



Ciencias Exactas, Ingeniería y Tecnología

Ingeniería en Logística y Transporte

1er. Semestre

Unidad Didáctica:
Álgebra

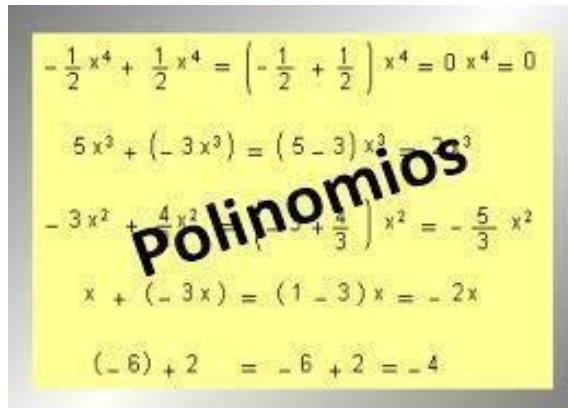
Unidad 2. Polinomios

Universidad Abierta y a Distancia de México





Índice	
Presentación de la unidad	3
Competencia específica.....	3
2.1. Polinomios y sus operaciones básicas	4
2.1.1. Suma y resta.....	6
2.1.2. Multiplicación.....	8
2.1.3. División.....	10
2.2. Productos notables	12
2.2.1. Cuadrado y cubo de un binomio.....	13
2.2.2. Binomios conjugados	14
2.2.3. Binomios que tienen un término común	14
2.3. Factorización	15
2.3.1. Trinomio cuadrado perfecta	17
2.3.2. Diferencia de cuadrados.....	17
2.3.3. Trinomio de la forma $x^2 + ax + b$	18
2.4. Gráficas de polinomios.....	19
2.4.1. Sistema cartesiano.....	19
2.4.2. Funciones polinomiales.....	22
Cierre de la unidad.....	33
Para saber más	34
Fuentes de consulta	35



Unidad 2. Polinomios

Presentación de la unidad

Los polinomios son expresiones algebraicas que tienen propiedades y con ellos se pueden hacer operaciones. El estudio de estas propiedades y sus operaciones permite abordar aplicaciones del Álgebra como la resolución de ecuaciones, también te permite aplicar el Álgebra como una herramienta potente y útil en otras ramas matemáticas y de otras ciencias como el Cálculo y la modelación en la Física, Química, etcétera.

En esta segunda unidad, abordarás lo que son los polinomios para entender su naturaleza y sus propiedades. Con esto revisarás los algoritmos básicos de sus operaciones, así como otros algoritmos más concretos que permiten desarrollar operaciones de manera rápida en casos específicos para simplificar expresiones.

Una parte importante que se ligará después con tus cursos de Cálculo es la representación gráfica de los polinomios. Es por ello que se abordará el proceso de graficar los polinomios, en la forma de funciones polinomiales, para que identifiques las consecuencias que tienen en las gráficas, estas propiedades y sus operaciones.

Competencia específica

Analiza las propiedades de los polinomios, para plantear o resolver ecuaciones, mediante la resolución de ejercicios

Logros alcanzar

- Identifica las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de polinomios.
- Identifica y resuelve los distintos tipos de productos notables.
- Identifica los distintos tipos de factorización y descompone polinomios en factores.
- Simula las funciones polinomiales mediante el uso de Geogebra.
- Realiza operaciones entre polinomios y las simula mediante Geogebra.



2.1. Polinomios y sus operaciones básicas

En términos generales, un polinomio es una expresión algebraica formada por una serie finita de sumandos que involucran variables y constantes. Expresiones como las siguientes son polinomios de varias variables:

$$4x^3y - 5xy^2 + 3y^3, -9x + 1, 52z^2 - 45x^2z^5 + 3y^2 - 2x + 8$$

De una manera sintetizada se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^m a_i \left(x_1^{k_{i1}} \square x_n^{k_{in}} \right),$$

donde $a_1, \dots, a_m$ son constantes (números de un conjunto), $x_1, \dots, x_n$ son las variables y cada $k_{i1}, \dots, k_{in}$ son números naturales diferentes entre sí para cada valor de i .

Comenzaremos con los **polinomios de una sola variable o indeterminada** que tradicionalmente se representa por x . Visto así, la expresión anterior se simplifica a lo que sigue:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i$$

donde $a_1, \dots, a_n$ son constantes (números de un conjunto) y se les denomina **coeficientes del polinomio**, x es la variable o indeterminada y los diferentes valores para n son números enteros no negativos. De manera desarrollada la expresión anterior queda como sigue:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n.$$



Al respecto, podemos hacer las siguientes observaciones:

- Cuando $a_i = 0$ conviene omitir el término cuando se escribe el polinomio. Esto simplifica la escritura, pero debe ser tomado en cuenta especialmente cuando se hacen operaciones.
- Al término $a_i x^i$ se le llama **término de grado i** . En particular al término de grado 0 se le llama **término independiente**.
- El término $a_0 x^0$ puede escribirse a_0 y el término $a_1 x^1$ puede escribirse $a_1 x$.
- Se conviene que cuando algún $a_i = 1$ entonces se omite el “1” en la escritura de ese término. Asimismo, se conviene en escribir $-a_i x^i$ en lugar de $(-a_i) x^i$ o de $+ (-a_i) x^i$.
- Al polinomio 0 se le llama **polinomio nulo**.
- Se dice que el **grado de un polinomio** es el mayor de los grados de los términos que tienen coeficiente diferente de cero.
- Como estamos considerando que las constantes y las variables son números reales (podrían ser de otros conjuntos) aplica la conmutatividad en la suma, por lo que no importa el orden en que se escriban los términos de un polinomio. Sin embargo, conviene para muchas operaciones, simplificaciones, desarrollos, etcétera, escribirlos de manera decreciente según el grado.
- Finalmente, en más de una ocasión al hablar de un polinomio cualquiera de una variable utilizaremos la notación $P(x)$. Es importante que no la confundas con la notación de funciones (que tradicionalmente usa minúsculas y comienza con la f) porque son objetos matemáticos diferentes.

