



Matemáticas

Investigación de Operaciones

8° Semestre

Unidad 2. Programación lineal, algoritmo simplex

**Clave
05144843**

Universidad Abierta y a Distancia de México





Índice

Introducción	3
2.1. Notación	4
2.2. Forma explícita de un problema respecto a una base	4
2.3. Algoritmo Simplex	11
2.4. Soluciones básicas factibles iniciales.....	15
2.4.1. Método de las dos fases	15
2.4.2. Método de la gran M	24
Fuentes de consulta	30



Introducción

La programación lineal tiene una amplia gama de aplicaciones, por ejemplo, en la industria, el gobierno y el ejército. En 1947, el matemático George. B. Dantzig desarrolló un algoritmo llamado el método simplex para resolver problemas de programación lineal, aunque se han propuesto nuevos algoritmos, el método simplex sigue siendo un medio viable para resolver problemas de este tipo.

Desde finales de 1947 cuando Dantzig desarrolló el algoritmo simplex, mucha gente ha contribuido al crecimiento de la programación lineal, ya sea al desarrollar la teoría matemática, diseñar métodos computacionales eficientes, experimentar con nuevos algoritmos o aplicando la programación lineal para resolver problemas más complejos de control óptimo.

En esta unidad se abordarán conceptos relacionados con el método simplex para presentar su algoritmo además, se presenta una forma de aplicarlo en la solución de problemas de programación lineal.



Unidad 2. Programación lineal, algoritmo simplex

2.1. Notación

En el texto se hará uso de la notación que se observa en los libros de matemáticas e investigación de operaciones. Sin embargo, aquí se especifica la notación que conviene identificar rápidamente.

Se denotará a los vectores con letras minúsculas, por ejemplo: x , b , c y en el caso correspondiente se indicarán sus dimensiones, en algunos casos agregamos una tilde, por ejemplo u , $\bar{0}$; el vector x transpuesto se denotará por x^T . Las matrices se denotarán con letras mayúsculas, por ejemplo A , B , N . La referencia a los renglones y columnas de la matriz A será frecuente, denotaremos al i -ésimo renglón de la matriz A por A_i , la j -ésima columna de la matriz A se denotará por A^j .

2.2. Forma explícita de un problema respecto a una base

Consideremos un problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = cx \\ \text{P: s.a.} & Ax \leq b \\ & x \geq \bar{0}, \end{array}$$

donde A es una matriz de tamaño $m \times n$ con rango m , x y $\bar{0}$ son vectores de tamaño $n \times 1$, b es un vector de tamaño $m \times 1$ y c es un vector de tamaño $1 \times n$. Una base



para el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz A , se construye con m columnas linealmente independientes de la misma matriz.

Si el conjunto de soluciones factibles es no vacío podemos elegir x_0 , una solución básica factible construida a partir de una base B . Considerando las restricciones del



problema P observamos que la variable x_j está asociada a la columna A^j de la matriz, por lo que una elección de columnas también se obtiene eligiendo los índices de las variables asociadas a dichas columnas, es decir, $\{i_1, \dots, i_m\}$.

La solución básica obtenida a partir de una base B se puede expresar de la siguiente forma: $x_0 = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, donde $x_B = B^{-1}b$ y los valores de las variables no básicas x_N son cero; el valor de la función objetivo en esta solución está dado por $z_0 = (c_B, c_N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B x_B + c_N x_N = c_B (B^{-1}b)$.

Las restricciones del problema P se pueden expresar de la siguiente forma:
 $Bx_B + Nx_N = b$, si multiplicamos este sistema por B^{-1} y reordenamos los términos obtenemos $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$. Denotamos por Y^j a la j -ésima columna de la matriz $B^{-1}N$, es decir, $Y^j = B^{-1}N^j$, sustituyendo esto en el sistema anterior

obtenemos lo siguiente.



$$x_B = B^{-1}b - \sum_{j \in N} Y^j x_j.$$

Sustituyendo x_B en la función objetivo $z = c_B x_B + c_N x_N$ obtenemos:

$$\begin{aligned} z &= c_B(B^{-1}b - \sum_{j \in N} Y^j x_j) + c_N x_N \\ &= c_B(B^{-1}b - \sum_{j \in N} Y^j x_j) + \sum_{j \in N} c_j x_j; \end{aligned}$$

si recordamos que $z_0 = c_B B^{-1}b$ y definimos $z_j = c_B Y^j$ para sustituirlo en la expresión anterior obtenemos:

$$z = z_0 + \sum_{j \in N} (c_j - z_j) x_j.$$

El coeficiente $c_j - z_j$ se denomina *coeficiente de costo reducido* de la variable x_j . Con lo anterior, podemos plantear el problema en la forma siguiente.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = z_0 + \sum_{j \in N} (c_j - z_j) x_j \\ \text{s.a.} \quad & \\ \mathbb{P}: \quad & \sum_{j \in N} Y^j x_j + x_B = B^{-1}b \\ & x_j \geq 0, \quad j \in N \text{ y } x_B \geq \bar{0}. \end{aligned}$$

Escribir el problema $\mathbb{P}$ de esta manera es lo que aquí entendemos por expresar el problema en *forma explícita respecto a la base B*.

