Matemáticas

Investigación de operaciones

8° Semestre

Unidad 1. Programación lineal, Planteamiento de problemas

Clave:
05144843

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice general

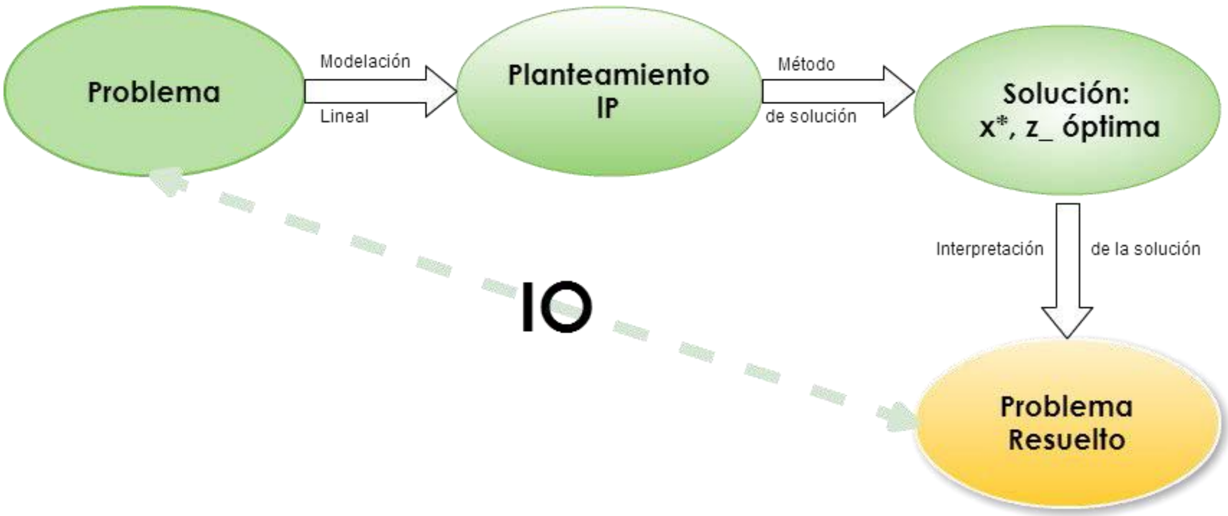
Introducción

La programación lineal es una de las técnicas más utilizadas en la modelación y resolución de problemas que surgen en la Investigación de Operaciones, esta técnica modela problemas en donde se busca optimizar el valor de una función objetivo que es lineal en las variables de decisión y donde también se debe cumplir un conjunto de relaciones lineales entre dichas variables.

La programación lineal tiene un desarrollo importante a partir de la Segunda Guerra Mundial, en donde su uso resolvió importantes problemas de asignació de recursos. Las aplicaciones de la programació lineal posteriores a la guerra son variados, hoy constituyen una de las herramientas más utilizadas para los modelos de planificación de actividades y su éxito ha rebasado el ámbito de los departamentos de Investigación de Operaciones, ha llegado a convertirse en una herramienta útil para la toma d decisiones debido a la capacidad de modelar problemas grandes y complejos y la habilidad de los usuarios para resolver problemas a gran escala en un lapso de tiempo razonable con ayuda de computadoras.

En esta unidad se aborda el planteamiento de problemas de programación lineal y la forma que puede tener el palanteamiento.

Etapas de la Investigación de Operaciones



Capítulo 1

Programación lineal, planteamiento de problemas

1.1. Planteamiento de problemas de programación lineal

La creación del modelo lineal que representa al problema real puede ser una ac- tividad ingeniosa y no hay una fórmula para plantear los problemas, además hay un campo de aplicación muy vasto y en cada área se obtienen diferentes plantea- mientos de programación lineal. Para ilustrar la forma de plantear modelos lineales vamos a considerar algunas situaciones representativas como: problemas de producción, asignación, transporte, mezclas, dieta, almacén. Otros tipos de problemas que no abordamos son, por ejemplo, economía, horarios, inventarios, planificación financiera, distribución de actividades.

