Matemáticas

8° Semestre

Investigación de Operaciones

Unidad 3. Transporte, Asignación y Redes

Clave

05144843

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Introducción

Los problemas de Transporte y Asignación surgen en varios contextos y tienen una estructura de redes importante. Estos problemas se pueden resolver aplicando programación lineal, sin embargo, por no ser un método eficiente y por la estructura distinta de estos problemas se han propuesto diversos métodos para su solución.

Aquí se presenta el método húngaro para resolver el problema de Asignación y para el problema de Transporte el método stepping-stone. Para resolver los problemas de la ruta més corta y el flujo máximo se aplican los métodos de Dijkstra y FordFulkerson, respectivamente.

Aunque los conceptos abordados en esta unidad tienen relacién con las unidades anteriores, el análisis de los problemas es un tanto independiente.

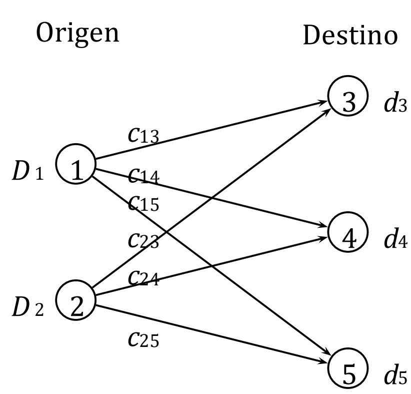
Transporte, Asignación y Redes

3.1. Problema de Transporte

El problema de transporte se presenta rutinariamente en problemas de distribución de productos entre varios orígenes (f´abricas) y diferentes destinos (almacenes). Generalmente, se tienen *m* lugares de origen, cada uno tiene cierta disponibilidad de productos y se tienen *n* destinos con su correspondiente demanda. En la *red* asociada al problema de transporte, cada arco que une el origen *i* con el destino *j*, (*i,j*), tiene un costo asociado c_{ij} por cada unidad de producto enviada. El problema es determinar las cantidades de producto a transportar entre los orígenes y los destinos satisfaciendo la demanda y minimizando el costo total de transporte.

Las características de la red, $G = (N,A)$, asociada al problema son las siguientes: (1) es una red dirigida con costos c_{ij} asociados a cada arco (*i,j*) en *A*; (2) el conjunto *N* est´a particionado en dos subconjuntos N_1 y N_2, de cardinal posiblemente distinto; (3) para cada arco (*i,j*) en *A*, $i \in N_1$ y $j \in N_2$; (4) cada nodo de N_1 tiene asociado un número $D(i)$, $D(i) > 0$, el cual indica disponibilidad de productos; (5) cada nodo de N_2 tiene asociado un número $d(i)$, $d(i) > 0$, el cual indica demanda de productos. Cada origen y destino está representado por un nodo de la red, el arco que une dos nodos representa un camino entre el origen y destino correspondientes.

Para plantear el modelo lineal consideramos una red de este tipo, en la cual $|N_1| = 2$, $|N_2| = 3$.



D_i. − Disponibilidad *d_j. − demanda*

Se define x_{ij} como la cantidad de productos a enviar del origen *i* al destino *j*, $i = 1,2$; $j = 3,4,5$.
El problema de programacio´n lineal asociado es:

$$
\mathbb{P}: \quad \begin{array}{llllllll}
\text{Min} & z = c_{13}x_{13}+c_{14}x_{14}+c_{15}x_{15}+c_{23}x_{23}+c_{24}x_{24}+c_{25}x_{25} \\
\text{s.a.} & x_{13}+ \quad x_{14}+ \quad x_{15} & & & & & \leq D_1 \\
& & & & x_{23}+ & x_{24}+ & x_{25} \leq D_2 \\
& x_{13} & & + & x_{23} & & \geq d_3 \\
& & x_{14} & & + & x_{24} & \geq d_4 \\
& & & x_{15} & & + & x_{25} \geq d_5 \\
& & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2; \; j = 3,4,5.
\end{array}
$$

Se dice que un problema es balanceado cuando el total de la demanda es igual al total de la disponibilidad. Si el problema no est´a balanceado, para balancearlo en el caso que la oferta excede la demanda se inventa un destino ficticio, con costos cero y cuya demanda sea el excedente existente. Podemos suponer que cualquier problemamde transporte estábalanceado, sea

$$d = \sum_{i=1}^{m} D_i = \sum_{j=m+1}^{m+n} d_j, \text{ donde } m = |N_1| \text{ y } n = |N_2|.$$

El problema de transporte tiene, al menos, la soluci´on factible dada por x_{ij}, con $x_{ij} = \frac{D_i d_j}{d}; \; i = 1, ..., m, \; j = m+1, ..., m+n$. La región de soluciones factibles es acotada, pues $x_{ij} \leq$ m´ın{D_i, d_j}, así que el conjunto de soluciones factibles es: no vacío, cerrado y acotado además, la función objetivo es continua, entonces el problema tiene solución factible óptima.

Solución del problema de transporte

Un procedimiento para resolver el problema de transporte es el siguiente:

i) Encontrar una solución factible que corresponda a un punto extremo[1], con algún método.
ii) Comprobar si es óptima; si no es así, se obtiene una mejor. El método más utilizado es el *stepping-stone* [Bazaraa].

Hay varios métodos para encontrar soluciones iniciales factibles:

a) Método de la casilla de costo mínimo;

b) Método de Vogel;

c) Método de la esquina noroeste.

A continuación, presentamos un ejemplo para ilustrar un procedimiento que resuelve el problema de transporte. La solución inicial la obtendremos con el método de la esquina noroeste, los otros métodos se pueden consultar en la literatura que aborde el problema de transporte [Bazaraa].

Ejemplo 1. Resolver el problema de transporte cuya informaci´on se resume en la tabla siguiente:

---

[1] Una soluci´on factible corresponde a un punto extremo si, la subgr´afica asociada a la soluci´onfreperimos es un ´arbol en la red que modela el problema de transporte.

	4	5	6	Disp.
1	8	13	7	33
2	11	9	5	16
3	10	4	12	18
Dem.	15	34	18	

donde los elementos en el interior de cada casilla representan los costos de transporte unitarios de los orígenes a los destinos. El método de la esquina noroeste comienza tomando la posición situada al noroeste de la tabla, en este caso, (1,4). En esta casilla se asigna el mayor número posible de unidades, que será el mínimo entre la disponibilidad del origen 1 y la demanda del destino 4.

