



Matemáticas

Modelación Estocástica

Séptimo Semestre

Unidad 3. Elementos de simulación

Clave
05144737

Universidad Abierta y a Distancia de México





Unidad 3. Elementos de simulación

Índice

Unidad 3. Elementos de simulación	3
Presentación de la unidad.....	3
Competencia específica	4
Logros	4
3.1. Métodos de generación de números pseudoaleatorios y de variables aleatorias	5
3.1.1. Generalidades	5
3.1.2. Métodos de generación de números pseudoaleatorios	8
3.1.3. Métodos de generación de variables aleatorias	13
Cierre de la unidad.....	16
Para saber más	16
Fuentes de consulta	18



Unidad 3. Elementos de simulación

Unidad 3. Elementos de simulación

Presentación de la unidad

En esta unidad, la última de este curso de modelación estocástica, vas a realizar la simulación de números pseudoaleatorios y de variables aleatorias. Estos temas son de mucha utilidad cuando requieres aleatorizar la elección de una muestra de cierta población, o bien, si deseas realizar la simulación de un fenómeno al azar, por ejemplo, el clima que presenta un videojuego de fútbol. Simular una determinada situación te puede ayudar a tomar decisiones, te permite analizar un fenómeno sin necesidad de poner en peligro la vida al estar presente, por ejemplo, en una tormenta.

El contenido de esta unidad se presenta en tres subtemas. En el primero se tratarán cuestiones de tipo general acerca de la simulación, en el segundo se desarrollarán métodos para simular números pseudoaleatorios y en el tercero, métodos para simular variables aleatorias.

Al igual que en las unidades anteriores, los elementos importantes se resaltarán empleando un fondo de color, con la finalidad de que los uses para obtener un nivel óptimo de conocimientos acerca de la materia de estudio.



Unidad 3. Elementos de simulación

Competencia específica

Utilizar métodos para generar números pseudoaleatorios y variables aleatorias mediante diferentes técnicas de simulación.

Logros

- Simular números pseudoaleatorios a través de los métodos congruencial y de cuadrados mínimos.
- Simular variables aleatorias empleando el método de la transformada inversa y el de convolución.



Unidad 3. Elementos de simulación

3.1. Métodos de generación de números pseudoaleatorios y de variables aleatorias

Seguramente te has dado cuenta de que los videojuegos han ido evolucionando de tal manera que son cada vez más realistas, lo que tiene como consecuencia obtener una mejor experiencia al jugarlos.

Pero te has preguntado alguna vez...

¿Cómo es posible que un programa muestre gráficos que se comporten de manera muy similar a los fenómenos de la vida real?

Claramente se debe a que el programador debió emplear métodos que “simulan” situaciones de la vida real en sus algoritmos. La simulación ha sido empleada por muchos científicos desde hace mucho tiempo, debido a que a través de ella se pueden generar modelos que sean muy similares a un sistema, ya sea determinístico o estocástico, que sufre cambio con respecto al tiempo, haciendo más fácil su análisis.

En esta unidad aprenderás dos métodos para simular números pseudoaleatorios y dos para simular variables aleatorias con la finalidad de que seas capaz de aplicarlos a situaciones en las que sea necesario el uso de cada uno de dichos elementos para hallar soluciones.

3.1.1. Generalidades

Es notorio que, si se considera un fenómeno natural, por ejemplo, el clima, en él interactúan diversas variables de tipo aleatorio: la temperatura, la humedad y la presión atmosférica. Este grupo de variables forman un sistema, para el cual se puede generar un programa de



Unidad 3. Elementos de simulación

computadora que intente copiar el comportamiento de éste. A dicho programa se le denomina simulador, el cual, para realizarse, requiere de la elaboración del modelo matemático de cada uno de los elementos del sistema.

Algunos sistemas pueden contener también variables de tipo determinístico, muchas de las cuales pueden ser analizadas y modeladas con ecuaciones físicas.

La razón primordial por la cual se emplea la técnica de simulación es debido a que a través de ésta se hace posible estudiar un fenómeno con la finalidad de intentar predecir su comportamiento.

