Matemáticas

Álgebra Moderna II

8° Semestre

Unidad 3. Teoremas de Cauchy y Sylow

Clave

05144842

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Presentación de la unidad

El estudio de los grupos finitos no abelianos es más complicado que el de los abelianos.
En esta unidad podemos considerar nuestro objetivo probar que si dado un grupo G de orden m, y p un número que divide a m, entonces: ¿Es posible encontrar un subgrupo de G con orden igual a p? En los grupos abelianos, sabemos que esta respuesta es afirmativa, sin embargo en los grupos no abelianos, no es cierta. Podemos considerar propiedades adicionales a p, para tener una respuesta afirmativa.
Los resultados que verás en esta unidad son los que garantizan para que p existe un subgrupo de orden p.

Competencia Específica

Conocer las propiedades de grupos específicos para clasificarlos y construirlos utilizando los Teoremas de Cauchy y Sylow.

Logros

- Identificar algunas relaciones entre las propiedades de un grupo y los factores primos de su orden para determinar propiedades de los subgrupos.
- Analizar los Teoremas de Sylow para determinar aprender la forma de aplicarlos.
- Utilizar los teoremas de Sylow para determinar si un grupo se puede descomponer.
- Adaptar las demostraciones y construcciones anteriores para construir todos los grupos de un orden dado.

Teorema de Cauchy

Ecuación de clase

Si Y es un G-conjunto, con Y y G finitos y si r es el número de órbitas en Y de la acción de G, sean $x_1, \ldots, x_r$ representantes de cada una de las órbitas. Como estas forman una partición de Y, se tiene que:

$$|Y| = \sum_{i=1}^{r} |orb_G(x_i)|.$$

Note ahora que algunas de las órbitas pueden tener un solo elemento, y cuando esto sucede este elemento x no lo mueve ningún elemento de G, es decir, queda fijo bajo todo $\sigma \in G$, es decir, $\sigma x = x$ para todo $\sigma \in G$. Pongamos entonces:

$$Y^G := \{x \in Y : \sigma x = x, \quad para\ todo \quad \sigma \in G\},$$

Es decir, Y^G es la unión de las órbitas con un solo elemento. Sea $s = |Y^G|$ y observe que $0 \leq s \leq r$. Si $x_1, \ldots, x_s$ son los elementos de las órbitas con un solo elemento, y $x_{s+1}, \ldots, x_r$ son representantes de las órbitas con más de un elemento. Entonces:

$$|Y| = |Y^G| + \sum_{i=s+1}^{r} |orb_G(x_i)|.$$

Ejemplo: Si G es un grupo finito, $Y = G$ y se hace actuar G sobre sí mismo por conjugación, entonces las órbitas de la acción son las clases de conjugación de G. Observe ahora que las órbitas que tienen un solo elemento $orb_G(x) = \{x\}$ satisfacen que $gxg^{-1} = x$, es decir, $gx = xg$ para todo $g \in G$ y por lo tanto x debe estar en el centro $Z(G)$ de G. Se sigue que:

$$Y^G = Z(G).$$

Finalmente, si denotamos con $C_1, \ldots, C_t$ las clases de conjugación de G con más de un elemento, por lo tanto:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=s+1}^{r} |C_i|.$$

A la ecuación anterior se le conoce como ecuación de clase de G.

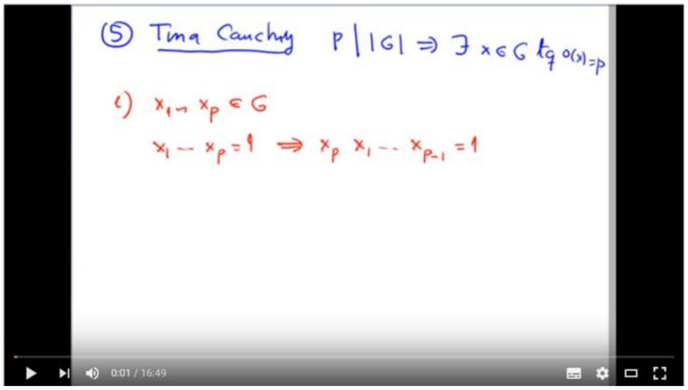
Teorema de Cauchy. Si G es un grupo finito y p es un primo que divide a G, entonces G tiene un elemento de orden p y por lo tanto G tiene un subgrupo de orden p.