Es posible escribir esta información en una tabla, para ello cambiamos la expresión de z a la forma $-z_0 = -z + \sum_{j \in N} (c_j - z_j) x_j$ o bien:



$-z + \sum_{j \in N} (c_j - z_j)x_j = -z_0$ y la escribimos después de las restricciones. Haciendo estas modificaciones la tabla queda de la siguiente forma.

x_B	$Y^{j_1} \quad \dots \quad Y^{j_n}$	$I_{m \times m}$	$B^{-1}b$
$-z$	$c_{j_1} - z_{j_1} \dots c_{j_n} - z_{j_n}$	$\dots \quad 0 \quad \dots$	$-z_0$

Respecto a lo que se comentó en la sección anterior, escribir así el problema lo consideramos como: expresar el problema en forma canónica respecto a la solución básica x_0 , ya que sin las variables básicas que son como variables de holgura las restricciones tienen la desigualdad $\leq$ en el problema de maximizar, otro nombre utilizado es: escribir el problema en forma explícita respecto a la base B .

Con esta forma de expresar el problema tenemos varias ventajas, la más importante es que se conoce la situación del problema, veamos:

Situación 1: si los coeficientes de la función objetivo cumplen que $c_j - z_j \leq 0, \forall j, j \in N$, significa que incrementar el valor de la variable $x_j, j \in N$ implica disminuir o no modificar el valor de la función objetivo, así entonces, tenemos la condición de optimalidad.

Por otro lado, si se tiene que $c_j - z_j > 0$ para alguna $j \in N$ entonces, es posible mejorar el valor de la función objetivo en la cantidad $c_j - z_j$ por cada unidad que se incremente el valor de la variable x_j . A partir de este caso se tienen a su vez dos opciones:

Situación 2: si la columna Y^j asociada a la variable x_j tiene todas sus componentes negativas, entonces podemos dar a la variable x_j un valor λ arbitrariamente grande y pasar al lado derecho del sistema de ecuaciones un múltiplo de la columna Y^j , es decir, $x_B = B^{-1}b - \lambda Y^j$ lo cual genera una clase de soluciones factibles que conforman un rayo y el valor de la función objetivo, $z = z_0 + \lambda(c_j - z_j)$, se incrementa arbitrariamente en función de λ . Esto significa que no hay un óptimo finito para el problema. Por último, el otro caso.

Situación 3: cuando hay al menos una componente positiva en la columna Y^j y el vector $B^{-1}b$ no tiene componentes iguales a cero¹. Entonces, es posible mejorar



el valor de la función objetivo incrementando el valor de la variable x_j cuyo coeficiente $c_j - z_j$ es positivo. El límite para el incremento de la función objetivo está dado por

el máximo incremento de la variable x_j , que puede ser hasta².

$$\min_{i / Y_i^j > 0} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{Y_i^j} \right\}.$$

¹Esto significa que no tenemos más de una base asociada al punto extremo, es decir, el punto no es degenerado.

²Pues se busca una mejor solución que siga siendo factible; el máximo incremento de la variable

x_j se hará mientras se mantenga la factibilidad y esta se rompe con la primera componente $(B^{-1}b)_i - x_j Y_i^j < 0$; se está disminuyendo una cantidad positiva así que el máximo decremento, manteniendo el resultado ≥ 0 , es cuando se igualan las

cantidades, es decir, $(B^{-1}b)_i = x_j Y_i^j$, por

lo que el mayor valor de x_j es $\frac{(B^{-1}b)_i}{Y_i^j}$.



Entonces, ver escrito el problema en forma explícita respecto a una base tiene la ventaja de mostrar la situación del problema. La escritura concisa y ordenada de este análisis se resume en la versión del algoritmo simplex que presentamos en seguida.



2.3. Algoritmo Simplex

- (0) Se parte de una base B tal que la solución básica asociada es factible y se escribe el problema en forma explícita con respecto a la base B .
- (1) Se analizan los coeficientes de costo reducido $c_j - z_j$.
 - Si $c_j - z_j \leq 0 \ \forall \ j, \ j \in N$, terminar, la solución que se tiene es óptima.
 - Si existe al menos un índice $j, \ j \in N$, tal que $c_j - z_j > 0$, sea $c_k - z_k = \max_{j \in N} \{c_j - z_j\}$ e ir al paso³ (2).
- (2) Dos opciones:
 - Si $Y^k \leq \bar{0}$ entonces, existe una clase de soluciones factibles tal que el valor de $z \rightarrow \infty$ cuando $x_k \rightarrow \infty$, es decir:

$$x_i = x_i - Y_i^k x_k \quad i \in B,$$

$$x_k = \lambda > 0, \text{ arbitrariamente grande,}$$

$$x_j = 0 \ \forall \ j, \ j \in N \setminus \{k\}.$$
 Terminar, no existe solución óptima finita.
 - Si $Y^k \not\leq \bar{0}$ ir al paso (3).
- (3) Se escoge $l \in B$ tal que $\frac{(B^{-1}b)_l}{Y_l^k} = \min_{i / Y_i^k > 0} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{Y_i^k} \right\}$ y se pivotea sobre Y_l^k , con ello se cambia de base y simultáneamente se escribe el problema en forma explícita respecto a la nueva base, luego se regresa al paso (1).