En este caso, $x_{14} = min\{15, 33\} = 15$. Luego, se resta el valor asignado a la disponibilidad en 1 y a la demanda de 4. La tabla queda así:

	4	5	6	Disp.
1	8 15	13	7	18
2	11	9	5	16
3	10	4	12	18
Dem.	0	34	18	

Entonces, se elimina ya sea un renglón o una columna, dependiendo de que la disponibilidad quede agotada o la demanda quede satisfecha, en caso de empate también se elimina solo un renglón o una columna. En este caso, la columna del destino 5 ya tiene demanda 0 entonces se elimina, obteniendo así la tabla reducida con demanda y disponibilidad actualizada.

	5	6	Disp.
1	1	7	18
2	9	5	16
3	4	12	18
Dem.	34	18	

Repetimos el procedimiento en esta tabla, se coloca 18 en la casilla (1,5)[2] por lo que se disminuyen 18 unidades en la demanda de 5 y en la disponibilidad de 1.

	5	6	Disp.
1	13 18	7	0
2	9	5	16
3	4	12	18
Dem.	16	18	

Puesto que se agota la disponibilidad del origen 1 se elimina el primer renglón, obteniendo así la siguiente tabla:

	5	6	Disp.
2	9	5	16
3	4	12	18
Dem.	16	18	

En la tabla anterior asignamos 16 en la casilla (2,5), como coinciden la disponibilidad y la demanda ambas se agotan, la tabla que obtenemos es la siguiente.

	5	6	
2	$\boxed{9}$ 16	$\boxed{5}$	0
3	$\boxed{4}$	$\boxed{12}$	18
Dem.	0	18	

De acuerdo al método solamente debemos eliminar o un renglón o una columna, por lo que eliminamos la columna del destino 5 y obtenemos así la siguiente tabla:

	6	Disp.
2	$\boxed{5}$	0
3	$\boxed{12}$	18
Dem.	18	

Asignamos cero en la casilla (2,6) y por último, asignamos 18 en la casilla (3,6). De esta manera completamos la solución inicial que se muestra en la tabla siguiente.

	4	5	6	Disp.
1	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{13}$ 18	$\boxed{7}$	33
2	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$ 16	$\boxed{5}$ 0	16
3	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$	$\boxed{12}$ 18	18
Dem.	15	34	18	

Se puede verificar que la soluci´on obtenida es factible y cuenta con 5=3+3-1 casillas coupadas; el costo total de esta soluci´on es: $z = 8 \times 15 + 13 \times 18 + 9 \times 16 + 5 \times 0 + 12 \times 18 = 714$.

En este tipo de soluciones iniciales factibles se asignan valores en algunas casillas de la tabla y otras quedan vacías, cabe mencionar que si tiene un cero la casilla, no está vacía; las casillas ocupadas se denominan *casillas básicas* y las vacías se llaman *casillas no básicas*.

Con la solución inicial obtenida podemos aplicar el método de *stepping-stone*: que empieza calculando los costos adicionales de cada casilla no básica a partir de la construcción de un ciclo para cada una. El ciclo para una casilla no básica está asociado a un ciclo en la gráfica del problema de transporte. En la tabla, el ciclo para la casilla no básica comienza y termina en esta casilla y está formado por segmentos alternados horizontales y verticales o viceversa, con extremos en casillas básicas. Se designarán alternativamente las casillas del ciclo con + y -, empezando con + en la casilla no básica de partida. El costo adicional resulta de sumar y restar los costos de transporte unitarios de las casillas que forman el ciclo, sumando los costos de las casillas con signo + y restando los costos de las casillas con signo –.

Si todos los costos adicionales son mayores que o iguales a cero, la solución actual es óptima,

Para ejemplificar, calculamos el costo adicional de 3 a 5 denotado por CA_{35}:

	4	5	6
1	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{13}$ 18	$\boxed{7}$
2	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$ - 16	$\boxed{5}$ + 0
3	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$ +	$\boxed{12}$ - 18

En este caso $CA_{35} = 4 - 12 + 5 - 9 = \boxed{-12}$. El ciclo inicia en la casilla no básica (3,5), llega a la casilla básica (3,6), después a (2,6) de donde pasa a (2,5) y regresa a (3,5). De esta manera calculamos el resto de los costos adicionales:

$$
\begin{aligned}
CA_{16} &= 7 - 13 + 9 - 5 &&= -2,\\
CA_{24} &= 11 - 9 + 13 - 8 &&= 7,\\
CA_{34} &= 10 - 12 + 5 - 9 + 13 - 8 &&= -1,\\
CA_{35} &= 4 - 12 + 5 - 9 &&= \boxed{-12}.
\end{aligned}
$$

pero en este caso no es así.. Entonces, se toma la casilla con el menor costo adicional: $CA_{35} = -12$ y se genera una nueva solución sumando y restando una cantidad δ en las casillas del ciclo, la suma y resta es de acuerdo a los signos de las casillas, $\delta = \min_{(i,j)^-}\{x_{ij}\}$, donde $(i,j)^-$ es una casilla del ciclo designada con el signo menos, si hay empate en casillas marcadas con signo menos sólo una se hace no básica (se deja vacía), de esta manera la solución sigue correspondiendo a un punto extremo.

Para la casilla (3,5) el costo adicional es -12 y $\delta = min\{16,18\} = 16$; la nueva soluci´on se describe en la tabla siguiente.

$\boxed{8}$ 15	13 - 18	$\boxed{7}$ +
11	9	5 16
$\boxed{10}$	4 + 16	$\boxed{12}$ - 2

As´ı, $z = 714 - 12(16) = 522$ y coincide con el resultado de calcular el costo directamente. Ahora los costos adicionales de esta tabla son:

$$
\begin{aligned}
CA_{16} &= 7 - 13 + 4 - 12 &&= \boxed{-4},\\
CA_{24} &= 11 - 5 + 12 - 4 + 13 - 8 &&= 19,\\
CA_{25} &= 9 - 4 + 12 - 5 &&= 12,\\
CA_{34} &= 10 - 4 + 13 - 8 &&= 11.
\end{aligned}
$$

Procedemos a mejorar la soluci´on incrementando la variable x_{16} de acuerdo al ciclo correspondiente, con lo que obtenemos:

$\boxed{8}$ 15	13 - 16	$\boxed{7}$ + 2
11	9 +	5 - 16
10	4 18	12

Continuamos calculando los costos adicionales:

$$
\begin{aligned}
CA_{24} &= 11 - 5 + 7 - 8 &&= 5,\\
CA_{25} &= 9 - 5 + 7 - 13 &&= \boxed{-2},\\
CA_{34} &= 10 - 4 + 13 - 8 &&= 11,\\
CA_{36} &= 12 - 7 + 13 - 4 &&= 14.
\end{aligned}
$$

Como el costo adicional CA_{25} es negativo actualizamos nuevamente la soluci´on, observemos que hay dos casillas marcadas con signo menos con el mismo m´ınimo, pero solamente una se deja vac´ıa y en la otra se pone un cero:

$\boxed{8}$ 15	13	$\boxed{7}$ 18
11	9 16	5 0

$\boxed{10}$	$\boxed{4}$ 18	$\boxed{12}$

$$
\begin{aligned}
CA_{15} &= \quad 13-9+5-7 &&= 2,\\
CA_{24} &= \quad 11-5+7-8 &&= 5,\\
CA_{34} &= 10-4+9-5+7-8 &&= 9,\\
CA_{36} &= \quad 12-5+9-4 &&= 12.
\end{aligned}
$$

Como todos son positivos termina el procedimiento, la soluci´on factible o´ptima es u´nica:

$$x^*_{14} = 15,\ x_{15} = 0,\ x^*_{16} = 18,$$
$$x_{24} = 0,\ x^*_{25} = 16,\ x^*_{26} = 0,$$
$$x_{34} = 0,\ x^*_{35} = 18,\ x_{36} = 0,$$

$$z_{min} = 462.$$

Todo el desarrollo que se hace con las diferentes tablas para llegar a la solución óptima es con el fin de explicar cada paso, pero no se debe repetir cuando se resuelve un problema específico, simplemente hay que aplicar el método de solución sin explicar sus pasos.

3.2. Problema de Asignación

El problema consiste en asignar n candidatos a n puestos con el menor costo total; c_{ij} es el costo de asignar el candidato i al puesto j. De manera directa hay $n!$ posibles asignaciones y alguna o varias de ellas deben tener el menor costo total, por lo que estos problemas siempre tienen solución. Pero calcular todas las posibilidades y evaluarlas es poco manejable, incluso con ayuda de una computadora. Sin embargo, hay un procedimiento muy ingenioso para resolver este tipo de problemas: el método húngaro [Bazaraa]. Para describir el método hacemos un ejemplo.

Ejemplo 2. Problema de asignación

La tabla siguiente muestra los costos de un problema de asignaci´on, donde la posici´on [C_i,P_j] representa el costo de asignar el candidato i al puesto j.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Puestos} \\
 & \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\
\text{Candidatos} \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
14 & 17 & 15 & 18 \\
26 & 24 & 11 & 17 \\
19 & 22 & 18 & 22 \\
25 & 23 & 19 & 20
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

El primer paso consiste en restar a cada renglón su elemento mínimo, luego de esto, se hace lo mismo con las columnas.

A continuación, restamos el mínimo por renglones. Para la ejemplificación, se presenta a la derecha de la tabla el elemento mínimo de cada renglón con signo menos:

$$
\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
14 & 17 & 15 & 18 \\
26 & 24 & 11 & 17 \\
19 & 22 & 18 & 22 \\
25 & 23 & 19 & 20
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{c} (-14) \\ (-11) \\ (-18) \\ (-19) \end{array}
\end{array}
$$

Así, obtenemos.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} & (-3) & & (-1) \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 3 & 1 & 4 \\
15 & 13 & 0 & 6 \\
 & & & 4 \\
 & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ahora restamos el m´ınimo en las columnas que no tienen ceros, la tabla resultante es la siguiente.

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 3 \\
15 & 10 & 0 & 5 \\
1 & 1 & 0 & 3 \\
6 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Supongamos que cubrimos con tiras de papel las columnas y renglones que tienen ceros. En la tabla siguiente se ejemplifica esta acción.

La tabla asociada a un problema de asignación tiene una *asignación independiente de ceros* cuando el número mínimo de tiras horizontales o verticales que se requieren para cubrir los ceros es n (número de candidatos). Si el número mínimo de tiras es menor a n , todavía no hay una asignación independiente de ceros.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 15 & 10 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego de cubrir los ceros de la tabla con el menor número de tiras posible, analizamos si hay una asignación independiente de ceros; en la tabla anterior: el número mínimo de tiras para cubrir los ceros es tres, el cual es menor que cuatro, el número de candidatos. Entonces todavía no hay asignación independiente de ceros, continuamos generando ceros adicionales en la tabla con el siguiente procedimiento:

a) Identificamos el menor costo no cubierto por las tiras del paso anterior, que será positivo porque todos los ceros están cubiertos. En la tabla anterior es 1.

b) Restamos esta cantidad a todos los elementos no cubiertos, la sumamos alos elementos cubiertos que estén en la intersección de tiras horizontales y verticales, el resto permanece igual.

Para obtener una asignación independiente de ceros es posible que sea necesario aplicar más de una vez este último procedimiento.

Vamos a considerar la tabla anterior para generar más ceros:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 15 & 10 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el menor costo no cubierto por las tiras es 1 y luego de aplicar el procedimiento descrito en el inciso b), obtenemos la tabla siguiente.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 14 & 9 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En esta tabla el nu´mero m´ınimo de tiras para cubrir los ceros es 4. Entonces, ya podemos encontrar una asignaci´on independiente de ceros. Dicha asignacio´n se puede identificar sen˜alando con un asterisco los ceros, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0^* & 0 & 2 & 4 \\ 14 & 9 & 0^* & 5 \\ 0 & 0^* & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0^* \end{bmatrix}$$

Las dos asignaciones con menor costo son las siguientes:

I	II
$C_1 \longrightarrow P_1$	$C_1 \longrightarrow P_2$
$C_2 \longrightarrow P_3$	$C_2 \longrightarrow P_3$
$C_3 \longrightarrow P_2$	$C_3 \longrightarrow P_1$

$C_4 - \rightarrow P_4$ $\qquad$ $C_4 - \rightarrow P_4$

En la asignación I el candidato 1 se asigna al puesto 1; el candidato 2, al puesto 3 y así sucesivamente. En la asignación II el candidato 1 se asigna al puesto 2; el candidato 2 al puesto 3 y así sucesivamente.

En ambas soluciones $z_{min} = 67$, ya que:

$$z_{min} = c_{11} + c_{23} + c_{32} + c_{44} = 14 + 11 + 22 + 20 = 67$$
$$= c_{12} + c_{23} + c_{31} + c_{44} = 17 + 11 + 19 + 20 = 67.$$

Otro problema importante de asignación es cuando se tienen utilidades en lugar de costos y se trata de encontrar la asignación que maximice la utilidad. Este problema se resuelve transformando el problema de maximizar a minimizar, para resolverlo con el método ya conocido, una vez resuelto, $w_{M\acute{}ax}$ está en términos de z_{min}, es decir, $w_{M\acute{}ax} = -z_{min}$. A continuación, desarrollamos un ejemplo de este tipo.