Algunos ejemplos de polinomios de una variable son los siguientes:

$$4 + 2x + 5x^3, \quad 2x, \quad x^3 + 2bx^2 - x + 1, \quad 2 - 3x^2, \quad 6.$$

(En lo anterior b se toma como una constante.)

Una observación importante que relaciona lo que hiciste en la unidad anterior con lo que harás en las próximas secciones de esta unidad es el hecho de que si $a_1, \dots, a_n$ son números enteros (es decir, elementos del anillo $\mathbb{Z}$) entonces el conjunto de polinomios de una variable es también un anillo, es decir, cumple con los primeros ocho axiomas mencionados en la primera unidad. Una ventaja enorme es que entonces lo que estudiaste sobre los números enteros en tus primeros años de escuela se puede aplicar a los enteros. Veamos cómo.

Antes que nada piensa en la notación desarrollada de un número entero, por ejemplo 34,912, y pregúntate: ¿qué pasaría si se sustituyera el 10 (en cada uno de los términos) por una variable indeterminada como x ? Lo que quedaría es lo está a continuación, donde el primer renglón es el



número considerado en notación desarrollada y el segundo renglón es un polinomio de grado 4 con una sola variable:

$$34\ 092 = 3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2$$

$$3x^4 + 4x^3 + 9x + 2 = 3x^4 + 4x^3 + 0x^2 + 9x + 2$$

¿Notas la similitud en la estructura?

Claro está, nosotros vamos a ampliar esto un poco al permitir que los coeficientes no sólo sean positivos, sino también negativos, así como coeficientes que no sólo son enteros, sino racionales (expresados como fracciones o con decimales) y hasta irracionales. En resumen, vamos a ampliar el trabajo de los polinomios a coeficientes que sean números reales ($\mathbb{R}$) pero ello no quita que la estructura de los polinomios sea semejante a la utilizada en la notación desarrollada y eso lo aprovecharás en las siguientes secciones para estudiar los algoritmos de las operaciones básicas con polinomios.

2.1.1. Suma y resta

La primera operación es la suma. En los enteros, con o sin notación desarrollada, te dijeron que tenías que alinear los sumandos a la derecha para que en la primera columna quedaran las unidades (de todos los sumandos), luego las decenas, las centenas, etcétera. Así, por ejemplo, la suma $3\ 567 + 12\ 045 + 892$ quedaría expresada en forma de columna y con notación desarrollada como sigue:

$$\begin{array}{r}
 \text{renglón de acarreo} \rightarrow \quad \boxed{1 \times 10^3} \quad \boxed{2 \times 10^2} \quad \boxed{1 \times 10} \\
 \\
 \begin{array}{r}
 3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 7 \\
 + 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10 + 5 \\
 8 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2 \\
 \hline
 1 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10 + 4
 \end{array}
 \end{array}$$

Ahora bien, observa la suma de polinomios siguiente

$$(3x^3 + 5x^2 + 6x + 7) + (x^4 + 2x^3 + 4x + 5) + (8x^2 + 9x + 2).$$

Considerando las semejanzas en las estructuras que se mencionaron al final de la sección anterior observa que la diferencia entre la suma de números (en notación desarrollada) y la de



polinomios es prácticamente que se sustituyó nuevamente “10ⁿ” por “xⁿ”. Eso nos lleva a que la suma de polinomios en forma de columna queda como sigue:

$$\begin{array}{r}
 3x^3 + 5x^2 + 6x + 7 \\
 + \quad x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 4x + 5 \\
 \quad \quad \quad 8x^2 + 9x + 2 \\
 \hline
 x^4 + 5x^3 + 13x^2 + 19x + 14
 \end{array}$$

Es importante notar que, a diferencia de la suma de números, en esta suma **no** aparece el primer renglón de “acarreo”. Esto es porque en el caso de polinomios los coeficientes son números reales y en el caso de la primera suma los coeficientes son sólo los dígitos. Pero la estructura es la misma.

También es muy importante que notes que en la suma de polinomios los términos no están ordenados de acuerdo a “unidades”, “decenas”, “centenas”, etcétera, sino al grado de los polinomios. Esto quiere decir que la parte literal (variables y potencias) coinciden en cada columna y a los términos de cada columna se les denomina **términos semejantes**.

Podemos pues escribir la suma de polinomios como sigue y a la derecha una manera simplificada (el resultado) que se obtiene **reduciendo términos semejantes**:

$$(3x^3 + 5x^2 + 6x + 7) + (x^4 + 2x^3 + 4x + 5) + (8x^2 + 9x + 2) = x^4 + 5x^3 + 13x^2 + 19x + 14.$$

En cuanto a la resta, aprovecharás las similitudes mencionadas y así esta operación se define como la suma del minuendo y del inverso aditivo del sustraendo. En cuanto al inverso aditivo se tiene que si $P(x)$ es un polinomio, entonces su inverso aditivo (denotado por $-P(x)$) es el polinomio que sumado a $P(x)$ produce el polinomio nulo o cero. Para términos prácticos $-P(x)$ se obtiene cambiando los signos del polinomio $P(x)$ por lo que la siguiente resta se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (3x^3 + 5x^2 - 6x + 7) - (x^4 - 2x^3 - 4x + 5) &= (3x^3 + 5x^2 - 6x + 7) + (-x^4 + 2x^3 + 4x - 5) = \\
 &= -x^4 + (3 + 2)x^3 + 5x^2 + (4 - 6)x + (7 - 5) = \\
 &= -x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2x + 2
 \end{aligned}$$

Observa que en este último caso también se aprovechó el axioma 5 de distributividad, pues así se agruparon los coeficientes de los términos que tienen el mismo grado. Este último proceso se llama **reducción de términos semejantes**.