Una vez seleccionados los índices de las variables que entran y salen de la base, k y l no básica y básica respectivamente, el número Y^k es el pivote; pivotear significa hacer operaciones elementales por renglón para tener 1 en la posición del pivote y ceros en el resto de su columna, con esto se obtiene una nueva forma explícita del problema respecto a la nueva base. Después del pivoteo, las nuevas variables básicas están formadas por las variables básicas iniciales menos la variable de salida más la variable de entrada.

A continuación, describimos la forma de resolver un problema de programación lineal implementado el algoritmo simplex.

³Este criterio para elegir la variable x_j no es indispensable, basta que el coeficiente $c_j - z_j$ sea positivo. Tomar el máximo $c_j - z_j$ no necesariamente garantiza que se llegue más rápido a la solución factible óptima, como se puede ver en algunos ejemplos, pero permite seguir un procedimiento.



Ejemplo 1. Resolver el problema P con el algoritmo simplex.

$$\text{Max } z = x + 5y$$

$$\text{s.a. } x - 2y \leq 1$$

$$\mathbb{P} : \quad x - y \leq 2$$

$$-x + 7y \leq 28$$

$$x, y \geq 0.$$

Se agregan variables de holgura para escribir el problema en forma estándar.

$$\text{Max } z = x + 5y$$

$$\text{s.a. } x - 2y + h_1 = 1$$

$$\mathbb{P} : \quad x - y + h_2 = 2$$

$$-x + 7y + h_3 = 28$$

$$x, y, h_1, h_2, h_3 \geq 0.$$

En esta forma del problema observamos que las columnas asociadas a las variables de holgura forman una base para el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz además, la solución básica obtenida con esta base es factible. Entonces podemos iniciar el algoritmo simplex a partir de esta solución básica, para ello escribimos la información en la tabla simplex.



iteración		x	y	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	1	-2	1	0	0	1
	h_2	1	-1	0	1	0	2
	h_3	-1	7	0	0	1	28
	-z	1	5	0	0	0	0

Tabla que corresponde a la forma explícita del problema con respecto a la solución básica factible inicial.

1	h_1	$\frac{5}{7}$	0	1	0	$\frac{2}{7}$	9
	h_2	$\frac{6}{7}$	0	0	1	$\frac{1}{7}$	6
	y	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$\frac{1}{7}$	4
	-z	$\frac{12}{7}$	0	0	0	$-\frac{5}{7}$	-20

Para hacer la primera iteración se eligió la variable no básica y cuyo coeficiente de costo reducido es 5; la variable h_3 sale de la base por tener el cociente mínimo; el pivote está señalado con un rectángulo, es el número 7 de la tabla inicial.

2	h_1	0	0	1	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	4
	x	1	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	7
	y	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	5
	-z	0	0	0	-2	-1	-32

Para hacer la segunda iteración se eligió la variable no básica x cuyo coeficiente de costo reducido es $\frac{12}{7}$; la variable h_2 sale de la base de acuerdo al criterio de salida para la variable; el pivote está señalado con un rectángulo, es el número $\frac{6}{7}$ de la segunda tabla.

En la tabla que corresponde a la segunda iteración, los coeficientes de costo reducido de las variables no básicas son negativos entonces, se tiene la solución factible óptima del problema P: $x^* = (7, 5, 4, 0, 0)^T$ con $z_{\text{Máx}} = 32$.

En el ejemplo anterior, a partir de las restricciones del problema en forma estándar se identificó una solución básica factible inicial y con ella inició el algoritmo simplex. En general, las restricciones de un problema no siempre permiten identificar una solución básica factible inicial, en esos casos se utiliza un método para obtener una solución de este tipo; los métodos más usados son: el método de las dos fases y el método de la gran M [Bazaraa].



2.4. Soluciones básicas factibles iniciales

En esta sección vamos a presentar ejemplos de las situaciones que se presentan al aplicar el método de las dos fases y el método de la gran M, al final de cada solución presentamos la gráfica asociada al problema.

