Matemáticas

Álgebra Moderna II

8° Semestre

Unidad 2. Secciones de grupos y órbitas

Clave

05144842

Universidad Abierta y a Distancia de México

DCEIT

Índice

Presentación de la unidad

Como fundamento teórico para la demostración de los teoremas de Sylow, aparece el concepto de acción de un grupo sobre un conjunto. Esta noción tiene analogía con el de operación binaria externa, y será tratada en el presente capítulo. Se estudiará, en particular, la acción de conjugación. Además, serán definidos los grupos transitivos del grupo simétrico Sn. Por otro lado, es de vital importancia para la demostración de los teoremas de Sylow, la ecuación de clases. Esta ecuación la cual estableceremos en este capítulo. Un tratamiento completo de los G-conjuntos nos llevará a la Teoría de los Espacios Vectoriales y Módulos sobre Anillos. Aquí, solo utilizaremos los G-conjuntos como lenguaje y herramienta para comprender mejor la Teoría de Sylow.

Competencia Específica

Identificar el concepto de acción de grupo, para determinar la estructura del grupo, mediante la acción de un subgrupo en el grupo.

Logros

- Determinar cómo grupos de funciones afectan sus conjuntos de definición para deducir algunas propiedades de las acciones de grupos.
- Utilizar las acciones de subgrupos para determinar propiedades de los subgrupos.
- Adaptar las demostraciones y construcciones anteriores para construir un grupo abeliano de un orden específico.

Acciones de grupo y Órbitas

En un grupo G su operación binaria es una función G×Y→Y que asigna a cada par ($\boldsymbol{\sigma}$,) de elementos de G el único elemento $\boldsymbol{\sigma\tau}$ ∈ G. Generalizando lo anterior y recordando la motivación que si G es un grupo y Y es un conjunto no vacío, una acción de G en Y es una función.

$*$:G×Y→Y

Que asigna a cada elemento σ∈G y y∈Y un único elemento $\sigma * y$ ∈Y. Como G es un grupo, es neutral pedir que esta acción de G en Y satisfaga las propiedades siguientes:

- Si e es el neutro de G, entonces para todo x∈Y se tiene que e∗x=x.
- Sí σ,∈G y x∈Y, entonces ($\sigma\tau$)∗x=σ∗(τ∗x).

En ocasiones, por abuso de notación, dada una acción ∗:G×Y→Y, en lugar de la notación $\sigma * \tau$ usaremos la notación $\sigma\tau$. Con esto, la propiedad 2 de arriba se escribe ($\sigma\tau$)=(τx), donde a la izquierda $\sigma\tau$ es el producto de G y el segundo producto ($\sigma\tau$)x es la acción de $\sigma\tau$ sobre x. En la derecha los productos son los de la acción de G en Y. Si Y es un conjunto en el cual se tiene una acción de G, diremos que Y es G−$conjunto$.

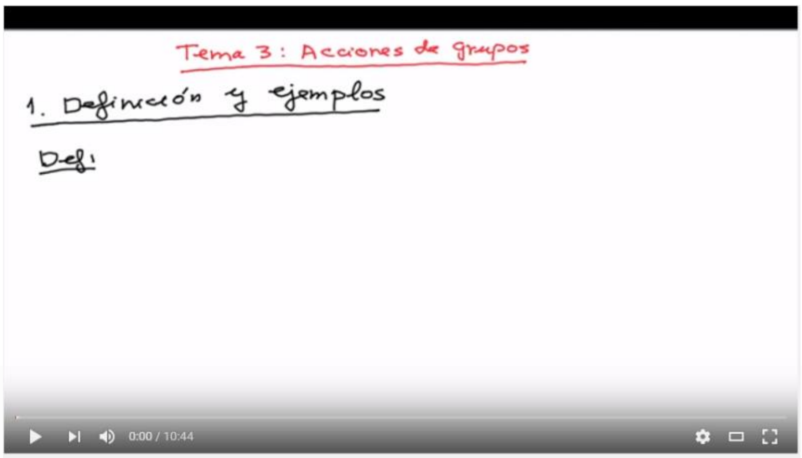
Ejemplos:

- Si Y es cualquier conjunto no vacío, sea G×Y→Y dada por $\sigma * x$=x. Claramente ésta es una acción de G en Y y decimos que G actúa trivialmente en Y.