Ejemplo 1. Se lanzan dos nuevos productos al mercado para la actual temporada construidos con piezas nacionales e importadas. El modelo T que se fabrica con doble suspensión y cuadro nacional con un precio de venta de \$ 220, el modelo W lleva triple suspensión, tijera importada y cuadro nacional, su precio es de \$ 330. Las piezas se arman y ajustan en talleres que disponen de un total de 260 y 1100 horas hombre para cada actividad. La cantidad de horas hombre que requiere cada modelo por taller son:

Modelo	Armado	Ajuste
T	3	10
W	2	11

Los costos y la disponibilidad de los materiales son los siguientes:

Pieza	Costo	Disponibilidad
Doble. Susp.	70	80
Triple. Susp.	100	70
Tijera Import.	90	260
Cuadro Nal.	100	100

La experiencia en ventas del periodo anterior para modelos similares estima que la demanda será tal, que se requieren al menos 3 modelos T por cada 7 modelos W.

Una parte importante del planteamiento del problema es definir las variables de decisión, si se definen adecuadamente es posible expresar con ellas todos los requerimientos del problema. Para este caso observamos que se desea conocer cuántos modelos se producirán para la actual temporada, por lo que definimos las variables como:

t.- Cantidad de modelos T a producir para la actual temporada
w.- Cantidad de modelos W a producir para la actual temporada

La disponibilidad de suspensiones dobles, triples y cuadros nacionales limita la producción de los modelos T y W, puesto que son componentes imprescindibles, las primeras restricciones son: $t \leq 80$, $w \leq 70$ y $t + w \leq 100$. Esta última restricción se debe a que ambos modelos incluyen cuadro nacional para su producción y sólo se dispone de 100 cuadros. La disponibilidad de horas hombre para el taller de armado y de ajuste nos dan las siguientes restricciones: $3t + 2w \leq 260$ y $10t + 11w \leq 1100$ respectivamente, además la experiencia en ventas del periodo anterior se refleja con la restricción $-7t + 3w \leq 0$ y por último, las restricciones de no negatividad $t \geq 0$, $w \geq 0$, pues no tiene sentido producir cantidades negativas.
Se puede pensar que debemos restringir los valores de las variables t y w en el conjunto de números enteros, puesto que no tiene sentido producir fracciones de algún modelo, sin embargo, en la programación lineal se aceptan resultados fraccionales y los casos que estrictamente requieren soluciones enteras se resolverán con programación entera[1].

El objetivo es maximizar la utilidad de la producción, que resulta de sumar la utilidad del modelo T con la utilidad del modelo W:
(precio de T-costo de T) x unidades producidas de T + (precio de W-costo de W)

x unidades producidas de W, es decir, (220-70-100)t+(330-100-90-100)w, o bien, $50t + 40w$. Por lo que el planteamiento que obtenemos es el siguiente:

Max $\quad z = 50t + 40w$

s.a. $\quad t \leq 80$

$w \leq 70$

P $\quad t + \quad w \leq$

$100 \; 3t + 2w \leq$

260

$10t + 11w \leq 1100$

$-7t + 3w \leq 0$

$t, \; w \geq 0$

[1] Puede consultar bibliografía que aborde el tema de programación entera.

1.1. PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

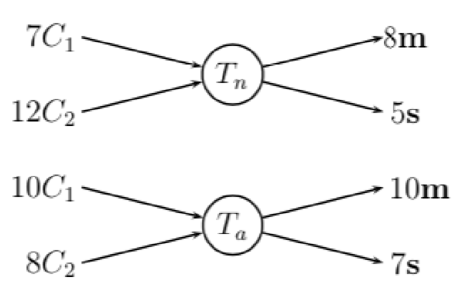
Usualmente se escriben las restricciones del problema abajo de la función objetivo poniendo las letras s.a. para abreviar a la frase sujeto a las restricciones.