2.4.1. Método de las dos fases

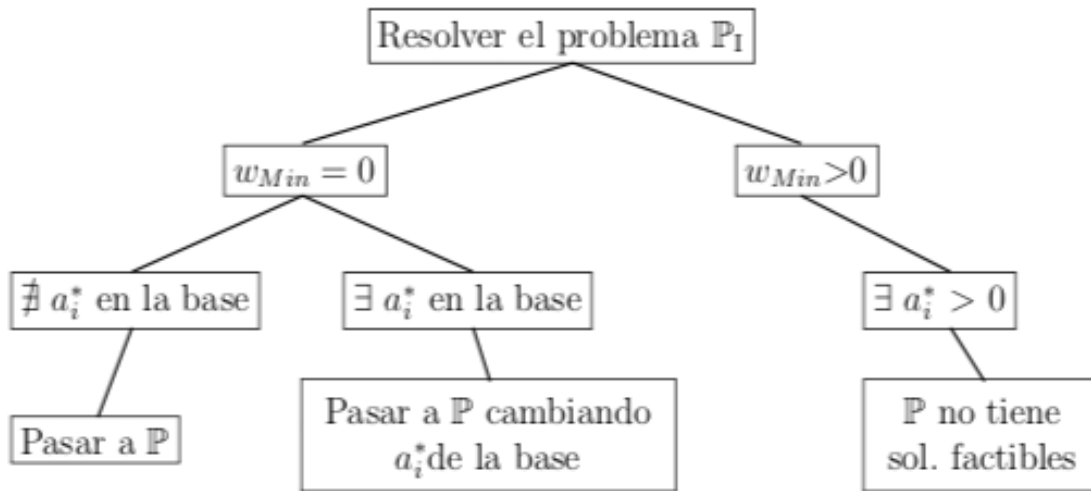
La primera fase consiste en agregar variables artificiales para completar una base factible, la función objetivo del problema original se cambia temporalmente por minimizar la suma de las variables artificiales y se resolverá esta primera etapa. La solución obtenida genera una base para el problema original o nos indica que el problema no tiene soluciones factibles. Tenemos entonces los problemas:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = cx \\ \mathbb{P} : & s.a. \quad Ax = b \\ & x \geq \bar{0}_{n \times 1}, \end{array}$$



donde c es un vector renglón de n componentes, x un vector columna de tamaño n ,

Casos del método de las dos fases



Donde $x = \begin{pmatrix} x^* \\ a^* \end{pmatrix}$ es la solución factible óptima del problema P_1 y w_{Min} el valor mínimo en esta solución.

Si no existe a_i^* en la base entonces, se pasa a la segunda fase y se resuelve P .

En otro caso, si existe a_i^* en la base, se puede *pivotear* hasta sacar las variables de la base y se continua con el problema P .

Los posibles casos del método de las dos fases se ilustran en el siguiente diagrama.

Cuando existe $a_i^* > 0$ en la solución factible óptima del problema P_1 , esta variable se cambia de la base de la siguiente forma: se busca un pivote A^k distinto de cero; el

índice i corresponde a la variable básica a_i^* , k corresponde a una variable no artificial y no básica. Si no existe tal pivote significa que la restricción correspondiente a

ese renglón es redundante y se elimina⁴. En otro caso, si existe el pivote se hace el

pivoteo; notemos que si A^k es negativo, a pesar de ser negativo la factibilidad se mantiene ya que el lado derecho del renglón i es cero, porque es el valor de la variable artificial. Esto se repite hasta sacar las variables artificiales de la base.

Luego, actualizamos los coeficientes de costo reducido de la función objetivo original y continuamos con el algoritmo simplex. A continuación, ilustramos un ejemplo para cada caso.



Ejemplo 2. Caso 1: $w_{Min} > 0$, $\mathbb{P}$ no tiene soluciones factibles.

Encuentra una solución factible para el siguiente problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = x + 2y \\ \text{s.a.} & 2x + y \leq 6 \\ \mathbb{P}: & 3x + y \geq 15 \\ & -x + 2y \leq 2 \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

Como

no se tiene una base factible agregando variables de holgura, entonces es necesario buscar una, para ello construimos el problema $\mathbb{P}_1$:

⁴En general, no se sabe de antemano si la matriz de un problema lineal tiene rango completo por renglones.

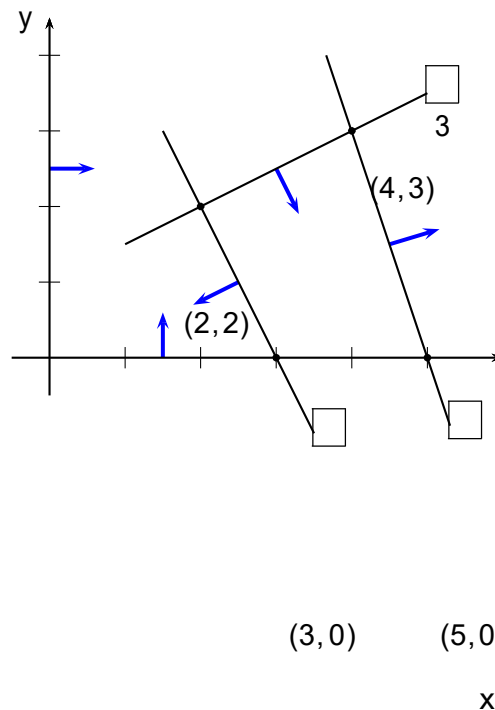


$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & w = a \\
 \text{s.a.} & 2x + y + h_1 = 6 \\
 \mathbb{P}_1 : & 3x + y - h_2 + a = 15 \\
 & -x + 2y + h_3 = 2 \\
 & x, y, h_1, h_2, h_3, a \geq 0.
 \end{array}$$