Debes considerar que aunque se realice un simulador que se asemeje mucho a un fenómeno determinado, tampoco se asegura un comportamiento exacto de éste.

En las secciones subsecuentes se mostrarán algunos métodos para modelar números que se consideran aleatorios, así como variables aleatorias.

Para efectos de contar con un concepto formal del término “simulación”, se te presentan diversas definiciones que han proporcionado algunos autores, las cuales son muy aceptadas en la actualidad.

Autor	Definición
Thomas Naylor	La simulación es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital, la cual requiere ciertos tipos de modelos lógicos y matemáticos que describen el comportamiento de un negocio o un sistema económico (o algún componente de ellos) en periodos extensos de tiempo real.
Martin Shubik	Simulación de un sistema (o un organismo); es la operación de un modelo (simulador), el cual es una representación del



Unidad 3. Elementos de simulación

sistema. Este modelo puede sujetarse a manipulaciones que serían imposibles de realizar, demasiado costosas o imprácticas. La operación de un modelo puede estudiarse y, con ello, inferirse las propiedades concernientes al comportamiento del sistema o subsistema real.

Roger Schroeder

La simulación es, esencialmente, una técnica que enseña a construir el modelo de una situación real aunada a la realización de experimentos con el modelo.

Robert E. Shannon

La simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias –dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos– para el funcionamiento del sistema.

Robert J. Thierauf y

Richard A. Grosse

La simulación es una técnica cuantitativa que se emplea para evaluar cursos alternativos de acción, basada en hechos, suposiciones y cursos alternativos de acción, con un modelo matemático de computadora, con el fin de representar la toma real de decisiones en condiciones de incertidumbre.

Existen dos tipos de modelos de simulación:

- 1) Los continuos
- 2) Los discretos

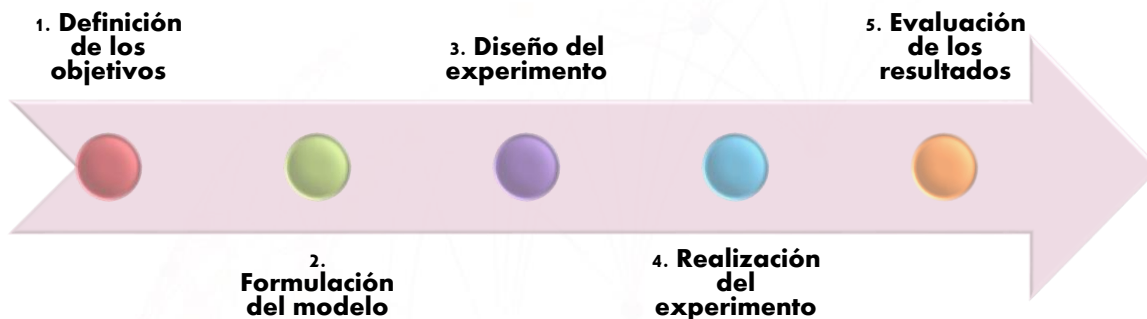
Los modelos continuos representan sistemas cuyo comportamiento se modifica de forma continua con el tiempo, mientras que los discretos caracterizan sistemas cuyo comportamiento sufre cambios en instantes determinados.



Unidad 3. Elementos de simulación

Un modelo de simulación continuo se puede emplear para modelar, por ejemplo, al movimiento armónico simple a través de ecuaciones diferenciales. Asimismo, los sistemas de colas son situaciones que se ajustan a modelos de simulación discretos.

Para realizar un proceso de simulación, básicamente se deben seguir los siguientes pasos:



En muchos casos en los que se requiere simular un sistema es necesario generar números aleatorios, por ello es imperativo contar con métodos para hallarlos. En la siguiente sección aprenderás dos métodos para determinar números aleatorios.

3.1.2. Métodos de generación de números pseudoaleatorios

Seguramente habrás empleado números aleatorios cuando estudiaste las técnicas de muestreo. Dichos valores los obtenías de una tabla a través de “movimientos” considerados al azar. En



Unidad 3. Elementos de simulación

esta sección se analizarán dos técnicas que permitirán determinar números pseudoaleatorios entre 0 y 1.