También observa que el signo de la resta afecta a los signos de todos los coeficientes que están dentro del paréntesis al que antecede. El procedimiento “usual”, que toma como implícitos tanto la definición de la resta como el uso del axioma 5, indica “multiplicar” el signo de la resta y “distribuirlo” sobre la suma que está dentro del paréntesis. Cuando ya se tiene práctica con el manejo de los signos es más rápido hacerlo así y entonces simplificar la operación anterior como sigue:

$$(3x^3 + 5x^2 - 6x + 7) - (x^4 - 2x^3 - 4x + 5) = 3x^3 + 5x^2 - 6x + 7 - x^4 + 2x^3 + 4x - 5 = \\ = -x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2x + 2$$

En resumen, si $P(x)$ y $Q(x)$ son los polinomios $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$

$Q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j = b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots + b_m x^m$ y suponiendo que $m > n$, entonces la suma de los polinomios queda como:

$$P(x) + Q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{j=0}^m b_j x^j = \left(a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n \right) + \left(b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots + b_m x^m \right) = \\ = (a_0 + b_0) x^0 + (a_1 + b_1) x^1 + \dots + (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_m + b_m) x^m = \\ = \sum_{j=0}^m (a_j + b_j) x^j.$$



Y por su parte la resta $P(x) - Q(x)$ queda como:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= P(x) + [-Q(x)] = \sum_{i=0}^n a_i x_i + \left(-\sum_{j=0}^m b_j x^j\right) = \sum_{i=0}^n a_i x_i + \sum_{j=0}^m (b_j x^j) = \\ &= (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n) + (-b_0 x^0 - b_1 x^1 - \dots - b_m x^m) = \\ &= (a_0 - b_0) x^0 + (a_1 - b_1) x^1 + \dots + (a_n - b_n) x^n + \dots + (a_m - b_m) x^m = \\ &= \sum_{j=0}^m (a_j - b_j) x^j \end{aligned}$$

2.1.2. Multiplicación

En este caso ocurre algo similar que para la suma y la resta, así que puedes compararla con la multiplicación de números en la notación desarrollada. Por ejemplo, cuando se calcula el producto 356×42 utilizamos la propiedad distributiva (axioma 5) de manera implícita, por lo que el resultado queda de inicio como:

$$(3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) \times (4 \times 10 + 2) = [(3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) \times (4 \times 10)] + [(3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) \times 2]$$

Puedes notar que se distribuyó el factor izquierdo sobre la suma del factor derecho. Escrita de esta manera la multiplicación entonces se procede a hacerla en columnas:¹

$$\begin{array}{rcl} & & (3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) \\ & \times & (4 \times 10 + 2) \\ \hline (3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) \times 2 & \rightarrow & 6 \times 10^2 + 10 \times 10 + 12 \\ (3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) \times (4 \times 10) & \rightarrow & 12 \times 10^3 + 20 \times 10^2 + 24 \times 10 \end{array}$$

Falta calcular la suma final de estos dos productos, la cual está marcada en el desarrollo original que aparece más arriba, pero que nuevamente aparece abajo y está señalada por una flecha que apunta hacia abajo:

$$\begin{array}{rcl} & & \downarrow \\ (3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) \times (4 \times 10 + 2) & = & [(3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) \times (4 \times 10)] + [(3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6) \times 2] \\ & & \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \end{array}$$



Observa que nuevamente se aplicó la propiedad distributiva dos veces en los dos últimos renglones de la operación (los que están debajo de la línea horizontal). Así que, en resumen, se aplicó:

- Primero la propiedad distributiva del factor izquierdo sobre la suma del factor derecha.
- Después se aplicó nuevamente para cada uno de los sumandos que aparecen marcados en la última expresión de arriba con líneas punteadas y flechas hacia arriba.

Vamos a continuar con estas últimas observaciones para hacer más simplificado el proceso. Para el caso particular del producto de los polinomios $3x^2 + 5x + 6$ y $4x + 2$, y considerando en los dos primeros renglones de los siguientes cada uno de los puntos recién mencionados, se tiene que:

$$\begin{aligned}(3x^2 + 5x + 6)(4x + 2) &= [(3x^2 + 5x + 6)(4x)] + [(3x^2 + 5x + 6)(2)] = \\ &= [(3x^2)(4x) + (5x)(4x) + (6)(4x)] + [(3x^2)(2) + (5x)(2) + (6)(2)] = \\ &= (12x^3 + 20x^2 + 24x) + (6x^2 + 10x + 12) = \\ &= 12x^3 + 26x^2 + 34x + 12\end{aligned}$$

¹ Las multiplicaciones en las potencias explican el por qué “recorremos” un lugar hacia la izquierda el segundo renglón de multiplicaciones.



Observa que a partir del tercer renglón es prácticamente una suma de polinomios (incluyendo una reducción de términos semejantes).

En particular elevar un polinomio a una potencia n implica realizar una multiplicación del polinomio por sí mismo n veces. **Por ejemplo:**

$$(4x + 2)^3 = (4x + 2) (4x + 2) (4x + 2),$$

$$(3x^2 + 5x + 6)^n = (3x^2 + 5x + 6) (3x^2 + 5x + 6) \cdots (3x^2 + 5x + 6).$$

En resumen, si $P(x)$ y $Q(x)$ son los polinomios $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$ y

$Q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j = b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots + b_m x^m$, entonces la multiplicación de los polinomios queda como:

$$P(x) \cdot Q(x) = \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j x^j \right) = (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n) \cdot (b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots + b_m x^m) =$$

$$= (a_0 b_0) x^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x^1 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots + (a_n b_m) x^{n+m} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$



El resultado es 12 y el residuo es 13. Así que con la división podemos saber que estos números cumplen con la siguiente igualdad:

$$3\,637 = 302 \times 12 + 13.$$

Para los polinomios ocurre lo mismo. Si $P(x) = 3x^3 + 6x^2 + 3x + 7$ y $Q(x) = 3x^2 + 2$ entonces la división se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}
 \overline{) \begin{array}{l} 3x^3 + 6x^2 + 3x + 7 \\ - (3x^3 + 0x^2 + 2x) \\ \hline 0x^3 + 6x^2 + x + 7 \\ - (6x^2 + 0x + 4) \\ \hline 0x^2 + x + 3 \end{array}} \\
 \leftarrow \text{Cociente, } D(x) \\
 \leftarrow \text{Residuo, } R(x)
 \end{array}$$