Ejemplo 3. Asignación con utilidades

Encontrar la asignación que maximice la utilidad en un problema que tiene asociada la siguiente tabla de utilidades.

$$\begin{array}{cc} & \text{Puestos} \\ & \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \text{Candidatos} \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 12 & 68 & 64 & 43 \\ 85 & 27 & 13 & 42 \\ 29 & 84 & 12 & 88 \\ 20 & 55 & 24 & 71 \end{bmatrix} \text{tabla de utilidades} \end{array}$$

Primero transformamos la tabla de utilidades en una tabla de costos, en cuyo caso sabemos encontrar z_{min} con el m´etodo hu´ngaro. La tabla de costos se describe a continuación.

$$\begin{bmatrix} -12 & -68 & -64 & -43 \\ -85 & -27 & -13 & -42 \\ -29 & -84 & -12 & -88 \\ -20 & -55 & -24 & -71 \end{bmatrix}$$

Luego, encontramos el m´ınimo de las columnas y lo restamos a cada columna.

-(-85)-(-84)-(-64)-(-88)

$$\begin{bmatrix} -12 & -68 & -64 & -43 \\ -85 & -27 & -13 & -42 \\ -29 & -84 & -12 & -88 \\ -20 & -55 & -24 & -71 \end{bmatrix}$$

Haciendo las operaciones correspondientes, obtenemos.

$$\begin{bmatrix} 73 & 16 & 0 & 45 \\ 0 & 57 & 51 & 46 \\ 56 & 0 & 52 & 0 \\ 65 & 29 & 40 & 17 \end{bmatrix}$$

Esta es la tabla de costos de oportunidad

Restamos 17 al cuarto renglón generar la siguiente tabla.

$$\begin{bmatrix} 73 & 16 & 0 & 45 \\ 0 & 57 & 51 & 46 \\ 56 & 0 & 52 & 0 \\ 48 & 12 & 23 & 0 \end{bmatrix}$$

En la tabla anterior, tenemos una asignaci´on independiente de ceros pues el número mínimo de tiras para cubrir los ceros es 4.

$$\begin{bmatrix} 73 & 16 & \boxed{0} & 45 \\ \boxed{0} & 57 & 51 & 46 \\ 56 & \boxed{0} & 52 & 0 \\ 48 & 12 & 23 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

La solución es:

C1−→ P3

C2−→ P1

$$C3 \longrightarrow P2$$
$$C4 \longrightarrow P4$$
$$zmin = -304$$

La solución del problema maximizar w tiene la misma asignación y $wM\acute{a}x = -zmin = 304$.

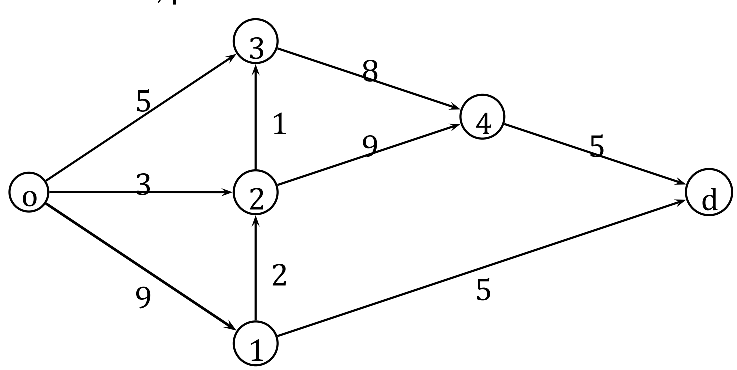
Verificamos que $w_{M\acute{a}x} = u_{13} + u_{21} + u_{32} + u_{14} = 64 + 85 + 84 + 71 = 304$, donde la variable u_{ij} es la utilidad de asignar el candidato i al puesto j.

3.3. Problema de la ruta más corta

Sea $G = (N,A)$ una red dirigida y conexa, donde cada arco (i,j) tiene asociado un número c_{ij} que puede representar distancia costo o tiempo; en adelante sólo nos referiremos a distancias y entenderemos que son números positivos. En esta red se cumplen las condiciones siguientes: (1) la red tiene dos nodos distinguidos o y d (origen y destino), (2) todos los costos asociados a los arcos son números enteros no negativos, (3) existe al menos una ruta de o a d.

El problema consiste en encontrar la ruta más corta (menos costosa, más rápida) entre los nodos o y d. En redes con las características antes mencionadas el problema de la ruta más corta siempre tiene solución y hay un método eficiente para resolver este tipo de problemas: el método de etiquetación de Dijkstra [Bazaraa, Bondy],el cual, además, encuentra la ruta más corta desde el origen al resto de los nodos.

A continuación, presentamos una red con las características que mencionamos.



Las etiquetas para este éetodo son de la forma { i , d_j}, donde d_j es la distancia de una ruta más corta del nodo o al nodo j, i representa al nodo antecesor de j en dicha ruta. A continuación, se describe el método de etiquetación de Dijkstra.

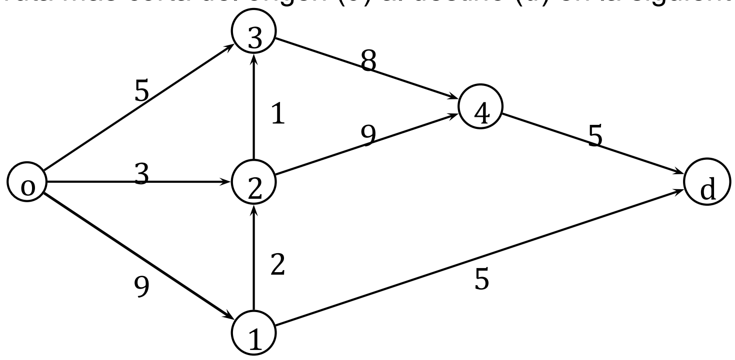
El paso 1 consiste en poner la etiqueta {−,0} al origen. El guión de la etiqueta significa que no tiene antecesor.

El paso 2 consiste en calcular las distancias de los nodos etiquetados a los nodos sucesores de los nodos etiquetados y se etiqueta sólo un *nodo sucesor* cuya d_j sea mínima, $d_j = d_i + c_{ij}$. Si hay empate elegimos arbitrariamente cualquiera de ellos.