Te preguntarán ahora...

¿Qué caso tiene hablar de números pseudoaleatorios cuando el objetivo es buscar números aleatorios?

La respuesta es simple, los números pseudoaleatorios se pueden considerar aleatorios si cumplen las cinco condiciones siguientes (a pesar de que se determinen empleando una regla fija):

1. Son uniformemente distribuidos con límite inferior 0 y límite superior 1
2. Independientes desde un punto de vista estadístico
3. Tienen media estadísticamente igual a $1/2$
4. Tienen varianza estadísticamente igual a $1/12$
5. Presentan un largo periodo de vida

Para verificar los puntos del uno al cuatro se emplean pruebas de hipótesis. El punto cinco se refiere a que la serie numérica que se genera no se reinicia de manera rápida.

Es necesario aclarar que en esta sección sólo se presentarán los métodos para calcular los números pseudoaleatorios (o aleatorios), pero no se realizarán las pruebas para verificar los



Unidad 3. Elementos de simulación

puntos enlistados. En ambas técnicas se llamará semilla al primer valor seleccionado para iniciar el proceso.

Inicia estudiando el método congruencial, en el cual se emplea la siguiente regla:

Regla del método congruencial de generación de números pseudoaleatorios

$$r_{i+1} = (a + c r_i) \bmod m \dots\dots\dots (i)$$

Donde

r_0 se denomina semilla y es un número entero positivo.

a es un entero cualquiera.

c es un entero impar que no es divisible por tres ni por cinco.

m es un entero lo más grande posible.

Debes considerar que si los cálculos se harán en una computadora, entonces se recomienda que a sea tal que $a \bmod 8 = 5$ para equipos binarios, o bien $a \bmod 200 = 21$ para dispositivos decimales, asimismo, m debe ser el número más grande que la computadora acepte.

Pasos del método congruencial de generación de números pseudoaleatorios entre 0 y 1

$$r_{i+1} = (a + c r_i) \bmod m \dots\dots\dots (i)$$

1. Se determina una semilla r_0 .

2. Se proponen valores enteros apropiados para a , c y m .

3. Se sustituyen los valores propuestos en el paso 2 junto con la semilla en la regla

$$r_{i+1} = (a + c r_i) \bmod m$$

Obteniendo el valor r_1 , el cual debe cumplir: $0 \leq r_1 \leq m-1$.



Unidad 3. Elementos de simulación

4. Se emplea la regla del paso 3 con los valores propuestos en el paso 2 y r_1 , para obtener r_3 .
5. Se continúan sustituyendo valores de forma similar al paso cuatro, hasta determinar el número n de congruencias que se necesiten. Esto significa que cada r_{i+1} se obtiene empleando los valores del paso 2 y r_i .
6. Al final cada r_k con $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq n$, se divide entre $m-1$, obteniendo en cada caso un número pseudoaleatorio.

A partir de aquí, cuando se solicite calcular números aleatorios, deberás entender que se tienen que determinar números pseudoaleatorios por el método que se indique.

Ejemplo 3.1.2.1.

Emplea el método congruencial para generar cuatro números aleatorios, entre cero y uno, usando la semilla $r_0 = 53$.

Solución:

Considerando $a = 520$, $c = 17$ y $m = 869$ en la ecuación (i), se tiene:

$$r_1 = (520 + 17(53)) \bmod 869 = (1421) \bmod 869 = 552$$

$$r_2 = (520 + 17(552)) \bmod 869 = (9904) \bmod 869 = 345$$

$$r_3 = (520 + 17(345)) \bmod 869 = (6385) \bmod 869 = 302$$

$$r_4 = (520 + 17(302)) \bmod 869 = (5654) \bmod 869 = 440$$

Como se requiere que los números aleatorios se encuentren entre cero y uno, es necesario dividir los valores generados entre $m = 869 - 1 = 868$ obteniendo el siguiente conjunto de números aleatorios:

$$\{0.6359447, 0.397465438, 0.347926267, 0.506912442\}$$



Unidad 3. Elementos de simulación

Nota: debes notar que como el valor de m presenta tres cifras, entonces si se desean valores entre cero y uno, los números obtenidos a través de las congruencias, los cuales son enteros, deben presentar valores entre 0 y $m - 1$, para después dividirlos entre $m - 1$.