Así que los polinomios buscados son $D(x) = x + 2$ y $R(x) = x + 3$ de tal manera que se cumple la expresión considerada:

$$3x^3 + 6x^2 + 3x + 7 = (3x^2 + 2)(x + 2) + (x + 3).$$

Dos observaciones al respecto de la división de polinomios:

- En primer lugar, para un par de polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, con $Q(x)$ diferente al polinomio nulo, la pareja de polinomios $D(x)$ y $R(x)$ resultantes es única.
- En segundo lugar, el grado de $R(x)$ es menor que el de $Q(x)$.

Como verás, la división queda determinada a partir del producto y la suma, por lo que no se van a necesitar que existan los inversos multiplicativos siempre. Cuando se necesite expresar la

división anterior en la forma de una **fracción racional** o $\frac{P(x)}{Q(x)}$ entonces esto quedaría como

sigue:



$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Observa que si la división es exacta (es decir, **$Q(x)$ divide a $P(x)$**) entonces $R(x) = 0$ y la expresión anterior queda reducida a

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) .$$

En este caso se dice que $Q(x) \cdot D(x)$ es una factorización de $P(x)$.

Las fracciones racionales las abordaremos nuevamente al final de esta unidad, pero ten presente que te las vas a encontrar muchas veces en tus cursos de Cálculo.

2.2. Productos notables

Los productos notables son casos de productos de polinomios en donde existe cierto patrón específico y entonces se pueden desarrollar en su forma general y así establecer un algoritmo para cada uno de ellos. Esto nos lleva a dos comentarios importantes que debes tomar en cuenta:

- Los productos notables son productos de polinomios, por lo que en cualquier caso se pueden desarrollar utilizando el algoritmo general para la multiplicación.
- La ventaja de aprenderse de memoria los algoritmos para los diferentes productos notables es que cuando se necesita desarrollar la multiplicación el proceso es más corto y expedito. En otras palabras, estos algoritmos se convierten en una herramienta para hacer más eficiente el trabajo algebraico.

Los productos notables son varios, pero haremos hincapié en esta parte de la unidad en tres de ellos:

- El cuadrado y el cubo de un binomio.
- El producto de dos binomios conjugados.
- El producto de dos binomios que tienen un término común.

Además, a partir de este momento comenzaremos también a considerar los polinomios de varias variables porque así te los encontrarás más adelante.



2.2.1. Cuadrado y cubo de un binomio

Como se mencionó previamente, un binomio al cuadrado o al cubo es lo mismo que multiplicar el binomio por sí mismo dos o tres veces, respectivamente. Considera un binomio general $(a + b)$, donde a y b pueden ser cualquier número real, cualquier monomio (de una o varias variables) o incluso cualquier polinomio (de una o varias variables). Con esto se hace el desarrollo correspondiente y la simplificación para el **binomio al cuadrado**:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Esto quiere decir que el primer término se obtiene elevando el primer término del binomio al cuadrado, el segundo es el doble del producto de los dos términos y finalmente el tercer término se obtiene elevando el segundo término del binomio al cuadrado.

Algo importante es que el resultado del binomio al cuadrado, es decir, las expresiones del tipo $a^2 + 2ab + b^2$ se les conocen como **trinomio cuadrado perfecto** y en la próxima sección las retomaremos para el proceso de factorización.

Observa los siguientes ejemplos:

$$[x^3 + (-3x)]^2 = (x^3)^2 - 6x^4 + (-3x)^2 = x^6 - 6x^4 + 9x^2.$$

$$[ab + (a^2 - 3)]^2 = (ab)^2 + 2ab(a^2 - 3) + (a^2 - 3)^2 = a^2b^2 + 2a^3b - 6ab + (a^4 - 6a^2 + 9) = a^4 + 2a^3b + a^2b^2 - 6a^2 - 6ab + 9.$$

Puedes ver el ejemplo que proporciona Julio Ríos en su video *Binomio al cuadrado* que está disponible en <https://youtu.be/o6PkQJEQql4>

Para el **binomio al cubo** el desarrollo quedaría como sigue:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a + b)^2a + (a + b)^2b = (a^2 + 2ab + b^2)a + (a^2 + 2ab + b^2)b = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$



Observa que los exponentes van decreciendo para uno de los términos y van aumentando para el otro. Los coeficientes aumentan y luego disminuyen. Así que dos ejemplos:

$$(x - 3y)^3 = x^3 + 3x^2(-3y) + 3x(-3y)^2 + (-3y)^3 = x^3 - 9x^2y + 9xy^2 - 27y^3.$$

$$(2x^2y + y)^3 = 8x^6y^3 + 12x^4y^3 + 6x^2y^3 + y^3.$$

Puedes ver el video *Cubo de un binomio* de Julio Ríos que está disponible en:

https://www.youtube.com/watch?v=8Ncm_ZsPrmQ

2.2.2. Binomios conjugados

Se dice que dos binomios son conjugados si son iguales excepto en que en uno de ellos un signo es diferente. **Por ejemplo** las siguientes dos parejas de binomios son conjugados: $(xy + 3)$ y $(xy - 3)$, así como $(a^2 - b^3)$ y $(-a^2 - b^2)$. Cuando se hace el producto de estos binomios y se simplifica el resultado lo que se obtiene es, de manera general, lo siguiente:

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= (a + b)a - (a + b)b = a^2 + ab - ab - b^2 = \\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Es decir, lo que se obtiene es la **diferencia de los cuadrados** de los términos de los binomios originales.

