



Matemáticas

8° Semestre

Investigación de Operaciones

Unidad 4. Teoría de Juegos

Clave

05144843

Universidad Abierta y a Distancia de México





Índice

Introducción.....	2
4.1. Conceptos básicos de teoría de juegos.....	3
4.2. Solución de juegos matriciales.....	4
4.3. Estrategias mixtas.....	5
Fuentes de consulta.....	8



Introducción

Como sabemos, un juego involucra un número determinado de jugadores, N , un conjunto de estrategias para ellos y un cobro o recompensa que les corresponde luego de cada partida. Las estrategias para cada jugador pueden ser muy complicadas, ya que describen el proceder en cada situación posible. La estrategia dependerá del juego; por ejemplo, si el juego tiene pocos movimientos las estrategias son sencillas, pero en juegos como el ajedrez hay un gran número de posibles movimientos y también de estrategias.

Los juegos que abordaremos en esta unidad incluyen a dos jugadores, es decir, $N = 2$. Además, generan un número finito de estrategias y lo que gana un jugador, el otro lo pierde. Estos se llaman *juegos de dos personas finitos de suma cero*. Cabe mencionar que la mayoría de los juegos son de suma diferente de cero.

Llamémosle a los jugadores I y II; supongamos que el jugador I elige una de sus m posibles estrategias digamos i , $i = 1, \dots, m$, y el jugador II a su vez elige la estrategia j , $j = 1, \dots, n$. Si calculamos el pago para cada jugador con esta elección de estrategias y resulta que el jugador I gana A_i^j , entonces II pierde A_i^j , porque el juego es de suma cero. Con esto, podemos definir la matriz de pagos para el jugador I, la llamada matriz de pagos del juego, los jugadores I y II se denotan con J I y J II respectivamente.

		J II		
		Estrategia 1	...	Estrategia n
J I	Estrategia 1	A_1^1	...	A_1^n
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	Estrategia m	A_m^1	...	A_m^n

Suponemos que ambos jugadores quieren elegir estrategias que maximicen sus pagos individuales, de otra manera no hay un conflicto de intereses y el juego no tiene sentido. Además, se supone que el juego se realiza una cierta cantidad de veces.

Los renglones son llamados *estrategias puras* para el jugador I y las columnas son llamadas *estrategias puras* para el jugador II. Estos nombres se les dan tomando en cuenta que hay formas de jugar eligiendo combinaciones de estrategias puras y a estas estrategias se les llaman *estrategias mixtas*; más adelante se ilustra este concepto con ejemplos.

Los juegos matriciales se pueden resolver encontrando el *punto silla* de la ganancia esperada, ya sea con estrategias puras o con *estrategias mixtas*.



4.1. Conceptos básicos de teoría de juegos

A continuación, describimos algunos conceptos básicos de la teoría de juegos.

Juego matricial de suma cero. Es un juego que involucra a dos jugadores y el número de estrategias que tiene cada jugador es finito además, la suma de las ganancias de ambos jugadores es cero.

Matriz de pagos de un juego. Un juego matricial de suma cero lo podemos representar con una matriz $A = (A_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Donde A_{ij} es el pago que recibe el jugador I del jugador II si el jugador I elige jugar con la estrategia i y el jugador II elige su estrategia j .

		J II		
		Estrategia 1	...	Estrategia n
J I	Estrategia 1	A_1^1	...	A_1^n
	...	...	...	...
	Estrategia m	A_m^1	...	A_m^n

Los renglones son llamados *estrategias puras* para el jugador I y las columnas son llamadas *estrategias puras* para el jugador II.

Valor inferior y valor superior del juego. En un juego matricial de suma cero que tiene asociada la matriz de pagos $A_{m \times n}$ se definen:

$$\begin{aligned} \text{el valor inferior del juego } \alpha &= \max_{i=1, \dots, m} \min_{j=1, \dots, n} A_{ij}^j \\ \text{y el valor superior del juego } \beta &= \min_{j=1, \dots, n} \max_{i=1, \dots, m} A_{ij}^j, \end{aligned}$$

α representa el menor monto que el jugador I puede garantizar recibir y β representa el monto más grande que el jugador II puede perder.

Valor del juego. Si en la matriz de pagos de un juego el valor inferior del juego coincide con el valor superior del juego, dicho valor se denomina valor del juego y se denota por v , es decir, $v = \alpha = \beta$. En el otro caso, cuando $\alpha < \beta$ el valor del juego v se define como la ganancia esperada $E(\bar{x}^*, \bar{y}^*)$, donde $\bar{x}^*$ y $\bar{y}^*$ son las estrategias mixtas óptimas para cada jugador. Una forma de interpretar el valor del juego es tomándolo como una medición de la ventaja; es decir, si $v > 0$ el jugador I deberá pagar un monto v al jugador II para hacer el juego justo.