Resolviendo con el algoritmo simplex:

	x	y	h_1	h_2	h_3	a	
h_1	2	1	1	0	0	0	6
a	3	1	0	-1	0	1	15
h_3	-1	2	0	0	1	0	2
-w	-3	-1	0	1	0	0	-15
x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	3
a	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	6
h_3	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	5
-w	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	0	-6

Como los coeficientes de costo reducido de las variables no básicas son positivos, tenemos que $w_{\min} = 6 > 0$ por tanto, el problema P no tiene soluciones factibles. La gráfica de este problema se ilustra en la siguiente figura.





1

2

Ejemplo 3. Caso 2: $w_{\min} = 0$ y no hay variables artificiales en la base.

Encuentra una solución factible para el siguiente problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = x + 5y \\ \text{s.a.} & 2x + y \geq 8 \\ \text{P:} & x + y \leq 9 \\ & -x + 3y \leq 3 \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$



Agregando variables de holgura no se tiene una base evidente, entonces buscamos una con el método de las dos fases.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & w = a \\
 \text{s.a.} & 2x + y - h_1 + a = 8 \\
 \text{PI :} & x + y + h_2 = 9 \\
 & -x + 3y + h_3 = 3 \\
 & x, y, h_1, h_2, h_3, a \geq 0.
 \end{array}$$

Resolviendo PI:

	x	y	h_1	h_2	h_3	a	
a	2	1	-1	0	0	1	8
h_2	1	1	0	1	0	0	9
h_3	-1	3	0	0	1	0	3
-w	-2	-1	1	0	0	0	-8
x	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	4
h_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	5
h_3	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	7
-w	0	0	0	0	0	1	0

Tenemos que $w_{\min} = 0$, ahora a partir de la base encontrada en la primera fase resolvemos el problema P; actualizando la tabla para ese problema obtenemos:

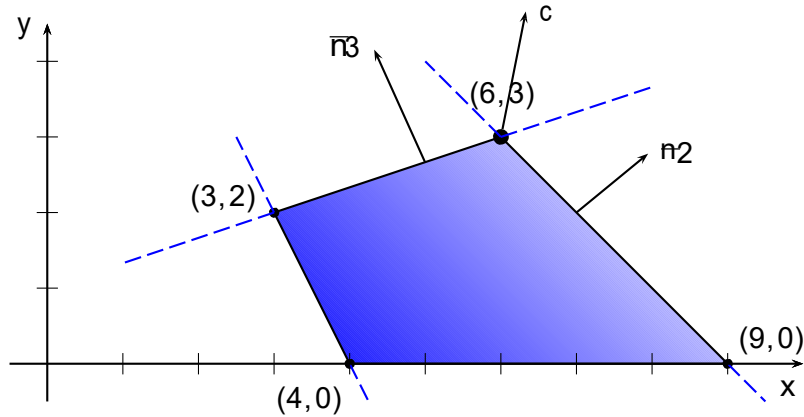
	x	y	h_1	h_2	h_3	
x	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
h_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	5
h_3	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	7
-z	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-4
x	1	0	$-\frac{3}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	3
h_2	0	0	$\frac{4}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	4
y	0	1	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	2
-z	0	0	$\frac{8}{7}$	0	$-\frac{9}{7}$	-13
x	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	6
h_1	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	7
y	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	3
-z	0	0	0	-2	-1	-21

En la tabla los coeficientes de costo reducido de las variables no básicas son negativos, entonces tenemos la solución factible óptima del problema P:

$x^* = (6, 3, 7, 0, 0)^T$ con $z_{\max} = 21$. La gráfica de este problema se ilustra en seguida.



CAPÍTULO 1: PROGRAMACIÓN LINEAL, ALGORITMO SIMPLEX



Ejemplo 4. Caso 3: $w_{\min} = 0$, con variables artificiales en la base.