- Si Y es cualquier conjunto no vacío, sea G=S_Y el grupo de permutaciones de Y. Entonces G actúa sobre Y permutando sus elementos, i, e., G×Y→Y está dada por $\sigma * x$=(x) la función σ calculada en x.

Para saber más puedes revisar el siguiente video sobre acciones de grupo (definición y ejemplos de acción de Alexmoqui

Alexmoqui. (21 de octubre de 2011). Definición y ejemplos de acción. [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=34ykwQHH5M8



Puntos fijos

Si un grupo G actúa sobre un conjunto Y, interesa saber cómo mueve G a los elementos Y, por esto suele ser útil estudiar los elementos Y que no se mueven, i.e., que permanecen fijos bajo la acción de G, podemos hacerlo desde dos puntos de vista:

a) Si $\sigma \in G$ está dado, podemos considerar los elementos de Y que permanecen fijos bajo la acción de este σ, y se define

$$Y\sigma \coloneqq \{x \in Y\colon \sigma * x\} \subseteq Y.$$

El conjunto $Y\sigma$ se llama **el conjunto de puntos fijos de σ**

b) Si $x \in Y$ es un elemento dado, podemos considerar el subconjunto de elementos del grupo G que dejan fijo a x, y se define.

$$Gx := \{\sigma \in G \colon \sigma * x\} \subseteq G.$$

El conjunto Gx se llama **el subgrupo de isotropía o estabilizador de x,** y en efecto es un subgrupo.

Lema 1 Gx es un subgrupo de G

Demostración:

Claramente, e∈ Gx ya que e$*x$=x si σ, ∈Gx, entonces

$$(\sigma\tau)*x=\sigma*(\tau*x)=\sigma*x=x.$$

Por lo tanto: τ∈Gx.

Finalmente, si σ∈Gx, entonces

$$\sigma-1*x=\sigma-1*\ (\sigma*x) = (\sigma-1\sigma)*x=e*x=x.$$

Así σ−1∈Gx.

Órbitas

Si Y es un G- conjunto, se define la relación siguiente en Y

$$x \sim y \;\; si\ existe\ \sigma \in G \text{ tal que } \sigma*x=y.$$

Cuando $x\sim y$, diremos que x es G-equivalente a y. Ésta es una relación de equivalencia en Y ya que:

i. Es reflexiva ya que $x\sim x$ por que $e*x=x$
ii. Es Simétrica ya que si $x\sim y$ entonces existe σ∈G tal que $\sigma x=y$ así $\sigma-1y=\sigma-1(\sigma x)=ex=x$ y por lo tanto $y\sim x$.
iii. Es transitiva ya que si $x\sim y$ y $y\sim z$, entonces existen σ,∈G tales que $\sigma x=y$ y $\tau y=z$. Se sigue que $(\tau\sigma)=(\sigma x)=\tau y=z$ y así $x\sim z$.

Las clases de equivalencia de la relación anterior se llaman las ***orbitas*** de la acción de G en Y. A la órbita de $x\in Y$ la denotaremos mediante

$$[x]=orbG(x)=\{\sigma*x\in Y{:}\sigma\in G\}.$$

La Acción de un Subgrupo

Sea G un grupo y H un subgrupo de G, diremos que H actúa sobre g por conjugación si definimos la siguiente acción de H sobre el conjunto G $(h,g)=hgh^{-1}$

Cuando un grupo G actúa sobre sí mismo por conjugación la órbita de un elemento x de G es el conjunto $\{gxg^{-1}|g \text{ en } G\}$ y se le llama la clase conjugada de x.
Si H actúa sobre G por conjugación definimos el centralizador de x en H como el conjunto $C_H(x) = \{ h \text{ en } H \mid hxh^{-1}=x \}$, si H=G lo llamaremos simplemente el centralizador de x.

Si H actúa por conjugación sobre el conjunto de los subgrupos de G, entonces el subgrupo de H que deja fijo a un subgrupo K es decir $N_H(K)=\{ h \text{ en } H \mid hKh^{-1}=K\}$ es llamado el normalizador de K en H.