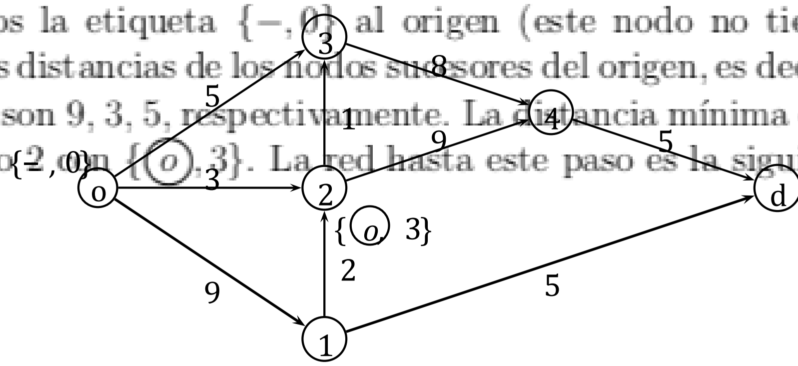
El Paso 3 verifica si el nodo destino d ya ha sido etiquetado; de ser así, se ha encontrado la ruta más corta del origen o al destino d. La ruta más corta se identifica a través de los antecesores indicados en las etiquetas y la distancia mínima es la d_j que aparece en la etiqueta del nodo destino. Si el nodo destino aún no tiene etiqueta, regresamos al paso 2.

Ejemplo 4. Ruta más corta

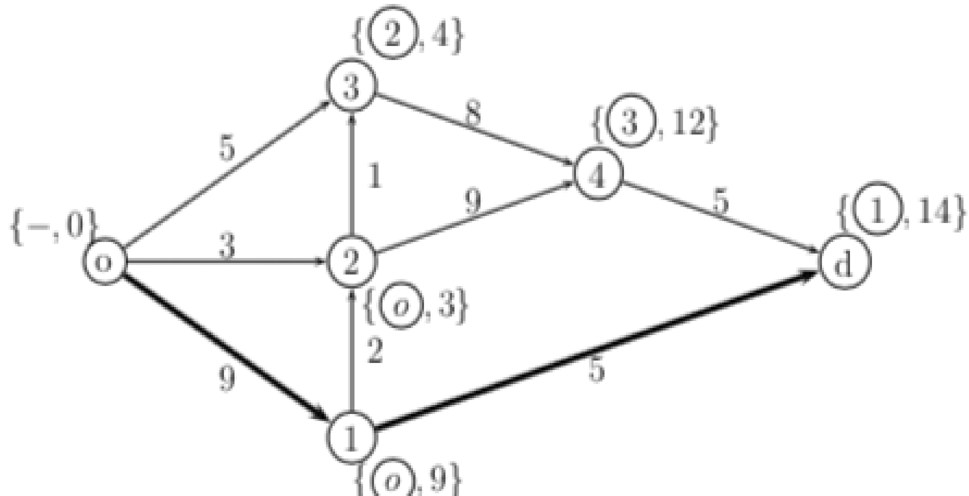
Encontrar la ruta más corta del origen (*o*) al destino (*d*) en la siguiente red.



Primero ponemos la etiqueta $\{-, 0\}$ al origen (este nodo no tiene antecesor), luego, calculamos las distancias de los nodos sucesores del origen, es decir, los nodos 1, 2 y 3, sus distancias son 9, 3, 5, respectivamente. La distancia mínima es $d_j = d_2 = 3$. Etiquetamos el nodo 2 con $\{o, 3\}$. La red hasta este paso es la siguiente.



Aún no hemos etiquetado el nodo *d*, continuamos calculando las distancias de los nodos etiquetados a sus nodos sucesores, en este caso los sucesores de los nodos etiquetados son 1, 3, 4 y sus distancias son 9, 4, 12, respectivamente; d_3 es la m´ınima, entonces etiquetamos al nodo 3.

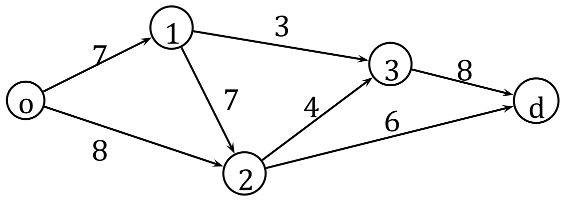


Continuando con el algoritmo, llegamos a etiquetar con $\{1, 14\}$ al destino, entonces el último arco de la ruta más corta es $(1, d)$, la etiqueta del nodo 1 es $\{o, 9\}$ así que el penúltimo arco de la ruta es $(o, 1)$, por lo tanto, la ruta más corta es $o \underset{9}{\rightarrow} 1 \underset{5}{\rightarrow} d$ y la distancia mínima es 14. En la aplicación práctica de este método no se escriben varias gráficas como se hizo aquí, lo más común es escribir las etiquetas en la misma gráfica.

3.4. Problema de flujo máximo, cortadura mínima

Sea $G = (N,A)$ una red dirigida y conexa, en esta red puede circular un tipo de bien. Cada arco (i,j) de la red, tiene asociada una capacidad k_{ij} que limita las unidades del bien que pueden pasar por el arco. En esta red se cumplen las condiciones siguientes: (1) la red tiene dos nodos distinguidos *o* y *d* (origen y destino), (2) todas las capacidades asociadas a los arcos son números enteros no negativos, (3) existe al menos una ruta de *o* a *d*.

El problema de flujo máximo consiste en encontrar la máxima cantidad de flujo que puede circular del nodo *o* al nodo *d*. A continuación, presentamos una red con las carácterísticas antes mencionadas.



Los conceptos distinguidos en cursivas se pueden consultar en el Apéndice.

Para resolver el problema de flujo máximo vamos a utilizar el método de etiquetación de Ford y Fulkerson [Bazaraa, Bondy], que inicia con un *flujo factible* y consiste en lo siguiente.

i) Se determinan rutas del origen al destino, tales que ningún arco esté saturado, es decir, que el flujo sea menor a la capacidad del arco; esto mediante la etiquetación y luego se actualiza el flujo, hasta agotar las rutas.

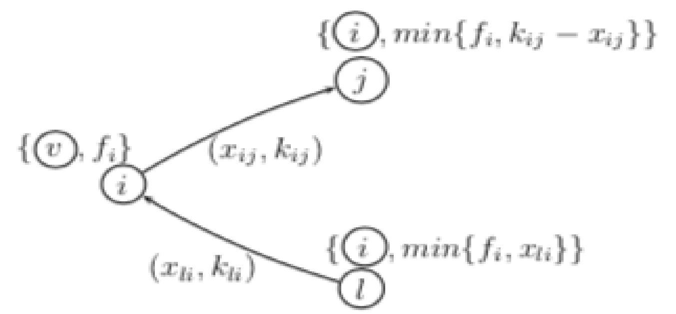
ii) Si ya no hay rutas que incrementen el flujo en la red, buscamos cadenas del origen al destino tal que los arcos en sentido directo no deben estar saturados y los arcos que est´en en sentido contrario deben llevar flujo positivo, esto mediante la etiquetaci´on y luego se actualiza el flujo, hasta agotar las cadenas.

iii) Si no hay cadenas con esta propiedad, entonces se tiene que el flujo es máximo.

La etiquetación se realiza de la siguiente manera:

Iniciamos poniendo la etiqueta $\{(d), \infty\}$ al origen. Si el arco (i, j) pertenece a la re ... nodo i, la etiqueta es $\{(i), f_j$ ...