Puedes ver dos demostraciones de este teorema en los siguientes videos:

Revisa los siguientes videos que enseñan las demostraciones sobre el Teorema de Cauchy.

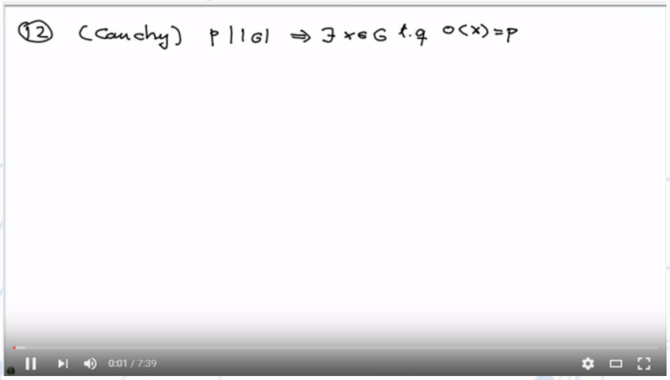
Primera demostración Teorema de Cauchy

Alexmoqui. (16 de octubre de 2012). Teorema de Cauchy. [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=FHAXpI_6e3w



Segunda demostración, Teorema de Cauchy, tomado de Alexmoqui:

Alexmoqui. (28 de octubre de 2011). Teorema de Cauchy (Problema 12). [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=XBOsxUtJ9L8



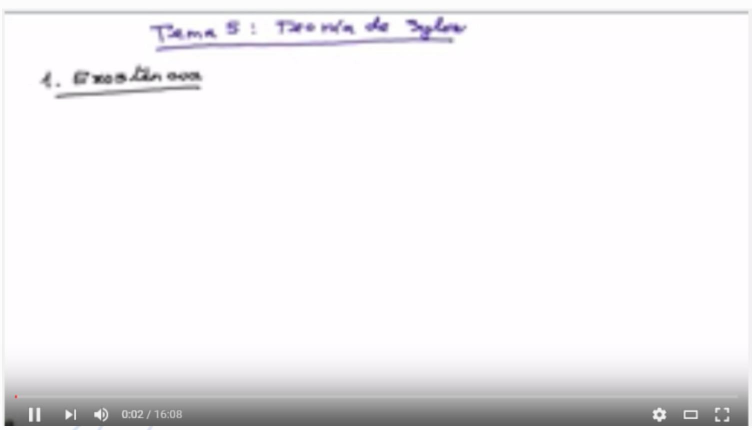
Definición: Un grupo G, en el que todos sus elementos tengan orden igual a una potencia de un numero primo p, será llamado un p-grupo. Si H es un subgrupo de G y H es un p-grupo, entonces H es un p-subgrupo de G.

Teoremas de Sylow

Los siguientes, son los llamados Teoremas de Sylow y nos ayudan a descomponer los grupos, en p-subgrupos.

Teorema (Primer Teorema de Sylow). Sea G un grupo finito de orden n y suponga que p es un primo tal que $n = p^m t$ con $m \geq 1$ y $p \nmid t$. Entonces G contiene un subgrupo de orden p^j para toda j tal que $1 \leq j \leq m$.

