguiente unidad.

Recordatorio

Para $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tal que $u: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f es armónica si

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Propiedades de las funciones armónicas

1. Si $u: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en D tal que $|z - z_0| \leq R \subseteq D$, con $z_0 \in D$, entonces

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta \text{ es el valor promedio de } u.$$

A partir de esta propiedad se deduce otra, el valor máximo (mínimo) de una función armónica.

2. Si u es armónica sobre D y tiene un máximo (mínimo) relativo en $z_0 \in D$, entonces u es constante en una vecindad de z_0 .



Unidad 2. Análisis complejo

3. Si $f(z)$ es continua y holomorfa $\forall z \in D \subset \mathbb{C}$, entonces el valor máximo de $|f(z)|$ en D es un punto z_0 tal que $z_0 \in \partial D$.

Notación

D es una región cerrada y acotada.

∂D es la frontera de la región D

Observación

En caso de 3, si el valor máximo de $|f(z)| = z_0$, la función f es constante.

Ejemplo

Sea $u(x, y) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y)$ sobre la región $D = [0,1] \times [0,1]$, ¿Tiene un máximo (mínimo)?

Solución

Ya que $\nabla^2 = 0$, entonces por definición u es armónica y no constante, por lo tanto su máximo está en $\partial D =$ frontera de D .

El valor máximo es: $u(1,1) = \operatorname{sen}(1)\cosh(1)$ por ser ambas funciones crecientes en $[0,1]$.

Ejemplo

La siguiente integral se conoce como la fórmula integral de Poisson para puntos interiores de un círculo, con ella es posible saber el valor de una función armónica en cualquier punto interior de dicho círculo.

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(R, \varphi)(R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)} d\varphi$$



Unidad 2. Análisis complejo

Determina el potencial en un punto (r, θ) al interior de un tubo que contiene material dieléctrico*. La parte superior del tubo es $R = 1$ con $0 \leq \varphi \leq \pi$ cuyo potencial es 1 y la parte inferior es $R = 1$ con $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ con potencial -1 .

Solución

La función del potencial eléctrico se expresa como una función armónica, por ello es posible aplicar la fórmula anterior para resolver el ejemplo. Ya que $R = 1$, sustituimos los datos en $u(r, \theta)$.

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(1-r^2)}{1+r^2-2\cos(\varphi-\theta)} d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{(1-r^2)}{1+r^2-2\cos(\varphi-\theta)} d\varphi$$

Aplica el cambio de variable $x = \theta - \varphi$, de tal forma que u este definida.

$$u(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left[\left(\frac{1+r}{1-r} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \right) + \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \frac{\theta}{2} \right) \pm \frac{\pi}{2} \right]$$

Revisa la parte “para saber más” donde hay material para que conozcas la construcción de la fórmula integral de Poisson.

El material dieléctrico* se utiliza de aislante, por ser mal conductor eléctrico.

2.2.2. Teorema de Morera (recíproco de Cauchy-Goursat)

El teorema de Morera se conoce como el recíproco del teorema de Cauchy-Goursat. Es útil porque para su aplicación basta que la función sobre la que se trabaja sea holomorfa.

Teorema de Morera

Sea $f(z)$ continua en una región D , si $\oint_\sigma f(z) dz = 0$ para cualquier curva σ cerrada en D .

Entonces f es holomorfa en D .



Unidad 2. Análisis complejo

Demostración

Por hipótesis $\oint_{\sigma} f(z)dz = 0$

Ya que las trayectorias son independientes de las curvas, definimos a $F(z) = \int_{z_0}^z f(t)dt$, lo que implica que $F'(z) = f(z)$, al aplicar la fórmula integral de Cauchy extendida se tiene que f es holomorfa en D , porque la derivada de una función holomorfa lo es.

Ejemplo

La integral función $\int_{\sigma} \frac{1}{z^2} dz = 0$, donde σ es cualquier contorno cerrado que no pasa por $z = 0$, ¿se cumple el teorema de Morera?

Solución

No, ya que las hipótesis del teorema de Morera se centran en que la función sea holomorfa en todo su dominio. Es muy importante que analices si la función es holomorfa antes de aplicar cualquier resultado de esta unidad.