Si el arco (... el nodo l a partir del nodo i ... rtir del nodo i es $\{(i), f_l\}$ d ... á etiquetando un nodo a par ... corrido en sentido contrario.

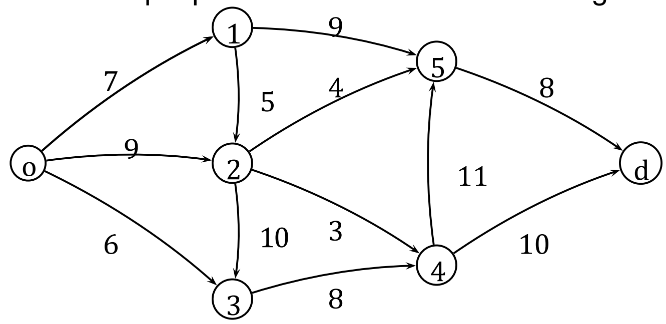


El siguiente diagrama ejemplifica la etiquetación.

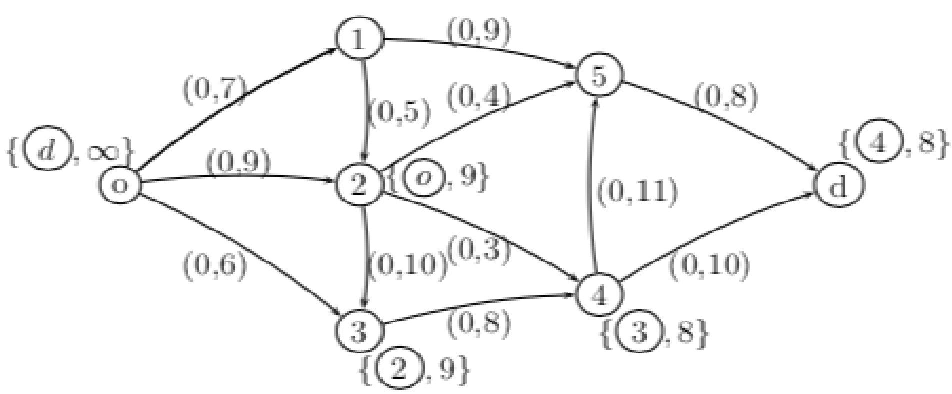
Una vez etiquetado el destino con $\{v, f_d\}$ a través de una ruta o cadena, la actualización del flujo se hace incrementando f_d unidades en los arcos de la ruta encontrada; o si fue cadena, la actualización consiste en aumentar el flujo en f_d unidades en los arcos de la cadena recorridos en sentido directo y restarlo en los arcos recorridos en sentido contrario. En el siguiente ejemplo se implementan las formas de actualización del flujo para ruta y cadena.

Ejemplo 5. Problema de flujo máximo

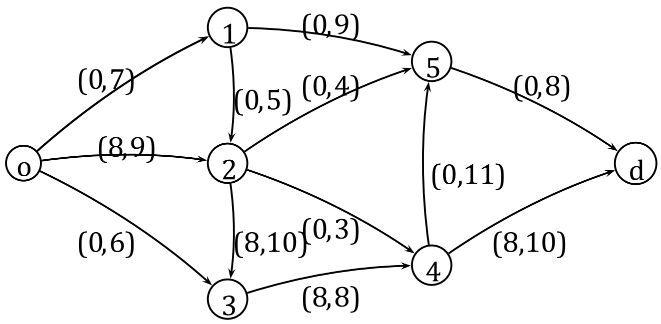
Encontrar el flujo máximo que puede circular de *o* a *d* en la siguiente red.



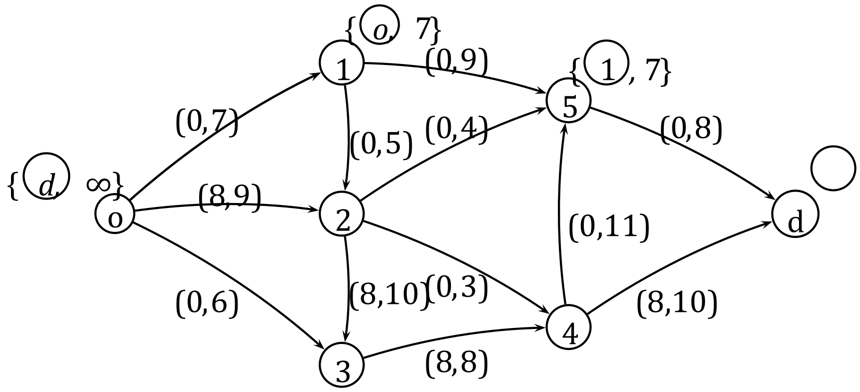
Iniciamos con el flujo factible cero en todos los arcos y empezamos a buscar rutas de o hacia d con las etiquetas; el origen tiene etiqueta $\{d, \infty\}$. Esto se ilustra a continuación.



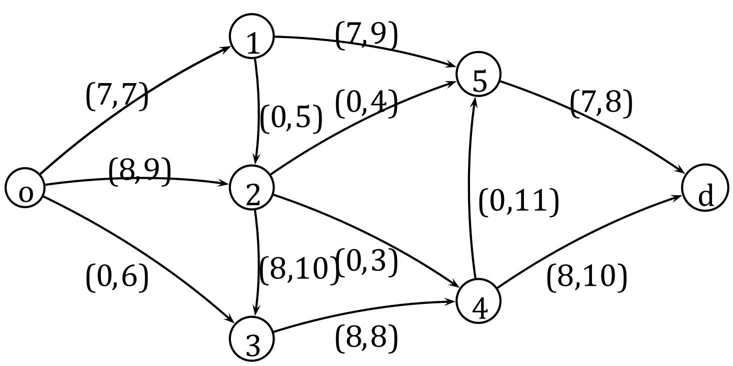
La ruta que encontramos es: $o \to \underset{9}{2} \to \underset{9}{3} \to \underset{8}{4} \to \underset{8}{d}$ y permite incrementar el flujo en 8 unidades; procedemos a actualizar el flujo. Para fines de ilustrar el procedimiento, luego de actualizar el flujo borramos las etiquetas y continuamos buscando rutas o cadenas.