Punto silla de estrategias puras. Se dice que (i^*, j^*) es un punto silla de estrategias puras del juego si:

$$A_i^{j^*} \leq A_{i^*}^j \leq A_{i^*}^{j^*} \quad \forall i, j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Como es sabido, un juego matricial tiene *punto silla de estrategias puras* si y sólo si el *valor inferior del juego* (α) es igual al *valor superior del juego* (β) [Barron, p.12] además, el renglón i^* y la columna j^* que corresponden al pago $A_{i^*}^{j^*} = \alpha = \beta$ se denomina punto silla de estrategias puras. Las estrategias i^* y j^* también se llaman estrategias óptimas, porque si cualquier jugador se desvía de jugar su correspondiente estrategia i^* o j^* entonces el otro jugador puede tomar ventaja y mejorar su ganancia, en este sentido cada parte de la silla es la *mejor respuesta* para el oponente.

Estrategia mixta. Dada una matriz asociada a un juego, $A_{m \times n}$, una estrategia mixta para un jugador es un vector $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, donde $k = m$ ó n dependiendo de cual jugador sea la estrategia y se cumple que:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k x_i = 1.$$

Las componentes x_i representan la probabilidad con la que la estrategia pura i será usada por el jugador.

Solución del juego. La solución del juego consta de las estrategias óptimas para cada jugador, así como del valor del juego. Ya sean estrategias puras óptimas, o bien, estrategias mixtas óptimas.

4.2. Solución de juegos matriciales

Cuando se intenta resolver un juego matricial, generalmente primero se trata de identificar un punto silla de estrategias puras. En el siguiente ejemplo ilustramos la forma de resolver un juego que tiene punto silla de estrategias puras.

Ejemplo 1. Solución del juego con estrategias puras.

Encontrar la solución del juego con la siguiente matriz de pagos:

$$A = \begin{array}{c|cccc|c} 11 & 10 & \boxed{7} & 13 & \boxed{7} \\ 16 & 21 & 5 & 3 & 3 \\ 14 & 17 & 2 & 19 & 2 \\ 16 & 21 & \boxed{7} & 19 & \end{array}$$



Calculando el mínimo por renglones y el máximo por columnas encontramos una posición donde coinciden estos números, entonces el punto silla es (1,3) y el valor del juego es $v = 7$.

El propósito del siguiente ejemplo es ilustrar el concepto de estrategias.

Ejemplo 2. Adivina y Pon.

El juego consiste en mostrar 1 ó 2 dedos y al mismo tiempo adivinar lo que mostrará el oponente, por ejemplo, si el jugador I pone 1 y dice 2, significa que muestra un dedo y adivina que el otro jugador mostrará 2 dedos; si sólo un jugador le adivina al otro los dedos mostrados entonces, gana una cantidad igual al número de dedos que se ven, en otro caso es empate.

En este juego, la primera entrada de cada pareja ordenada representa el número de dedos mostrados y la segunda indica lo que se espera mostrará el oponente. La matriz de pagos para el jugador I es la siguiente.

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1,1)	0	2	-3	0
(1,2)	-2	0	0	3
(2,1)	3	0	0	-4
(2,2)	0	-3	4	0

4.3. Estrategias mixtas

Si consideramos la matriz de pagos del juego Adivina y Pon, notamos que no es posible resolverlo a través de un punto silla de estrategias puras. Si se elige siempre la misma estrategia, el oponente sabrá sacar ventaja de ello, entonces conviene cambiar de estrategia, pero sin una secuencia determinada para evitar que se use esta información en contra, entonces la elección de las estrategias debe ser aleatoria y surge la pregunta: ¿con qué distribución de probabilidad vamos a elegir las estrategias? Elegir una combinación de estrategias puras a partir de un proceso probabilístico es lo que se entiende por *estrategia mixta*.

En un juego que tiene asociada la matriz de pagos $A_{m \times n}$, si el jugador I usa una estrategia mixta con la distribución de probabilidad $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ y el jugador II utiliza su



estrategia j , la ganancia esperada para el jugador I, denotada por $E(\bar{x}, j)$, es $x_1 A_1^j + \dots + x_m A_m^j$. De forma similar $E(i, \bar{y})$ es la pérdida esperada para el jugador II cuando toma una estrategia mixta $\bar{y}$ y el jugador I elige la estrategia i .

Para elegir la distribución de probabilidad con la que se elegirán las estrategias $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ y conocer cuál será la ganancia esperada del juego, nos basamos en el siguiente resultado.