Ejemplo 2. La compañía Pemex produce en sus refinerías gasolina magna, m, y gasolina súper, s, a partir de dos tipos de crudos C_1 y C_2. Cuenta con dos tipos de tecnologías para el proceso: la nueva y la anterior, denotadas por T_n y T_a, respectivamente. La tecnología nueva utiliza en cada sesión de destilación 7 unidades de C_1 y 12 de C_2 para producir 8 unidades de gasolina m y 5 de gasolina s; con la tecnología anterior, en cada destilación se obtienen 10 unidades de gasolina m y 7 de s con un consumo de 10 unidades de C_1 y 8 de C_2.

Estudios de demanda permiten estimar que el próximo mes se deben producir al menos 900 unidades de m y entre 700 y 1700 unidades de s. La disponibilidad del crudo C_1 y C_2 son 1400 y 2000, respectivamente. Los beneficios por unidad de gasolina producida son \$4 y \$7, para m y s, respectivamente.

Se desea conocer cómo utilizar parcial o total ambos procesos así como el crudo disponible para que el beneficio sea máximo.

Es muy útil esquematizar la información involucrada en el problema, en este caso proponemos el siguiente esquema.



Observamos que se desea conocer el número de destilaciones con cada tecnología, por lo que definimos las variables de decisión como sigue.

x_1.- Número de destilaciones con la tecnología nueva

x_2.- Número de destilaciones con la tecnología anterior

La disponibilidad de ambos tipos de crudo genera las restricciones $7x_1 + 10x_2 \leq 1400$ y $12x_1 + 8x_2 \leq 2000$, de acuerdo con las cantidades del crudo necesarias para la destilación con cada tipo de tecnología. Si se realizan x_1 destilaciones con T_n y x_2 destilaciones con T_a, los productos obtenidos son $8x_1 + 10x_2$ unidades de m y $5x_1 + 7x_2$ unidades de s. Por lo que el beneficio resulta $4(8x_1 + 10x_2) + 7(5x_1 + 7x_2) = 67x_1 + 89x_2$

El planteamiento que se obtiene resulta

$$\text{Max} \quad z = 67x_1 + 89x_2$$

$$\text{s.a.} \quad 7x_1 + 10x_2 \leq$$

$$1400 \; 12x_1 + 8x_2$$

$$\leq 2000$$

$$\text{P} \quad 8x_1 + 10x_2 \geq$$

$$900 \; 5x_1 + 7x_2$$

$$\geq 300$$

$$5x_1 + 7x_2 \leq 1700$$

$$x_1,\; x_2 \geq 0.$$

En los ejemplos anteriores se explicaron y justificaron las restricciones así como la función objetivo, esto se debe a que se desea ilustrar la manera de realizar los planteamientos. Sin embargo, cuando se pide escribir el planteamiento de un problema lo más común es proponer el planteamiento haciendo solo algunas observaciones, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Problema de Almacén.

Una empresa que se dedica a la compra y venta de harina tiene un alamacén con capacidad de 730 t, t indica toneladas. En la actualidad dispone de 265 t de reserva y maneja una predicción de los precios por tonelada, en miles de pesos, para los próximos 7 meses como se indica en la tabla.

Mes	1	2	3	4	5	6	7
Precio	80	90	100	95	110	130	125

Hay un costo de almacenamiento por tonelada-mes de 6000 pesos. El precio de la harina tiene variaciones, de modo que la empresa busca una política de compra a precios bajos y venta cundo éstos son más altos, teniendo en cuenta que esto es posible debido a que el mercado es muy dinámico y siempre hay disponibilidad y demanda de harina.

La empresa desea construir un modelo de programación lineal que refleje tal política proporcionando el mayor beneficio posible.