Encuentra una solución factible para el siguiente problema.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max} & z = x + y + z \\
 \text{s.a.} & 4x - 2z = 6 \\
 P: & -3x + 6y - 4z = 12 \\
 & 3x + 2y - 4z = 12 \\
 & x, y, z \geq 0.
 \end{array}$$

Proponemos el siguiente planteamiento para encontrar una base factible:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & w = a_1 + a_2 + a_3 \\
 \text{s.a.} & 4x - 2z + a_1 = 6 \\
 P_I: & -3x + 6y - 4z + a_2 = 12 \\
 & 3x + 2y - 4z + a_3 = 12 \\
 & x, y, z, a_1, a_2, a_3 \geq 0
 \end{array}$$



SOLUCIONES BÁSICAS FACTIBLES INICIALES 1.4

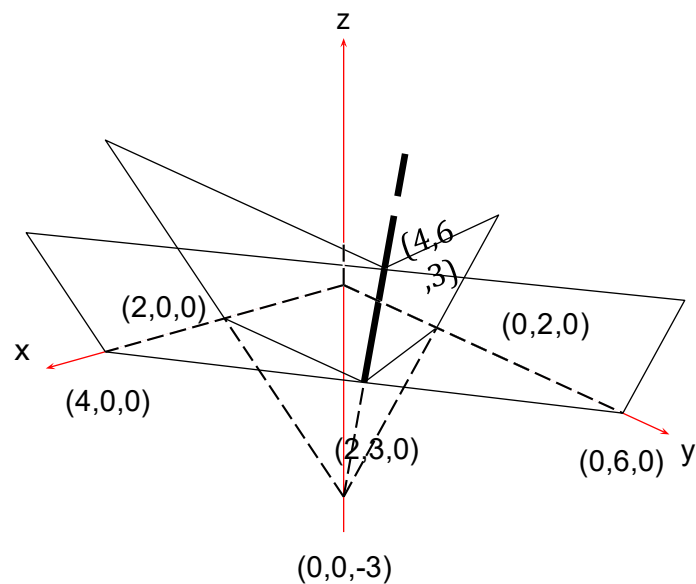
Resolvemos este problema aplicando el algoritmo simplex.

	x	y	z	a_1	a_2	a_3	
a_1	3	0	-2	1	0	0	6
a_2	-3	6	-4	0	1	0	12
a_3	3	2	-4	0	0	1	12
-w	-3	-8	10	0	0	0	-30
a_1	3	0	-2	1	0	0	6
y	$-\frac{3}{6}$	1	$-\frac{4}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	2
a_3	4	0	$-\frac{16}{6}$	0	$-\frac{2}{6}$	1	8
-w	-7	0	$\frac{28}{6}$	0	$\frac{8}{6}$	0	-14
x	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	2
y	0	1	-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	3
a_3	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0
-w	0	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0



Observamos en la tabla anterior que a_3 aparece como variable básica, pero no hay un pivote distinto de cero para cambiar esta variable por otra no artificial entonces, la tercera restricción es redundante. A partir de la solución básica factible encontrada en esta primera fase, ya se puede continuar aplicando el algoritmo simplex con la función objetivo original, actualizando los coeficientes de costo reducido correspondientes además, podemos eliminar la restricción redundante. En seguida se presenta la gráfica

asociada a este problema, la región de soluciones factibles es la recta en $\mathbb{R}^3$ que inicia en el punto $(2, 3, 0)^T$ y se extiende indefinidamente en el primer octante.





2.4.2. Método de la gran M

Otro método para encontrar soluciones iniciales factibles es el método de la gran M; en el método de las dos fases se ignoran los coeficientes de costo originales y se ocupan las variables artificiales para inicial el algoritmo simplex, a diferencia de este método, en el método de la gran M los coeficientes originales permanecen y se busca eliminar las variables artificiales asignándoles coeficientes muy poco atractivos desde el punto de vista de la función objetivo original.

En este método también se formula un problema auxiliar, entonces tenemos los problemas P y P_M .

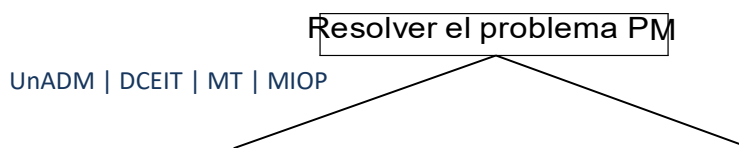
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = cx \\ \text{P: s.a.} & Ax = \underline{b} \\ & x \geq 0_{n \times 1}, \end{array}$$

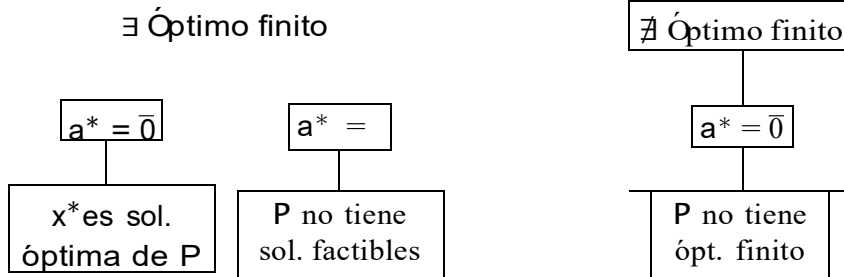
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = cx - M1a \\ P_M : \text{s.a.} & Ax + \underline{U}a = b \\ & x \geq 0_{n \times 1} \\ & a \geq 0_{k \times 1}, \end{array}$$

donde M es un número positivo muy grande, el término $M1a$ representa la suma de las variables artificiales multiplicadas por el coeficiente M, a es un vector de tamaño $k \times 1$, la i-ésima restricción que requiera una variable artificial agregará el i-ésimo vector canónico de tamaño $m \times 1$ como columna de la matriz $U_{m \times k}$. Nótese que habrá tantas columnas en la matriz U como variables artificiales sean necesarias para completar una base.