Dos ejemplos son: $(x - 3y)(x + 3y) = x^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2.$

$$(2x^2y + y)(2x^2y - y) = (2x^2y)^2 - y^2 = 4x^4y^2 - y^2.$$

Ahora **observa el video** *Suma por diferencia* de Julio Ríos que está disponible en:

<https://www.youtube.com/watch?v=xH0d1suuYsM>

2.2.3. Binomios que tienen un término común

También está el caso de que se multipliquen dos binomios en los que aparezca un término común como por ejemplo $(2x + 5y)$ y $(4x + 5y)$, donde el término común es $5y$. El planteamiento general es el siguiente:

$$\begin{aligned}(x + c)(x + d) &= (x + c)x + (x + c)d = x^2 + cx + dx + cd = \\ &= x^2 + (c + d)x + (cd).\end{aligned}$$

Como se puede ver, el primer término es el término común en los binomios elevado al cuadrado, el segundo término $(c + d)x$ es el mismo término común multiplicado por **la suma** de los términos no comunes en los binomios y el tercer término es **el producto** de los mismos términos.



Ahora observa dos ejemplos al respecto:

$$\begin{aligned}(x + 3)(x - 5) &= x^2 + (3 - 5)x + (3)(-5) = \\ &= x^2 - 2x - 15. \\ (4xy + y^3)(5 + y^3) &= (y^3)^2 + (4xy + 5)y^3 + (4xy)(5) = \\ &= y^6 + (4xy + 5)y^3 + 20xy.\end{aligned}$$

En el segundo ejemplo nota que el polinomio $4xy + 5$ no puede simplificarse más, así que se tiene que dejar de esa manera y no como en el primer ejemplo donde sí se pudo simplificar.

2.3. Factorización

La factorización es el proceso de encontrar los factores de algún número, en este caso, un polinomio. Recuerda que en la parte dedicada a la división de polinomios se mencionó que cuando el polinomio $P(x)$ es dividido de manera exacta por otro polinomio $Q(x)$ entonces se dice

que $Q(x) \cdot D(x)$ es una factorización de $P(x)$, donde $\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x)$

Lo anterior se planteó para polinomios de una sola variable, pero lo podemos ampliar para polinomios de varias variables y así aplicarlo en procedimientos más complejos que verás más adelante, como es la resolución de ecuaciones y en tus cursos de Álgebra lineal y Cálculo.

Al momento de buscar factores para polinomios se descubre que algunos de éstos pueden ser factorizados, pero otros tienen una estructura o una forma que permite establecer una relación con los procesos previos de los productos notables.

Por ejemplo, cuando se mencionó el producto notable **binomio al cuadrado** se dijo que su desarrollo produce un **trinomio cuadrado perfecto**. Esto quiere decir que si uno identifica que se tiene un trinomio cuadrado perfecto, entonces podemos hallar una factorización en forma de un binomio al cuadrado.

En la siguiente tabla aparece esta relación que si se lee de izquierda a derecha es un proceso de desarrollo de productos notables y si se lee a la inversa es un proceso de factorización:



Producto notable		Factorización
Binomio al cuadrado	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{desarrollando}} \\ \overleftarrow{\text{a} \quad \text{b} \quad \text{ab}} \end{array}$	Trinomio cuadrado perfecto
$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
Binomios conjugados	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{desarrollando}} \\ \overleftarrow{\text{a} \quad \text{b} \quad \text{ab}} \end{array}$	Diferencia de cuadrados
$(a + b)(a - b)$	=	$a^2 - b^2$
Binomios con un término común	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{desarrollando}} \\ \overleftarrow{\text{a} \quad \text{b} \quad \text{ab}} \end{array}$	Trinomio de la forma
$(x + c)(x + d)$	=	$x^2 + ax + b$

Las tres técnicas de factorización recién mencionadas las verás a continuación, pero primero se te mencionará el caso de cuando se tiene un polinomio y cada uno de sus términos tiene un factor común.

Considera, por ejemplo, el polinomio $-8x^2y - 4x^2 + 6xy^2 + 2xy + 10x$. Tras una breve inspección puedes detectar que todos sus términos tienen como factor común $2x$ por lo que puedes aplicar el axioma 5 de distributividad para hallar una factorización:

$$\begin{aligned} -8x^2y - 4x^2 + 6xy^2 + 2xy + 10x &= (2x)(-4xy) + (2x)(-2x) + (2x)(3y^2) + (2x)(y) + (2x)(5) = \\ &= 2x(-4xy - 2x + 3y^2 + y + 5). \end{aligned}$$

Ésta última expresión es una factorización de polinomio original y la técnica utilizada se le llama **factorización por factor común**. Para reforzar los conceptos mencionados, **puedes ver los siguientes videos:**

- Ríos, J. (2009) *Factor común*. Disponible en: <http://www.youtube.com/watch?v=LWYZSXsMAr8>
- Ríos, J. (2009) *Factor común por agrupación de términos*. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=uhN2eVLAEDw&t=29s>



2.3.1. Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es un polinomio de la forma

$$a^2 + 2ab + b^2.$$

Donde a y b pueden ser términos (monomios) o bien polinomios. Este hecho dificulta a veces su identificación, pero permite llevar a cabo una factorización en un binomio al cuadrado.

Por ejemplo los siguientes son polinomios que pueden ser identificados con la estructura de los trinomios cuadrados perfectos:

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x + 9, \\ & 16y^2 - 24wy + 9w^2, \\ & x^2 + 2xy + 2x + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2x(y + 1) + (y + 1)^2. \end{aligned}$$

Una vez identificada la estructura de trinomio cuadrado perfecto, entonces se puede proceder a factorizar considerando el proceso inverso al visto en el desarrollo del producto notable **binomio al cuadrado**:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Así que para cada uno de los casos de arriba se tienen las siguientes factorizaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= (x + 3)^2, \\ 16y^2 - 24wy + 9w^2 &= (3w - 4y)^2, \\ x^2 + 2x(y + 1) + (y + 1)^2 &= [x^2 + (y + 1)]^2. \end{aligned}$$

Observa que en el último ejemplo es muy complicado identificar que es un trinomio cuadrado perfecto si se toma el desarrollo simplificado que aparece más arriba, porque entonces se puede escribir directamente como:

$$x^2 + 2xy + 2x + y^2 + 2y + 1 = [x^2 + (y + 1)]^2.$$

Es por ello que la práctica es lo que resulta útil para la identificación adecuada.