Teorema de Sylow, Existencia tomado de Alexmoqui:
Alexmoqui. (8 de diciembre de 2011). Teorema de Sylow, Existencia. [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=Pr1cSlLjXmE

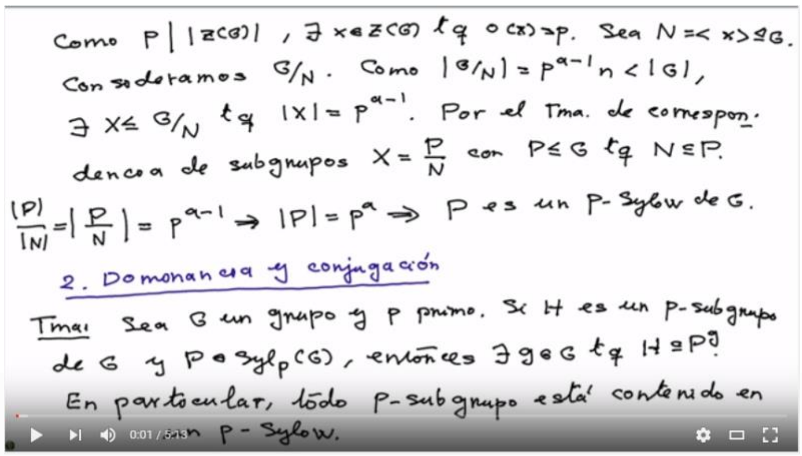


Un p-subgrupo P de un grupo G se llama un Sylow p-subgrupo. Si P es un p-grupo maximal de G, es decir cualquier H p-subgrupo de G, tal que P es un subgrupo de H, implica que H=P, es decir P no es un subgrupo propio de otro p-subgrupo de G.

Teorema (Segundo Teorema de Sylow). Sea G un grupo finito de orden n y suponga que H_1 y H_2 son dos p-subgrupos de Sylow de G. Entonces H_1 y H_2 son conjugados.

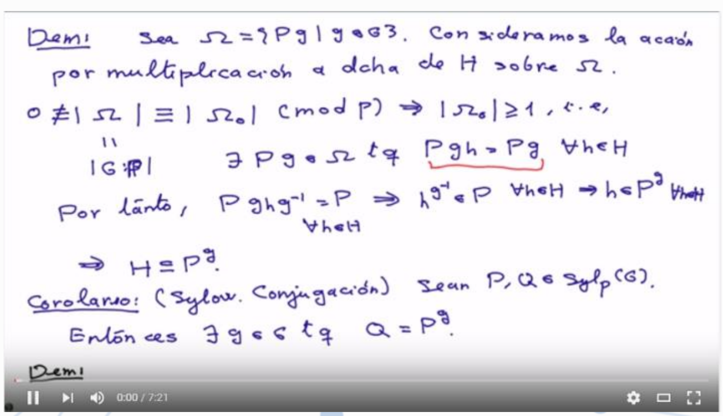
Teorema de sylow. Dominancia (2011), tomado de Alexmoqui:

Alexmoqui. (8 de diciembre de 2011). Teorema de Sylow. Dominancia. [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=1Giz3FaqWa4



Teorema de Sylow. Conjunción, tomado de Alexmoqui:

Alexmoqui. (8 de diciembre de 2011). Teorema de Sylow. Conjunción. [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=JLXOEoNNJxc

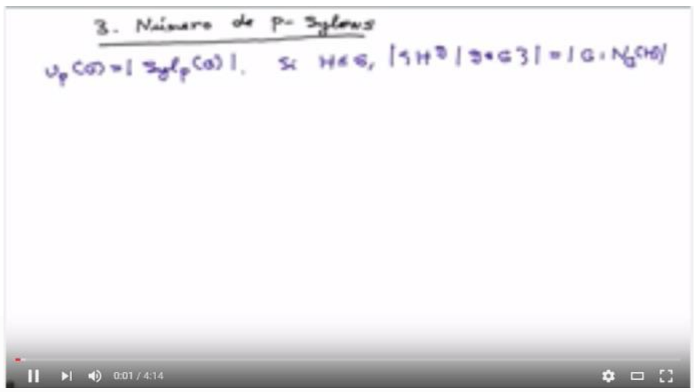


Teorema (Tercer Teorema de Sylow). Sea G un grupo finito de orden n y p un primo tal que $p|t$. Entonces, el número n_p de p-subgrupos de Sylow de G es congruente con 1-módulo p, y

$n_p = [G{:}\,N_G(P)]$, donde P es cualquier p-subgrupo de Sylow de G; se sigue que n_p divide al orden n de G.