Se ve ahora otra técnica que permite determinar números pseudoaleatorios, la cual se denomina método de cuadrados medios, cuyo procedimiento se describe a continuación:

Método de cuadrados medios de generación de números pseudoaleatorios entre cero y uno

1. Determinar una semilla.
2. Se eleva la semilla al cuadrado.
3. Se toman los k dígitos centrales del valor obtenido en el paso 2, con los cuales se considerará un número entre cero y uno, el cual será el primer valor pseudoaleatorio.
4. Los dígitos considerados en el paso 3 se considerarán como una nueva semilla y se repiten los pasos 2 y 3 para obtener el siguiente número pseudoaleatorio.
5. Se repiten los pasos del 1 al 4 hasta obtener el número de elementos deseado.

Ejemplo 3.1.2.1.

Emplea el método de cuadrados medios para generar cuatro números aleatorios entre cero y uno, cada uno de los cuales deberá presentar cuatro decimales, utilizando la semilla 523.

Solución:

$523^2 = 273529$ por lo tanto, al considerar los cuatro dígitos centrales del valor obtenido, se tiene que el primer número aleatorio es 0.7352.

Así:



Unidad 3. Elementos de simulación

$7352^2 = 54051904$, de donde el segundo número aleatorio es 0.0519.

$519^2 = 269361$, de aquí que el tercer número aleatorio sea 0.6936.

$6936^2 = 48108096$ y el último aleatorio es 0.1080.

El empleo de *software* también es de gran ayuda cuando se desea determinar números aleatorios, por ejemplo, Excel o Minitab, además de una calculadora científica. Debido a que en el presente curso no se pretende proporcionar manuales sobre el uso de dispositivos electrónicos para calcular números aleatorios, se te recomienda que en cuanto cuentes con un poco de tiempo busques los procedimientos que se deben seguir para realizar dicha acción haciendo uso de *software* o bien de una calculadora científica.

3.1.3. Métodos de generación de variables aleatorias

En la sección anterior aprendiste a determinar números pseudoaleatorios, los cuales pueden considerarse sin problema alguno como aleatorios. Ahora, en la presente sección, es necesario establecer dos métodos para generar variables aleatorias; contarás con herramientas que te permitirán simular sistemas estocásticos con la finalidad de que los analices de manera sencilla.

Las técnicas que se tratarán en esta parte de la unidad requieren del empleo de números aleatorios, por tal motivo es necesario que tengas presentes los conocimientos adquiridos en la sección anterior.

Inicia con el método de la transformada, el cual emplea la función de distribución acumulada (fda) $F(x) = P(X \leq x)$ de la distribución de probabilidades a simular.



Unidad 3. Elementos de simulación

Como recordarás, la fda nombrada en el párrafo anterior cumple que $0 \leq F(x) \leq 1$, por lo que si r_i es un número aleatorio que se obtiene de una distribución uniforme en $(0, 1)$, y si F^{-1} es la inversa de F , entonces existe $x_i \in [0, x]$, tal que $x_i = F^{-1}(r_i)$.

La afirmación anterior es la que da la pauta para describir el siguiente procedimiento:

Método de la transformada inversa para generar variables aleatorias

Paso 1. Generar un número aleatorio r_i en $(0, 1)$.

Paso 2. Generar la variable aleatoria a través de la regla $x = F^{-1}(r_i)$.

Ejemplo 3.1.3.1.

Genera la regla para simular una variable aleatoria con distribución exponencial.

Solución:

La función de densidad está dada en este caso por...

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

De aquí que la fda sea:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Considerando

$$r_i = 1 - e^{-\lambda x}$$

Se tiene que

$$F^{-1}(r_i) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i)$$

Entonces la regla para generar la variable aleatoria en este caso es:



Unidad 3. Elementos de simulación

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i)$$

Si fuera necesario determinar valores a través de la regla obtenida, únicamente se deberá realizar una sustitución en la fórmula de un grupo de números aleatorios.