Ahora **observa el video** *Factorización de un trinomio cuadrado perfecto* de Julio Ríos que está disponible en: <http://www.youtube.com/watch?v=1dvGz8vQCeU>

2.3.2. Diferencia de cuadrados

La diferencia de cuadrados es un polinomio de la forma $a^2 - b^2$, con a y b términos o polinomios. El producto notable que le corresponde es el de **binomios conjugados**, por lo que su factorización queda como sigue:



$$(a + b) (a - b).$$

Por ejemplo, los miembros izquierdos de las siguientes igualdades son diferencias de cuadrados y los derechos son sus respectivas factorizaciones en forma de diferencias de cuadrados:

$$\begin{aligned} 16x^2 - 81 &= (4x + 9) (4x - 9), \\ 9w^2 - 25y^2 &= (3w - 5y) (3w + 5y), \\ (3x + 2)^2 - (4y)^2 &= [(3x + 2) + 4y] [(3x + 2) - 4y]. \end{aligned}$$

Puedes observar como se hace una *Factorización: Diferencia de Cuadrados*, en el video de Julio Ríos que está disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=tABhBMtBmSY>

2.3.3. Trinomio de la forma $x^2 + ax + b$

El último caso que vamos a considerar es cuando se tiene un trinomio de la forma $x^2 + ax + b$.

En este caso el producto notable que le corresponde es el de **binomios con un término común**. El desarrollo que le corresponde es el siguiente:

$$(x + c) (x + d) = x^2 + (c + d)x + cd.$$

Esto quiere decir que $a = c + d$ y $b = cd$.

Un ejemplo de trinomio de esta forma es $x^2 + 11x + 30$. Entonces la idea es hallar dos números que sumados den 11, porque serán la suma $c + d$, y multiplicados den 30 porque serán el producto cd . La respuesta es 5 y 6, así que el trinomio de arriba se puede reescribir y factorizar como

$$x^2 + 11x + 30 = x^2 + (5 + 6)x + (5) (6) = (x + 5) (x + 6).$$

Otro ejemplo en el que aparecen los signos diferentes es el polinomio $x^2 - 5x - 84$. En este caso es necesario hallar un par de números que sumados den -5 y multiplicados den -84 . Estos números son -12 y 7 , por lo que la factorización queda como:

$$x^2 - 5x - 84 = x^2 + (-12 + 7)x + (-12)(7) = (x - 12) (x + 7).$$

Como verás, los signos influyen en los resultados y juegan un papel en la dificultad para identificar los términos involucrados.

Incluso podemos considerar ejemplos más difíciles de identificar que involucren a otras variables, como es el caso del polinomio $x^2 + (2y^2 - 3z)x - 6y^2z$, cuya manipulación y factorización quedaría como sigue:

$$x^2 + (2y^2 - 3z)x - 6y^2z = x^2 + (2y^2 - 3z)x + (2y^2) (-3z) = (x + 2y^2) (x - 3z).$$



Como ya se mencionó, será necesario que practiques para que desarrolles habilidades para identificar las formas de los polinomios que puedan factorizarse y así manipularlos adecuadamente.

Te invitamos a ver el video *Factorización de Trinomios de la forma $x^{2n}+bx^n+c$* de Julio Ríos que está disponible en: <http://www.youtube.com/watch?v=TZcUxb1gnDk>

Toma en cuenta que en el video aparece un caso general de exponentes $2n$ y n para los primeros términos y el que hemos expuesto en esto últimos párrafos es para cuando $n = 1$, es decir, para cuando el primer término del trinomio es 2 y el segundo es uno.

2.4. Gráficas de polinomios

Los polinomios, al igual que muchos otros objetos matemáticos, pueden representarse gráficamente y esta representación permite observar de otra manera sus propiedades, sus operaciones y las repercusiones que se tienen cuando se modifican sus parámetros. El cambio de representación y el observar las repercusiones de sus propiedades te permitirá también ampliar la comprensión al respecto y luego aplicar las habilidades desarrolladas para interpretar gráficas en casos como los que estudiarás en el Cálculo o en la aplicación de modelos de logística.

2.4.1. Sistema cartesiano

La representación de los polinomios se hace en el llamado **plano cartesiano**,² el cual es el mismo que el plano geométrico tradicional pero con la introducción de un marco de referencia necesario para aplicar el método analítico en el estudio de los objetos geométricos. Este marco de referencia son dos rectas no paralelas (generalmente perpendiculares y así las trabajaremos) que se llaman **ejes cartesianos**. El punto donde se cortan los ejes se establece como el origen, es decir, como el punto de inicio para medir las distancias pues los dos ejes funcionan como las rectas numéricas que se trabajan desde la Primaria.