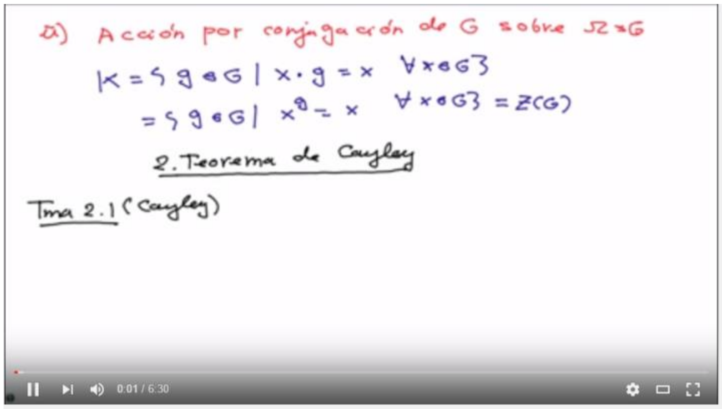
Teorema de Caley

Teorema: si G es un grupo que actúa sobre el conjunto S, entonces existe un homomorfismo de G en A(S) donde A(S) es el conjunto de todas las permutaciones de S.

Corolario: si G es un grupo, entonces existe un monomorfismo de G en A(G), entonces cada Grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones. En particular cada grupo G es isomorfo a un subgrupo de Sn con |G|=n.

Demostración
Revisa la siguiente demostración sobre el teorema de Cayley, tomado de alexmoqui:

Alexmoqui. (27 de octubre de 2011). Teorema de Cayley. [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=yx6GLTGm1Kc



Propiedades de subgrupos

Ejemplo:

Recordemos que el normalizador de un grupo K respecto a un grupo G, es un grupo donde K es un subgrupo normal, entonces si queremos encontrar un grupo H donde un grupo K dado, sea normal podemos buscar un grupo G tal que K sea un subgrupo, y después calcular el normalizador, para considerar el grupo G hay varios métodos, por ejemplo el producto directo de grupos, o simplemente encontrar un grupo más grande por ejemplo en el caso de S_n, este grupo siempre podemos considerarlo un subgrupo de S_{n+1}.

Pensemos en el grupo M={(1), (13)}, este puede considerarse un subgrupo de S_3, sin embargo también es un subgrupo de M x Z_n, y puede calcularse su normalizador y probarse que este normalizador es M x Z_n, debido a que M es un ciclo, si consideramos por ejemplo el grupo M x M, este también es abeliano, y el normalizador de M es M x M.

Buscando más específicamente el normalizador de M en S_3, es fácil de calcular, considerando todos los elementos de S_3={(1)(12)(13)(23)(123)(132)}, no es necesario calcular la acción sobre (1), pero si sobre (13)

(12)(13)(12) = (23)

(23)(13)(23) = (12)

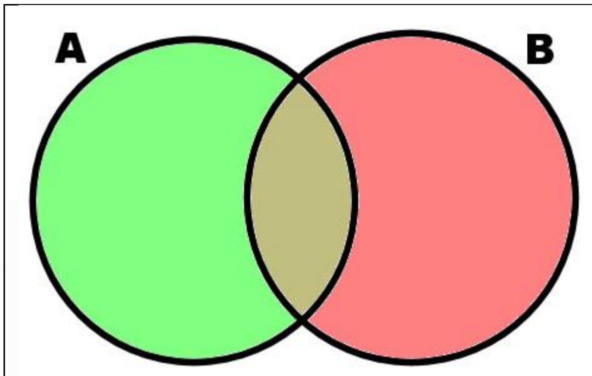
(13)(13)(13) = (13)

(123)(13)(132) = (12)

(132)(13)(123) = (23)

En este caso el normalizador de M es el mismo M.

Para saber más

	Alexmoqui. (27 de octubre de 2011). Órbitas y estabilizadores, parte 1. [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=XmyDdS_PMxM Alexmoqui. (27 de octubre de 2011). Órbitas y estabilizadores, parte 2. [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=V06vyJ2_GLA

Cierre de la Unidad

En esta unidad construiste un nuevo grupo mediante el producto directo de ellos. Ahora cuentas con las herramientas para entender mejor las acciones de grupos.

Fuentes de Consulta

Básica

- Fraleigh, J. (1994). *A First Course in Abstract Algebra.* United States of America. Addison-Wesley Publishing Company.
- Herstein, I. *Álgebra Moderna: Grupos, Anillos, Campos, Teoría de Galois*. México: Editorial Trillas.
- Rotman, J. (2000). *A First Course in Abstract Algebra.* United States of America. Prentice Hall.
- Zaldívar, F. (2006). *Introducción a la Teoría de Grupos.* México: Sociedad Matemática Mexicana.