El caso anterior muestra la forma para simular variables aleatorias de tipo continuo, aunque este método puede que no sea aplicable en algunos casos debido a que las funciones de densidad de una distribución de probabilidades pueden no ser integrables por métodos comunes.

El último método que se analizará es de gran utilidad cuando es posible expresar una variable aleatoria como la suma de otras variables aleatorias, como en el caso de la distribución de Erlang. Dicha técnica se nombra convolución. Observa un ejemplo.

Ejemplo 3.1.3.2.

La distribución de Erlang se define como la suma estadística de m variables exponenciales iid. Usa el método de convolución para encontrar una relación que simule una variable aleatoria de Erlang.

Solución:

La función de densidad en este caso se puede escribir así:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda e^{-\lambda x_i} , \quad x_i > 0 , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Como ya se vio en el ejemplo 3.1.3.1., la distribución exponencial se simula a través de la expresión:

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i)$$



Unidad 3. Elementos de simulación

Entonces es posible simular la distribución de Erlang mediante la regla:

$$x = \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \sum_{i=1}^m \ln(1-r_i) = -\frac{1}{\lambda} \ln \left[\prod_{i=1}^m (1-r_i) \right]$$

Ha culminado el curso Modelación estocástica, ahora realiza las actividades que se te solicitan con la finalidad de que afiances los conocimientos adquiridos. El equipo de la UnADM te desea éxito en todos tus proyectos.

Cierre de la unidad

En esta unidad aprendiste a simular números pseudoaleatorios, los cuales pueden considerarse como aleatorios, además, variables aleatorias, empleando diversos métodos. Ahora estás en posibilidades de emplear estos nuevos conocimientos para resolver mayor número de problemas de tipo estocástico, logrando con ello aportar métodos de solución de problemas de diversa índole en el sector productivo.

El equipo de la UnADM te felicita por haber subido un escalón más hacia la culminación de tu proyecto académico.

Para saber más

Revisa los contenidos de la asignatura de Procesos estocásticos.

La simulación como herramienta de aprendizaje en física:



Unidad 3. Elementos de simulación

Casadei Carniel, L., Cuicas Ávila, M., Debel Chourio, E. y Álvarez Vargas, Z. (2008). LA SIMULACIÓN COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE EN FÍSICA. Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 8 (2), 1-27. Disponible en <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44713044007>

La simulación por computador en investigación y desarrollo:

Duarte, JE y Fernández Morales, FH (2005). La simulación por computadora en investigación y desarrollo. Tecnura, 8 (16), 106-114. Disponible en <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=257020406010>

Simulación, herramienta para la educación médica:

Galindo López, J., & Visbal Spirko, L. (2007). Simulación, herramienta para la educación médica. Salud Uninorte, 23 (1), 79-95. Disponible en <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=81723109>

Simulación de controladores digitales:

Álvarez G, C., Soto P., A., & Watkins O., F. (2009). SIMULACIÓN DE CONTROLADORES DIGITALES. Ingeniare. Revista Chilena de Ingeniería, 17 (3), 309-316. Disponible en <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=77212231004>

Uso de simuladores como recurso digital para la transferencia de conocimiento:

Contreras Gelves, GA, García Torres, R., & Ramírez Montoya, MS (2010). Uso de simuladores como recurso digital para la transferencia de conocimiento. Apertura, 2 (1). Disponible en <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=68820841008>



Unidad 3. Elementos de simulación

Fuentes de consulta

Básica

- Azarang, M. y García, E. (1997). *Simulación y análisis de modelos estocásticos*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Hillier, F. y Lieberman, G. (1997). *Introducción a la investigación de operaciones*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Springer, C., Herlihy, R., Mall, R. y Beggs, R. (1972). *Modelos probabilísticos: Serie de Matemáticas para la Dirección de Negocios*. México: Unión tipográfica editorial hispano-americana.
- Taha, H. (1998). *Investigación de operaciones: una introducción*. México: Prentice Hall.
- Taylor, H. y Karlin, S. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling*. EUA: Academic Press.