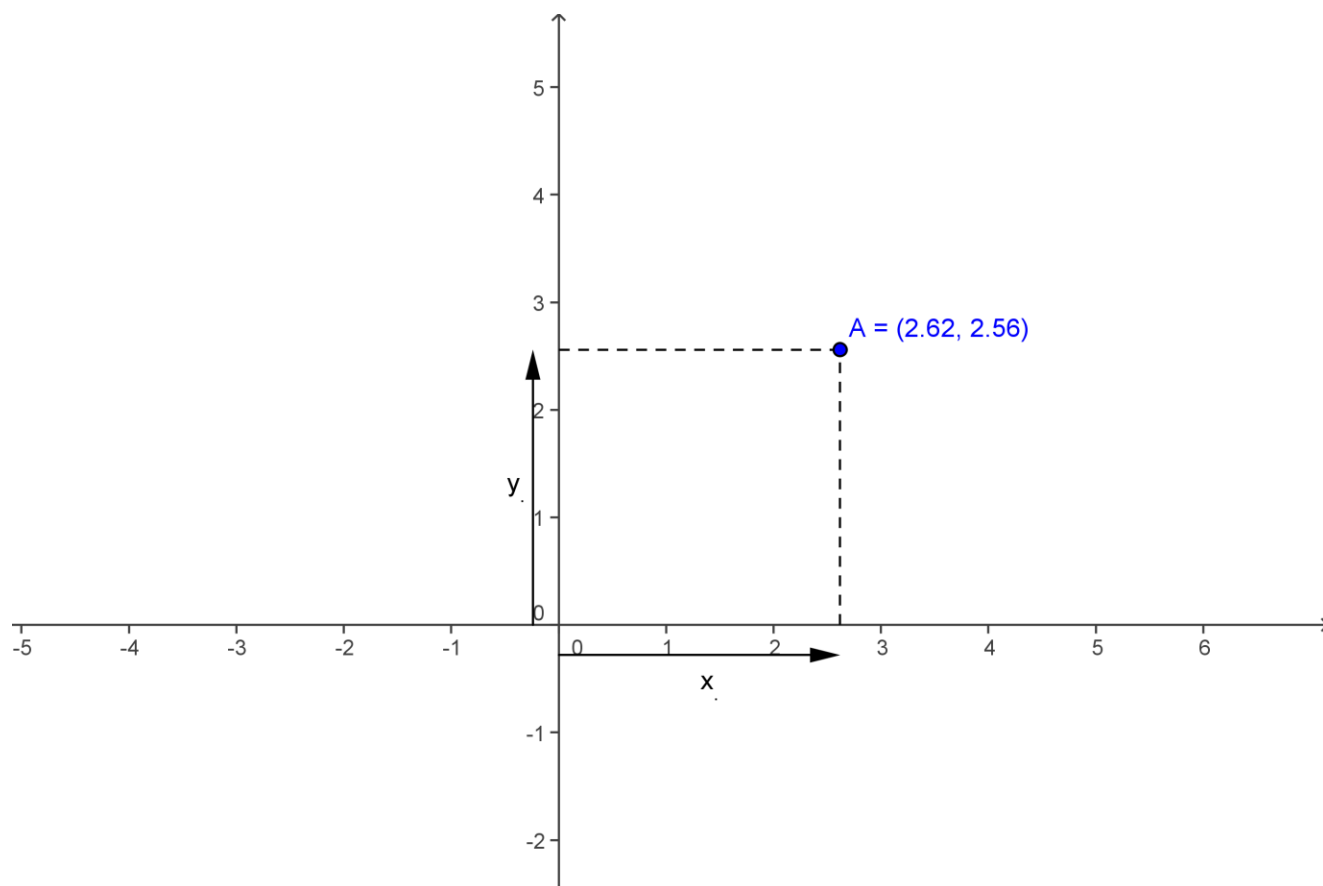
Tradicionalmente y por facilidad, un eje se dibuja de manera horizontal y el otro vertical. Al eje horizontal se le llama **eje de las abscisas** y al vertical **eje de las ordenadas**, siendo que al primero se le asigna la x como variable para representarlo (queda como **eje x**) y al segundo se le asigna la y (para ser el **eje y**). Hay que mencionar que las dos rectas mencionadas dividen al plano en cuatro regiones que se denominan **cuadrantes**, siendo el primero el que está en la parte superior derecha y luego siguiendo la dirección opuesta a las manecillas del reloj están los siguientes tres.

²El nombre hace referencia a René Descartes, un filósofo y matemático francés. Aunque en realidad Descartes no utilizó los ejes cartesianos en su trabajo, se le ha llamado así porque propuso el método analítico para estudiar los objetos geométricos. Este método llevó, inevitablemente, a considerar un marco de referencia que son los ejes.