Ejemplo

Sea la integral $\int_{\sigma} \frac{dz}{z-z_0}$ tal que $\begin{cases} z_0 \text{ está dentro de } D \\ z_0 \text{ está fuera de } D \end{cases}; \sigma \in D$

Solución

Ya que z_0 está fuera de D entonces se cumple el teorema de Cauchy-Goursat, por lo tanto por el teorema de Morera $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$.

2.2.3. Teorema fundamental del álgebra

El teorema fundamental del álgebra es un resultado que se aplica a los campos de polinomios ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), y garantiza la existencia de raíces (ceros de la función) dependiendo el grado del mismo.



Unidad 2. Análisis complejo

Teorema fundamental del álgebra

Sean $a_0, a_1, \dots, a_n$ números complejos para $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$; el polinomio $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$. Entonces $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

Demostración

Supongamos que $p(z_0) \neq 0 \forall z_0 \in \mathbb{C}$, entonces $\exists g(z) = \frac{1}{p(z)}$ tal que $g(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

No olvides que $g(z)$ es acotada en $\mathbb{C}$.

Basta probar que $g(z)$ es constante, toma el $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{p(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n} = 0$.

Por lo tanto para $\varepsilon > 0 \exists R > 0$ tal que $|z| \geq R$, esto implica que $\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \varepsilon$.

Si $|z| \leq R$, entonces $|g(z)| < M$ por ser $g(z)$, por lo tanto $|g(z)| \leq \varepsilon + M \therefore p(z)$ es constante, esto es una contradicción. Por lo tanto $g(z)$ es acotada $\therefore p(z_0) = 0$.

Ejemplo

Una de las aplicaciones del teorema fundamental del álgebra que utilizas de manera frecuente al encontrar los ceros de polinomios de grado n -ésimo, es la descomposición de factores por medio de las fórmulas de Vieta, la cual asegura que para cualquier polinomio de la forma $p(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + x^n$, se puede descomponer como el producto de factores tales que $p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$.

En base a lo anterior encuentra la descomposición de factores del polinomio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$, es decir encuentra los valores para los cuales $p(x) = 0$.

Solución



Unidad 2. Análisis complejo

Por ser una ecuación de tercer grado que satisface las fórmulas de Vieta, el polinomio tiene tres raíces, no sabemos si reales o complejas. Un método tedioso, pero seguro es el tanteo.

Supongamos que $(x + 1)$ es raíz del polinomio y realizamos la división

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{x + 1} = x^2 - 7x + 10$$

Por lo tanto tenemos que $p(x) = (x + 1)(x^2 - 7x + 10)$, ahora supongamos que $(x - 2)$ es raíz y calcula la división $\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = x - 5$.

Ya no es necesario hacer más cálculos, ya que hemos obtenido los tres productos de la descomposición del polinomio $p(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 5)$, cuyas raíces de la ecuación son -1, 2 y 5. Verifiquemos para $p(x) = p(-1) = (-1 + 1)(x - 2)(x - 5) = 0(x - 2)(x - 5) = 0$. Observa que el método anterior funciona cuando la división tiene residuo cero, en caso contrario no se llegará a la solución deseada.

2.2.4. Teorema de Liouville

El teorema de Liouville afirma que ninguna función entera (excepto las funciones constantes) puede ser acotada en todo el plano complejo.

Este teorema se conoce dentro de la **física estadística** como el **Teorema Fundamental de la mecánica estadística**. Se aplica al estudiar el movimiento de moléculas que se encuentran en el volumen de un gas. Se escogen varios sistemas similares al que se quiere estudiar, encontrando promedios de las propiedades de estos sistemas. Esto nos da una solución aproximada del problema. El teorema garantiza que la densidad de sistemas alrededor de un sistema dado en el espacio físico se mantiene constante.

Antes de enunciar el teorema, es necesario plantear dos resultados para su demostración.



Unidad 2. Análisis complejo

Teorema

Si $f(z)$ es holomorfa en $D = \mathbb{C} \setminus \{x < 0 | x \in \mathbb{R}\}$, entonces $|f(z)|$ alcanza su máximo en D sólo si $f(z)$ es constante.