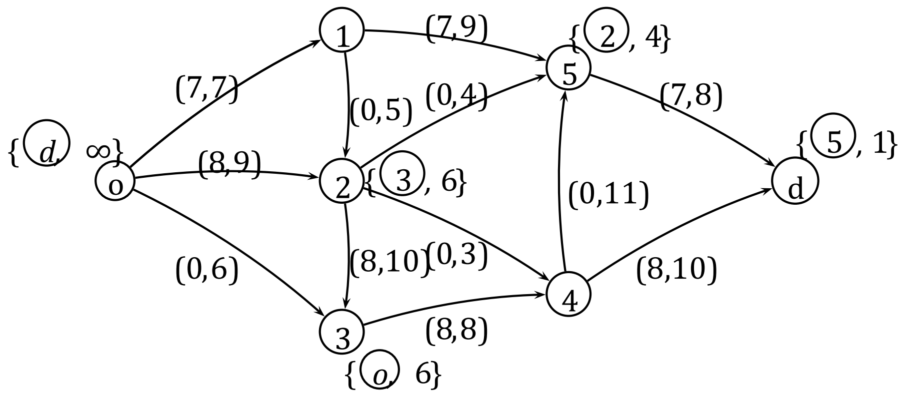
En esta red tenemos otra ruta.



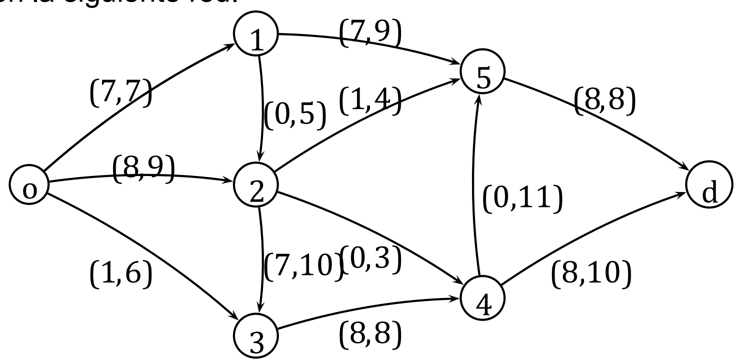
La segunda ruta es $o \rightarrow \underset{7}{1} \rightarrow \underset{7}{5} \rightarrow \underset{7}{d}$ y el incremento del flujo es de 7 { 5 ,7}
unidades; procedemos a actualizar el flujo y borramos las etiquetas.



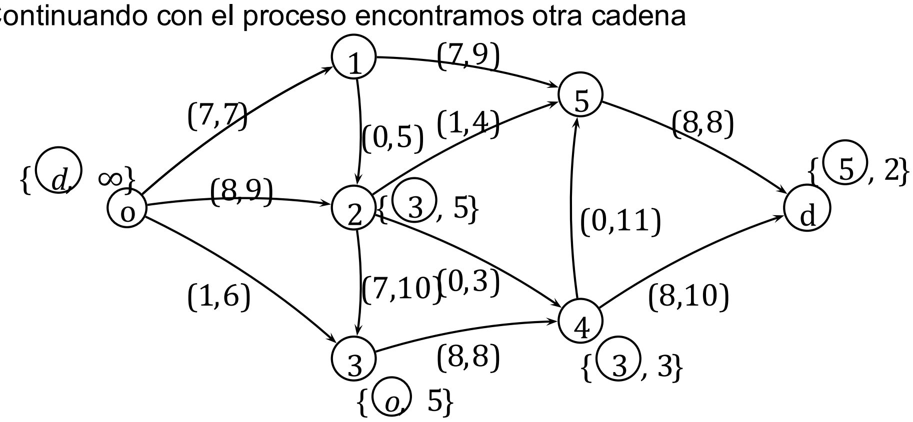
En la red anterior ya no hay rutas, ahora encontramos una cadena.



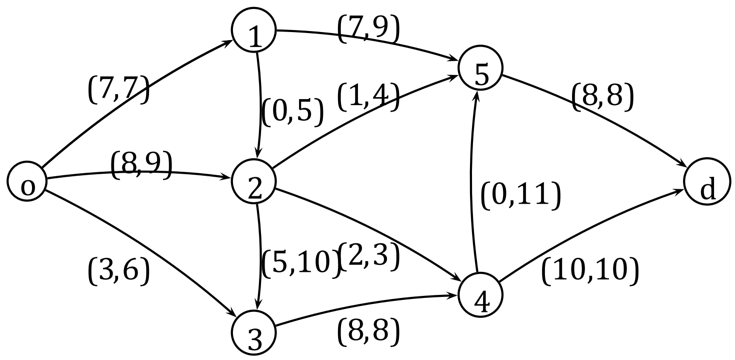
la cadena es $\underset{}{o} \to \underset{6}{3} \leftarrow \underset{6}{2} \to \underset{4}{5} \to \underset{1}{d}$ el incremento en el flujo es 1, el flujo actualizado se muestra en la siguiente red.



Continuando con el proceso encontramos otra cadena



la cadena es $\underset{}{o} \to \underset{5}{3} \leftarrow \underset{5}{2} \to \underset{3}{4} \to \underset{2}{d}$ el incremento del flujo es de 2 unidades; veamos el flujo actualizado en la siguiente red.

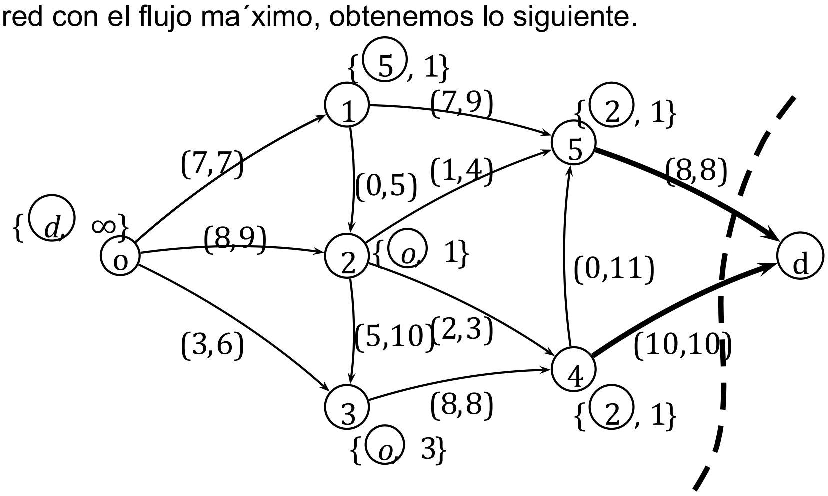


En esta última red las etiquetas ya no pueden llegar hasta *d* entonces, ya encontramos el flujo máximo que puede circular del origen al destino, $z_{M\acute{}ax}$ = 18. Aquí se escribieron varias gráficas para explicar el método, pero lo más común después de actalizar el flujo es borrar las etiquetas y seguir incrementando el flujo mientras sea posible.

El método también resuelve el problema de la cortadura mínima en este tipo de redes.