Todas las matrices $A_m \times_n$ definen funciones continuas, cóncavas en $\bar{x}$, convexas en $\bar{y}$, $f: C \times D \rightarrow \mathbb{R}, (\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \bar{x} A \bar{y}^T$.

Donde $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ son vectores renglo'n. Si los conjuntos C y D se definen como:

$$C = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m / \sum_{i=1}^m x_i = 1, \bar{x} \geq \bar{0}\}, \quad D = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^n y_j = 1, \bar{y} \geq \bar{0}\}.$$

Entonces C y D son conjuntos convexos cerrados y acotados, pero todas estas condiciones son las hipótesis del teorema de Von Neumann (minimax) [Barron], que garantiza que existe un punto silla en $C \times D$ para tales funciones. Esto significa que todos los juegos matriciales de suma cero tienen solución con estrategias mixtas. A continuación, ejemplificamos la solución de un juego a través de estrategias mixtas.

Ejemplo 3. Estrategias mixtas.

Resolver el juego con la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{pmatrix} -10 & 40 \\ 30 & -20 \end{pmatrix}$$

Si el jugador I usa una estrategia mixta aleatoria con la distribución de probabilidad $\bar{x} = (x, 1-x)$ y el jugador II usa su estrategia 1, la ganancia esperada para I es:

$$E(\bar{x}, 1) = -10x + 30(1-x) = -40x + 30,$$

$$E(\bar{x}, 2) = 60x - 20.$$

La Figura siguiente muestra la gráfica de las ganancias esperadas para el jugador I, en función de la variable x .

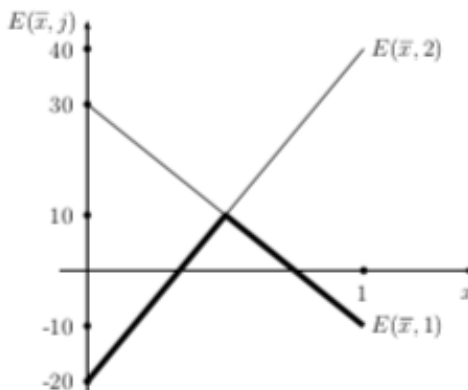


Figura 1



La menor ganancia esperada para el jugador I está indicada con línea gruesa en la gráfica. De esta situación, el mayor valor posible (maximin) es cuando $E(x, 1) = E(x, 2)$; es decir, cuando $-40x + 30 = 60x - 20$, $x = \frac{1}{2}$ entonces, $\bar{x}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y la ganancia esperada es $E(\bar{x}^*, j) = 10$.

Ahora, busquemos la estrategia óptima para el jugador II; si el jugador II usa una estrategia mixta aleatoria con la distribución de probabilidad $\bar{y} = (y, 1 - y)$ y el jugador I usa su estrategia pura 1, la ganancia esperada para el jugador II es:

$$E(1, \bar{y}) = -10y + 40(1 - y) = -50y + 40, \quad E(2, \bar{y}) = 50y - 20.$$

La Figura siguiente muestra la gráfica de las pérdidas para el jugador II (ganancias para el jugador I), en función de la variable y .

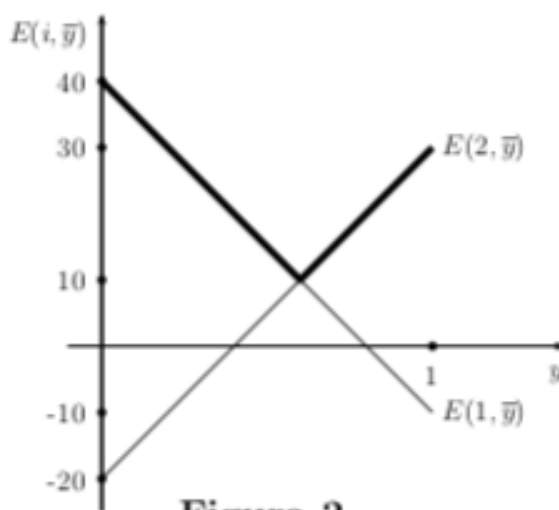


Figura 2

La mayor pérdida esperada para el jugador II es la poligonal de línea gruesa y el menor valor de esta pérdida (minimax) se encuentra cuando $E(1, \bar{y}) = E(2, \bar{y})$; es decir:

$$-50y + 40 = 50y - 20, 60 = 100y \implies y = \frac{3}{5}.$$

Entonces, $\bar{y}^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ y la ganancia esperada del juego es $v = 10$; como el valor del juego es positivo, podemos decir que hay ventaja para el jugador I.



Fuentes de consulta

Básica

- Barron, E. N. (2008). *Game theory: An introduction*. John Wiley & Sons.