Demostración

La demostración tiene dos casos:

1. Si $|f(z)|$ es constante, por ser f holomorfa las ecuaciones Cauchy-Riemann implican que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$, por lo tanto $f(z)$ es constante.
2. Ahora supongamos que $|f(z)|$ alcanza su máximo en D , pero $f(z)$ no es constante. Entonces $\exists z_0 \in D$ tal que $|f(z)|$ es máximo.

Sea σ la curva $|z - z_0| = R \subset D$, entonces:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta < |f(z_0)|$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto f es constante.

Proposición (Desigualdad de Cauchy)

Para $f(z)$ función entera holomorfa en $\mathbb{C}$, se cumple la desigualdad:

$$|f^n(0)| \leq \frac{n!}{R^n} M, \text{ donde } M = \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

Demostración

Aplica la fórmula integral extendida de Cauchy para $z_0 = 0$, en $\sigma = Re^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $R > 0$. Entonces

$$|f^n(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(Re^{i\theta})|}{R^n} d\theta \leq \frac{n!}{2\pi R^n} M \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{n!}{R^n} M$$



Unidad 2. Análisis complejo

Por lo tanto $|f^n(0)| \leq \frac{n!}{R^n} M$ y con ello termina la demostración.

Teorema de Liouville

Sea $f(z)$ es entera holomorfa y si $\exists M$ tal que $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

Demostración

Por hipótesis f está acotada por ser función entera, entonces por la Desigualdad de Cauchy se tiene que:

$$\forall z_0 \in \mathbb{C}, |f(z_0)| \leq \frac{M}{R}, \text{ donde } M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$$

Cuando $r \rightarrow \infty$, la función $|f'(z_0)| = 0$ para $n \geq 1$. Por lo tanto $f'(z_0) = 0, \therefore f(z)$ es constante.

Ejemplo

1. Sea $f(z)$ función entera, tal que $|f(z)| \geq 1$, muestra que f es constante.

Solución

Por hipótesis tenemos que f es entera, por las propiedades de las funciones enteras, $\frac{1}{f(z)}$ también lo es siempre que $f(z) \neq 0$, ya que el módulo $\left| \frac{1}{f(z)} \right| \leq 1$, se cumple que $|f(z)| \geq 1$ Lo cual satisface las hipótesis del el teorema de Liouville, por lo tanto f es constante.

Nota: Otra aplicación importante del teorema de Liouville la encontramos implícita en la demostración del teorema fundamental del álgebra.



Unidad 2. Análisis complejo

Cierre de la unidad

En esta unidad 2 aprendiste que si una función es holomorfa, su integral puede resolverse por medio del Teorema de Cauchy, la fórmula de Cauchy o el teorema de Morera. El teorema fundamental del álgebra se incluye dentro de estos subtemas porque para su demostración se utiliza el Teorema de Liouville (planteado también dentro de los resultados que viste en la unidad).

Es aconsejable que revises nuevamente la unidad en caso de que lo que se acaba de mencionar no te sea familiar, o no los recuerdes; de no ser éste tu caso, has concluido la unidad, por lo que puedes ingresar a la Unidad 3. Series complejas, en la que aprenderás a representar funciones (que cumplen ciertas características) por medio de una serie o series de potencias con términos complejos a través de los teoremas de Taylor y Laurent.

Para saber más

Para comprobar los resultados de los ejemplos y ejercicios presentados durante la unidad, te propongo utilizar el programa Wolfram. Puedes acceder al sitio web desde el siguiente vínculo:

<http://www.wolframalpha.com>

Revisa los contenidos de la unidad didáctica Cálculo integral, Cálculo de varias variables I, II y variable compleja I.

Lee el tema de Funciones armónicas y construcción de la fórmula integral de Poisson.



Unidad 2. Análisis complejo

Fuentes de consulta

Básica

- Churchill, R. V. (1996). *Variables complejas y sus aplicaciones*. México: Trillas.
- Marsden J. E. & Hoffman M. J. (1996) *Análisis básico de variable compleja*. México: Trillas.