Los posibles casos que se presentan con éste método se ilustran en el siguiente diagrama.

Casos del método de la gran M





Agregando variables de holgura no se tiene una base, pero si además se agrega
 Donde $x = \begin{pmatrix} x^* \\ a^* \end{pmatrix}$ es la solución factible óptima del problema P_M .
 A continuación presentamos un ejemplo de cada caso.

Ejemplo 5. Caso 1: P_M tiene óptimo finito y $a^* = \bar{0}$.

Encuentra una solución factible para el siguiente problema.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max} & z = -2x + 7y \\
 \text{s.a.} & x - y \leq 2 \\
 P : & 2x + 3y \geq 9 \\
 & -x + 7y \leq 28 \\
 & x, y \geq 0
 \end{array}$$

una variable artificial y se modifica la función objetivo obtenemos el siguiente planteamiento.

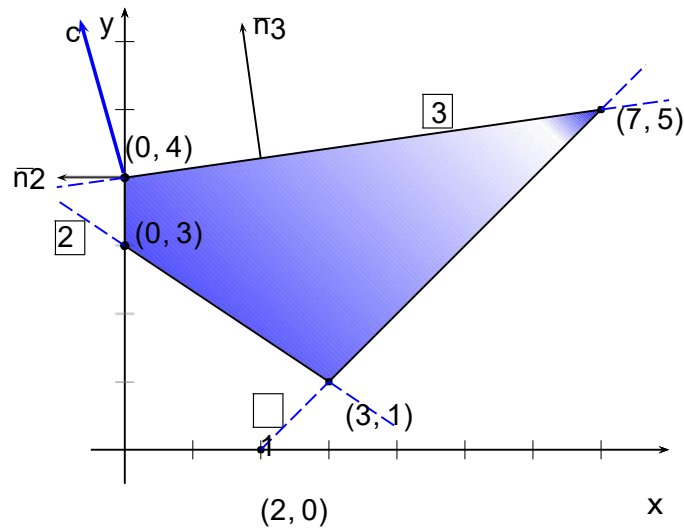
$$\begin{array}{ll}
 \text{Max} & z = -2x + 7y - Ma \\
 \text{s.a.} & x - y + h_1 = 2 \\
 PM : & 2x + 3y - h_2 + a = 9 \\
 & -x + 7y + h_3 = 28 \\
 & x, y, h_1, h_2, h_3, a \geq 0.
 \end{array}$$

Resolvemos con el método simplex:



	x	y	h_1	h_2	h_3	a	
h_1	1	-1	1	0	0	0	2
a	2	3	0	-1	0	1	9
h_3	-1	7	0	0	1	0	28
-z	$-2+2M$	$7+3M$	0	-M	0	0	9M
h_1	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	5
y	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3
h_3	$-\frac{17}{3}$	0	0	$\frac{7}{3}$	1	$-\frac{7}{3}$	7
-z	$-\frac{20}{3}$	0	0	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{7}{3}M$	-21
h_1	$\frac{6}{7}$	0	1	0	$\frac{1}{7}$	0	6
y	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$\frac{1}{7}$	0	4
h_2	$-\frac{17}{7}$	0	0	1	$\frac{3}{7}$	-1	3
-z	-1	0	0	0	-1	-M	-28

Como los coeficientes de costo reducido de las variables no básicas son negativos, la solución factible óptima es $x^* = (0, 4, 6, 3, 0, 0)^T$, pero $a^* = 0$, así que la solución factible óptima del problema P es el vector $(0, 4, 6, 3, 0)^T$ con $z_{\text{Máx}} = 28$. En seguida se ilustra la gráfica asociada a este problema.



Ejemplo 6. Caso 2: P_M tiene óptimo finito y $a^* = \bar{0}$.
Encuentra una solución factible para el siguiente problema.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = x + 2y \\ \text{s.a.} \quad & 2x + y \leq 6 \\ P: \quad & 3x + y \geq 15 \\ & -x + 2y \leq 2 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces, el problema P_M es el siguiente:

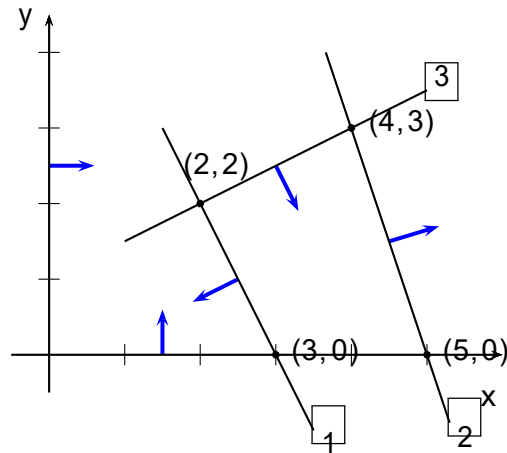
$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = x + 2y - Ma \\ \text{s.a.} \quad & 2x + y + h_1 = 6 \\ P_M: \quad & 3x + y - h_2 + a = 15 \\ & -x + 2y + h_3 = 2 \\ & x, y, h_1, h_2, h_3, a \geq 0. \end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo simplex:

	x	y	h_1	h_2	h_3	a	
h_1	2	1	1	0	0	0	6
a	3	1	0	-1	0	1	15
h_3	-1	2	0	0	1	0	2
-z	1+3M	2+M	0	-M	0	0	15M
x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	3
a	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	6
h_3	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	5
-z	0	$\frac{3}{2} - \frac{M}{2}$	$-\frac{1}{2} - \frac{3M}{2}$	-M	0	0	-3+6M



Como M es un número positivo muy grande, los coeficientes de costo reducido de las variables no básicas son negativos, entonces la solución factible óptima es $x^* = (3, 0, 0, 0, 5, 6)^T$ y $z_{\text{Máx}} = 3 - 6M$, como $a^* = 0$ P no tiene soluciones factibles. En seguida presentamos la gráfica asociada a este problema.



Ejemplo 7. Caso 3: P_M no tiene óptimo finito y $a^* = \bar{0}$.

Encuentra una solución factible para el siguiente problema.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = x + y \\ \text{s.a.} & x - 2y \leq 3 \\ P : & 2x - y \geq 2 \\ & 2x + y \geq 6 \\ & x, y \geq 0. \end{array}$$

El problema P_M asociado es el siguiente:

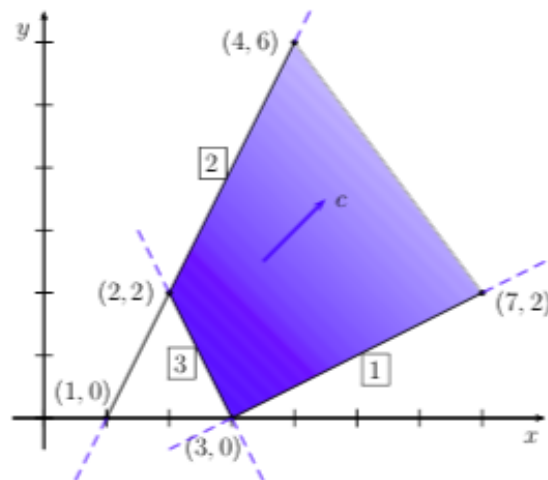
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = x + y - Ma_1 - Ma_2 \\ \text{s.a.} & x - 2y + h_1 = 3 \\ P_M : & 2x - y - h_2 + a_1 = 2 \\ & 2x + y - h_3 + a_2 = 6 \\ & x, y, h_1, h_2, h_3, a_1, a_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolviendo con el método simplex tenemos:

	x	y	h_1	h_2	h_3	a_1	a_2	
h_1	1	-2	1	0	0	0	0	3
a_1	2	-1	0	-1	0	1	0	2
a_2	2	1	0	0	-1	0	1	6
-z	1+4M	1	0	-M	-M	0	0	8M
h_1	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
x	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1
a_2	0	2	0	1	-1	-1	1	4
-z	0	$\frac{3}{2}+2M$	0	$\frac{1}{2}+M$	-M	$-\frac{1}{2}-2M$	0	-1+4M
h_1	0	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	5
x	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	2
y	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
-z	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}-M$	$-\frac{3}{4}-M$	-4

Por los elementos señalados en la última tabla podemos concluir que se trata de una solución no acotada. El conjunto de soluciones para el problema $\mathbb{P}_M$ está dado por $x^* = (2 + \frac{1}{4}h_3, 2 + \frac{1}{2}h_3, 5 + \frac{3}{4}h_3, 0, h_3, 0, 0)^T$, $h_3 \in \mathbb{R}^+$ y $z = -4 + \frac{3}{4}h_3$. Como $a^* = (0, 0)^T$ el problema $\mathbb{P}$ tiene soluciones factibles, además no tiene óptimo finito ya que $z \rightarrow \infty$ como $h_3 \rightarrow \infty$. En seguida se ilustra la gráfica asociada a este problema.





Fuentes de consulta

Básica

- Bazaraa, M. S. (1999). *Programación lineal y flujo en redes* (2.^a ed.). México: Limusa.
- Kaufmann, A. (1976). *Métodos y modelos de la investigación de operaciones*. España: Compañía Editorial Continental.
- Taha, H. A. (1992). *Operations research: An introduction* (5.^a ed.). Estados Unidos: Macmillan Publishing Company.