Para encontrar la cortadura de capacidad míınima en la red usando el método de Ford y Fulkerson se hace lo siguiente: una vez encontrado el flujo ma´ximo que puede circular en la red se continúa etiquetando todos los nodos que sea posible etiquetar con el método de Ford y Fulkerson, el subconjunto de nodos etiquetados obviamente no contiene a *d*, ese subconjunto define la cortadura de capacidad mínima.

Vamos a ilustrar esto aplic´andolo al ejemplo anterior. Si continuamos etiquetando los nodos en la red con el flujo ma´ximo, obtenemos lo siguiente.



Así que la cortadura generada por $X = \{o,1,2,3,4,5\}$, $(X,X^c) = \{(5,d),(4,d)\}$ es la de menor capacidad adema´s, $K(X,X^c) = 8 + 10$ coincide con $z_{M\acute{}ax}$.

3.5. Glosario

Gráfica. Una gráfica $G = (N,A)$ consiste en un conjunto *N* de nodos y un conjunto *A* de aristas cuyos elementos son parejas no ordenadas de nodos distintos.

Gráfica dirigida. Una gráfica dirigida $G = (N,A)$ consiste en un conjunto N de nodos y un conjunto A de arcos cuyos elementos son parejas ordenadas de nodos distintos.

Red. Es una gráfica cuyos nodos y arcos tienen asociados valores numéricos.

Red dirigida. Es una gráfica dirigida cuyos nodos y/o arcos tienen asociados valores numéricos.

Sub-gráfica. Una gráfica $G' = (N',A')$ es una sub gráfica de $G = (N,A)$ si $N' \subseteq N$ y $A' \subseteq A$.

Cadena. (del nodo n_1 al nodo n_r) Una cadena en una gráfica dirigida $G = (N,A)$ es una sub gráfica de G consistente de un secuencia alternada de nodos y arcos $n_1 - a_1 - ... - a_{r-1} - n_r$ que satisface la propiedad de que para todo k, $1 \leq k \leq r-1$, $(n_k,n_{k+1}) \in A$ o $(n_{k+1},n_k) \in A$.

Gráfica conexa. Si para cualquier par de nodos de la gráfica hay una cadena que los conecta.

Ruta. (del nodo n_1 al n_r) Una ruta en una gráfica dirigida $G = (N,A)$ es una sub-gráfica de G consistente de una secuencia alternada de nodos y arcos $n_1 - a_1 - ... - a_{r-1} - n_r$ que satisface la propiedad de que para todo k, $1 \leq k \leq r-1$, $(n_k,n_{k+1}) \in A$ y además, los arcos son distintos y los nodos son distintos. Una ruta también se puede denotar como $n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow n_3 ... n_{r-1} \rightarrow n_r$.

Nodo sucesor. Dada una gra´fica $G = (N,A)$, los nodos sucesores del nodo i son todos los nodos j tal que (i,j) es un arco de la gráfica.

Ciclo. Un ciclo es una cadena $n_1 - a_1 - n_2 - ... - a_{r-1} - n_r$ en la que se agrega el arco (n_r,n_1) ó (n_1,n_r).

Árbol. Es una gráfica conexa que no contiene ciclos.

Sea $G = (N,A)$ un árbol donde $|N| = m$, a continuación presentamos algunas caracterizaciones equivalentes de G:

(a) G tiene $m - 1$ arcos y ningún ciclo.

(b) G no tiene ciclos, pero al agregar cualquier arco nuevo a G se obtiene una gráfica con exactamente un ciclo.

Flujo factible: Es un conjunto de valores para x_{ij}, $(i,j) \in A$ donde se cumple lo siguiente:

$$a)\ \ 0 \leq x_{ij} \leq k_{ij},\ (i,j) \in A$$

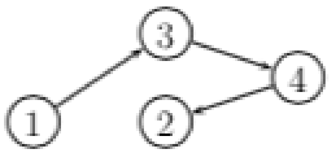
$$b)\ \ \sum_{\{l\ :\ (l,i)\in A\}} x_{li} - \sum_{\{k\ :\ (i,k)\in A\}} x_{ik} = 0\ \forall\ i \in N \backslash \{o,d\}.$$

Para indicar el flujo y la capacidad del arco (i,j) vamos a poner (x_{ij},k_{ij}) en este arco.

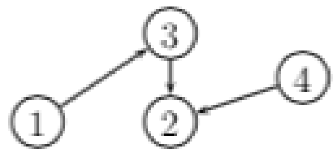
Cortadura. Sea $G = (N,A)$ una gráfica dirigida y sea $\{X,X^c\}$ una partición del conjunto de nodos N; el conjunto de todos los arcos de G cuyo extremo inicial pertenece a X y cuyo extremo final pertenece a X^c es llamado una *cortadura* de G y se denota por (X,X^c). Notemos que las cortaduras (X,X^c) y (X^c,X) son diferentes, porque si el arco (i,j) pertenece a la cortadura (X,X^c), entonces no pertenece a la cortadura (X^c,X).

Para cualesquiera dos nodos n_1, $n_2 \in N$, una cortadura (X,X^c) tal que $n_1 \in X$ y $n_2 \in X^c$ se dice que *separa* n_1 *de* n_2, en ese orden.

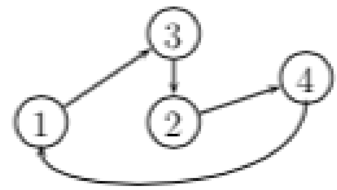
Capacidad de una cortadura. Es la suma de las capacidades de los arcos que forman la cortadura, se denotará por $K(X,X^c)$. Veamos ejemplos para ilustrar algunos de los conceptos



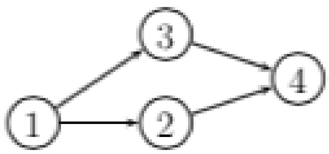
Ruta de 1 a 2



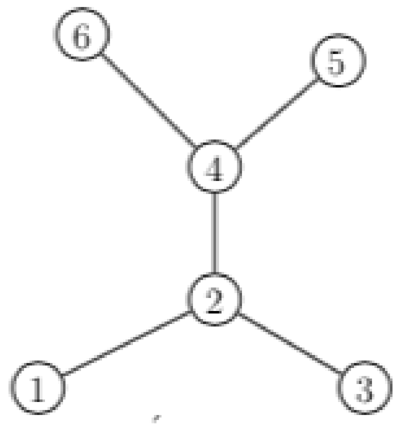
Cadena de 1 a 4



Circuito



Ciclo



Árbol

Fuentes de consulta

Básica

- Bazaraa, M.S. (1999). *Programaci´on Lineal y Flujo en Redes*. Segunda Edición. México: Limusa.
- Bondy, J.A. (1979). *Graph theory with applications*. New York-Amsterdam-Oxford. North-Holland.