El número de p-Sylow es el índice del normalizador, tomado de Alexmoqui (2011), recuperado de

Alexmoqui. (8 de diciembre de 2011). El número de p-Sylow es el índice del normalizador. [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=v0a4werpMjk



Teorema de Krull-Schmidt

Sabemos que algunos grupos pueden descomponerse en otros, pero ¿todos los grupos pueden descomponerse? La respuesta a esta pregunta es afirmativa para grupos finitos y para algunos otros que cumplan las condiciones que se verán en esta sección.

Definición: Se dice que un grupo G no se descompone si G es distinto de <e> y G no es el producto directo de grupos.

Definición: Sea G un grupo se dice que satisface la condición de cadena ascendente si cada cadena de grupos normales $G_1 < G_2 < G_3 < \ldots$ se estaciona, es decir a partir de un n todos los grupos con índice mayor a n de la cadena son iguales; se dice que satisface la condición de cadena descendente si cada cadena de grupos normales $G_1 > G_2 > G_3 > \ldots$ se estaciona, es decir a partir de un n todos los grupos con índice mayor a n de la cadena son iguales.

Teorema. Cada grupo que satisface alguna de las condiciones de cadena, es el producto finito de grupos que no se descomponen.

Teorema. Un grupo finito G, satisface ambas condiciones de cadena.

Teorema de Krull-Schmidt. La descomposición de un grupo en factores que no se descomponen es única.

Grupos de Orden 8

Ejemplo:

Encontremos los grupos de orden 6. La descomposición en primos de 6 es 2x3; entonces si G es un grupo de orden 6, existen elementos a y b tales que $|b|=3$ y $|a|=2$, entonces $<a>$ es un subgrupo normal de G, luego el grupo $G/<b>$ es de orden 2, entonces los elementos de G son $\{1, b, b^2, a, ab, ab^2\}$, como G no es abeliano y $a<b>=<b>a$, entonces $ba=ab^2$ y $b^2a=ab$, como el grupo G que consideramos fue arbitrario, entonces todos los grupos de orden 6 son isomorfos a este G, en particular si consideramos ahora el grupo S_3 y tomamos el mapeo que a (12) lo envía a a; a (1) lo envía a 1, y a (123) lo envía a S_3, entonces es el mapeo isomorfo a S_3, luego todos los grupos no abelianos de orden 6 son isomorfos a S_3, o en otras palabras, S_3 es el único grupo no abeliano de orden 6 salvo isomorfismos.

Para saber más

	Teorema de cauchy, tomado de cosenodetheta: Cosenodetheta. (29 de mayo de 2013). Teorema de Cauchy. [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=tpnecqymAHY

Cierre de la Unidad

En esta unidad construiste un nuevo grupo mediante el producto directo de ellos. Ahora, cuentas con las herramientas para entender mejor las acciones de grupos.

Fuentes de consulta

Básica

- Herstein, I. *Álgebra Moderna: Grupos, Anillos, Campos, Teoría de Galois*. México: Editorial Trillas.
- Fraleigh, J. (1994). *A First Course in Abstract Algebra.* United States of America: Addison-Wesley Publishing Company.
- Rotman, J. (2000). *A First Course in Abstract Algebra.* United States of America: Prentice Hall.
- Zaldívar, F. (2006). *Introducción a la Teoría de Grupos.* México: Sociedad Matemática Mexicana.