Las variables de decisión van a ser:

C_i.- Cantidad de harina a comprar en el mes

i V_i.- Cantidad de harina a vender en el mes i

A_i.- Cantidad de harina almacenada el mes i

con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

La relación dinámica entre estas variables está determinada por la ecuación

$$\text{inventario}_{i-1} + \text{compra}_i = \text{venta}_i + \text{inventario}_i$$

El problema del Almacén resulta

$$\text{Max} \quad z = 80(V_1 - C_1) + 90(V_2 - C_2) + 100(V_3 - C_3) + 95(V_4 - C_4)$$

$$+110(V_5 - C_5) + 130(V_6 - C_6) + 125A_6 - 6(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6) \text{ s.a.} \qquad A_i \leq 730,\ i = 1, \ldots, 6$$

$$V_1 + A_1 - C_1 = 265$$

$$V_{i+1} + A_{i+1} - C_{i+1} - A_i = 0,\ i = 1, \ldots, 6$$

$$A_i, C_i, V_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7.$$

Observemos que las restricciones no excluyen la posibilidad de que en el mismo mes se compre y venda, sin embargo, alguna de las variables C_i o V_i debería ser igual a cero, pues no tiene sentido comprar y vender cuando el precio en ambos casos es el mismo. Si en la solución óptima existe algún i con la condición $C_i > 0$ y $V_i > 0$, entonces redefinimos los valores de las variables de la siguiente manera $C_i = C_i - \min\{C_i, V_i\}$, $V_i = V_i - \min\{C_i, V_i\}$, que mantiene la factibilidad, pues en las restricciones sólo aparece la diferencia $V_i - C_i$.

1.2. Forma del planteamiento del PPL

Una vez que se tiene planteado el modelo lineal del problema o Problema de Programación Lineal, P.P.L., es posible que las desigualdades de las restricciones no estén todas en el mismo sentido o incluso haya igualdades. Existen dos formas particulares que puede tener el P.P.L., forma canónica y forma estándar, a continuación se describe cada una de estas formas.

En el caso de maximizar, el problema está en forma canónica si todas las restricciones tienen el sentido de la desigualdad como menor que o igual y todas las variables deben ser no negativas:

$$P\quad \begin{array}{ll} \text{Max} & z = cx \\ \text{s.a.} & Ax \le b \\ & x \ge 0. \end{array}$$

Para el caso de minimizar, el problema está en forma canónica si todas las restricciones tienen el sentido de la desigualdad como mayor que o igual y todas las variables deben ser no negativas:

$$P\quad \begin{array}{ll} \text{Min} & z = cx \\ \text{s.a.} & Ax \ge b \\ & x \ge 0. \end{array}$$

El problema de maximizar o minimizar está en forma estándar si todas las restric- ciones están definidas con igualdad y todas las variables deben ser mayor que o igual a cero:

$$P \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & z = cx \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \qquad\qquad P \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & z = cx \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Para los tres casos c denota un vector renglón de n componentes, x un vector co- lumna de tamaño n, A una matriz de tamaño $m \times n$ y b un vector columna de m componentes.

Es posible cambiar la forma en que está escrito un problema, por ejemplo, de forma canónica a forma estándar o viceversa. Esto se hace agregando variables de holgura[2] o escribiendo las igualdades como dobles desigualdades. Si el planteamiento del modelo tiene variables negativas, estas se pueden expresar como la diferencia de dos variables no negativas.

[2] Las variables de holgura se agregan a la desigualdad para tener la ecuación, ya sea sumando o restando la variable de holgura según sea el caso, de modo que la variable de holgura tenga valores no negativos. Si la restricción es del tipo $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ la holgura se agrega así: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - h_i = b_i$, con $h_i \geq 0$ y se logra la igualdad.

Fuentes de consulta

Básica

- Bazaraa, M.S. (1999). Programación Lineal y Flujo en Redes. Segunda Edición. México: Limusa.
- Kaufmann, A. (1976). Métodos y modelos de la Investigación de Operaciones. España: Compañía Editorial Continental.
- Taha, H. (1992). Operations Research: An Introduction. Fifth Edition. U.S.A.: Macmillan Publishing Company.