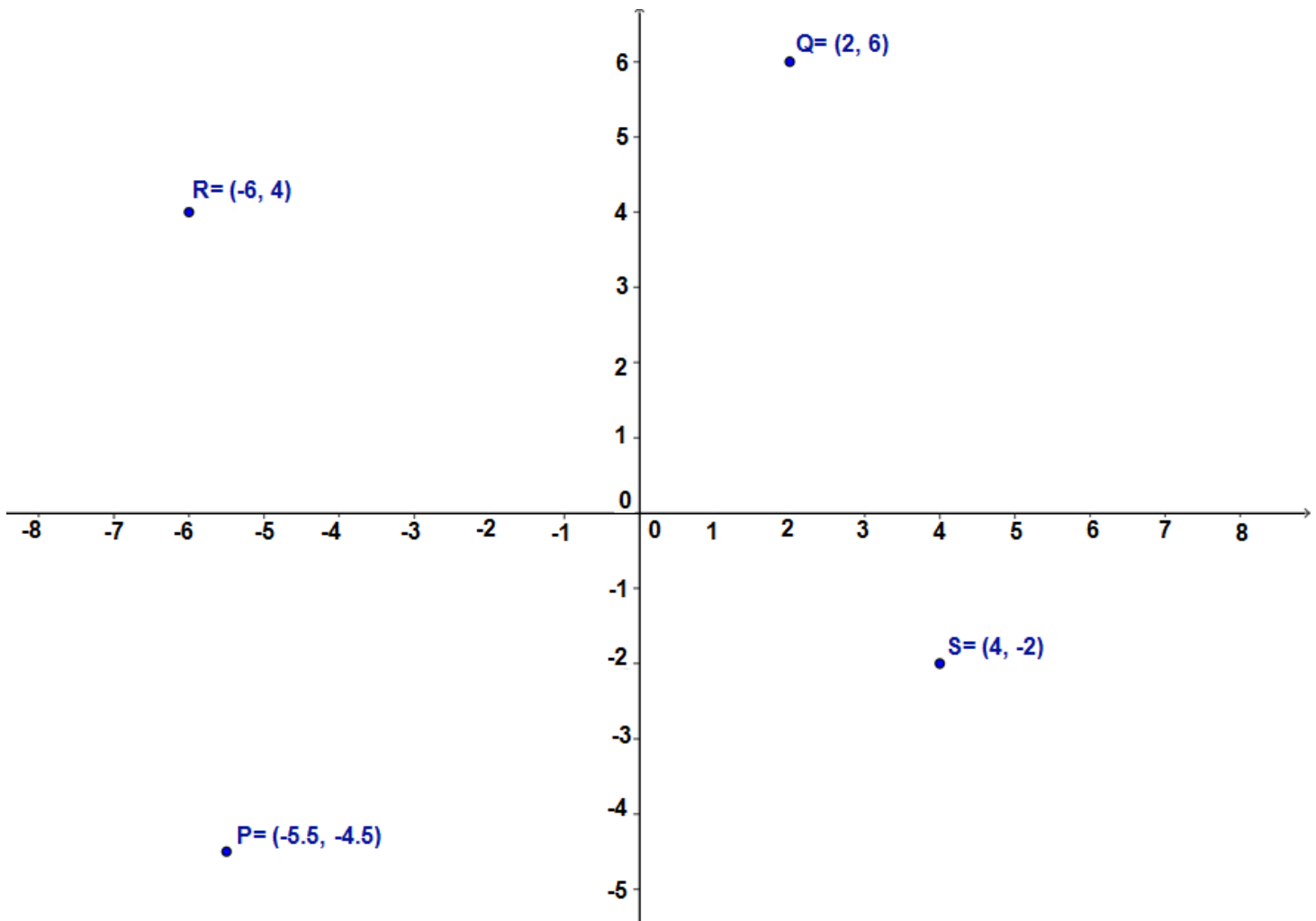


De esta manera cada punto en el plano se puede representar por una pareja **ordenada** de números y viceversa. El énfasis en la palabra “ordenada” se refiere a que el primer número de la pareja siempre corresponderá a la medida horizontal de la distancia desde origen al punto en consideración y el segundo número será la medida vertical de dicha distancia. Juntos, la pareja, son las coordenadas del punto.

Por ejemplo, en el dibujo de abajo se representan los ejes cartesianos del plano y un punto A. Sus coordenadas (2.62, 2.56) indican que se encuentra a 2.62 unidades a partir del origen hacia la derecha de manera horizontal y 2.56 unidades a partir del origen hacia arriba.



Por **ejemplo**, los puntos $P(-5.5, -4.5)$, $Q(2, 6)$, $R(-6, 4)$ y $S(4, -2)$ aparecen graficados a continuación:



Algo que le otorga mucha potencialidad a este tipo de representaciones gráficas de los objetos algebraicos es el hecho de que se pueden representar cosas como ecuaciones y funciones que gráficamente aparecen como rectas, curvas, circunferencias, etcétera. La idea básica es que en el caso de las ecuaciones, los puntos del plano que le corresponden son aquellos cuyas coordenadas satisfacen o hacen verdadera a la expresión algebraica y para el caso de las funciones son aquellos que cumplen con una regla que vincula a la segunda coordenada (la ordenada) con la primera (la abscisa).

Por ejemplo, a una ecuación del tipo $x^2 + y^2 = r^2$ le corresponde una circunferencia, porque sólo los puntos que están en una circunferencia hacen que la ecuación (como si fuese una proposición) sea verdadera como expresión numérica. Por otro lado, a una función del tipo $f(x) = ax^2$ le corresponde una parábola, porque existe una cierta relación establecida entre cada uno de los valores de la y (la función f) y los otorgados a la x .

En la siguiente sección se abordará las gráficas de unas funciones en particular que le corresponden a los polinomios de una sola variable.



2.4.2. Funciones polinomiales

Las gráficas de las funciones usualmente se “leen” (se grafican y se interpretan) de izquierda a derecha, siguiendo de hecho el orden en los números reales.³ Esto es lo usual porque los valores de x (que corresponden al eje de las abscisas o el eje x) son los que asignamos para que los valores de y queden establecidos.

Lo que vamos a graficar en esta sección de la unidad son las **funciones polinomiales** y no los polinomios en sí. Aunque la diferencia parece trivial no lo es en términos conceptuales: Un polinomio contiene una o varias variables a las que se les pueden o no asignar valores y obtenemos en todo caso un número. **Una función**, por el contrario, establece obligatoriamente la relación entre al menos dos variables, cada una de ellas pertenecientes a un conjunto, con la restricción de que a cada elemento del primer conjunto (en este caso los representados por x) le toca uno y sólo un elemento del otro conjunto (que serían representados por y). Los polinomios son objetos que se estudian como conjunto con propiedades que pueden ser operados mientras que las funciones son objetos en los que se estudian las relaciones entre variables.

Hecha la aclaración anterior, en términos prácticos pareciera que no hay mucha diferencia y en muchas ocasiones se confunden las dos cosas. Hay que aclarar que a partir de este momento sólo vamos a considerar los polinomios de una sola variable,⁴ así que podremos definir que si tenemos un polinomio de una sola variable como se definió previamente, entonces la **función polinomial** $p(x)$ quedaría como:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$
$$p(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n.$$

En los cursos de Cálculo estudiarás mucho más ampliamente las funciones (reales de variables reales) y verás que algunas son continuas para todos los valores de x ($\mathbb{R}$), es decir, que sus gráficas no tienen agujeros o rupturas, mientras que para otros casos sí existen estas discontinuidades en las gráficas porque las funciones no son continuas. El caso de las funciones polinomiales es el primero: para todos los valores de x siempre hay valores de y , así que estas funciones son continuas y no tienen rupturas en sus gráficas. Esta propiedad importante de las funciones facilita la gráfica y garantiza muchas propiedades que verás más adelante en tu carrera.

³ El término “usual” está entrecomillado porque existen otros sistemas de coordenadas que no se leen de esta manera ya que el orden de los números se representa de manera diferente en la gráfica.

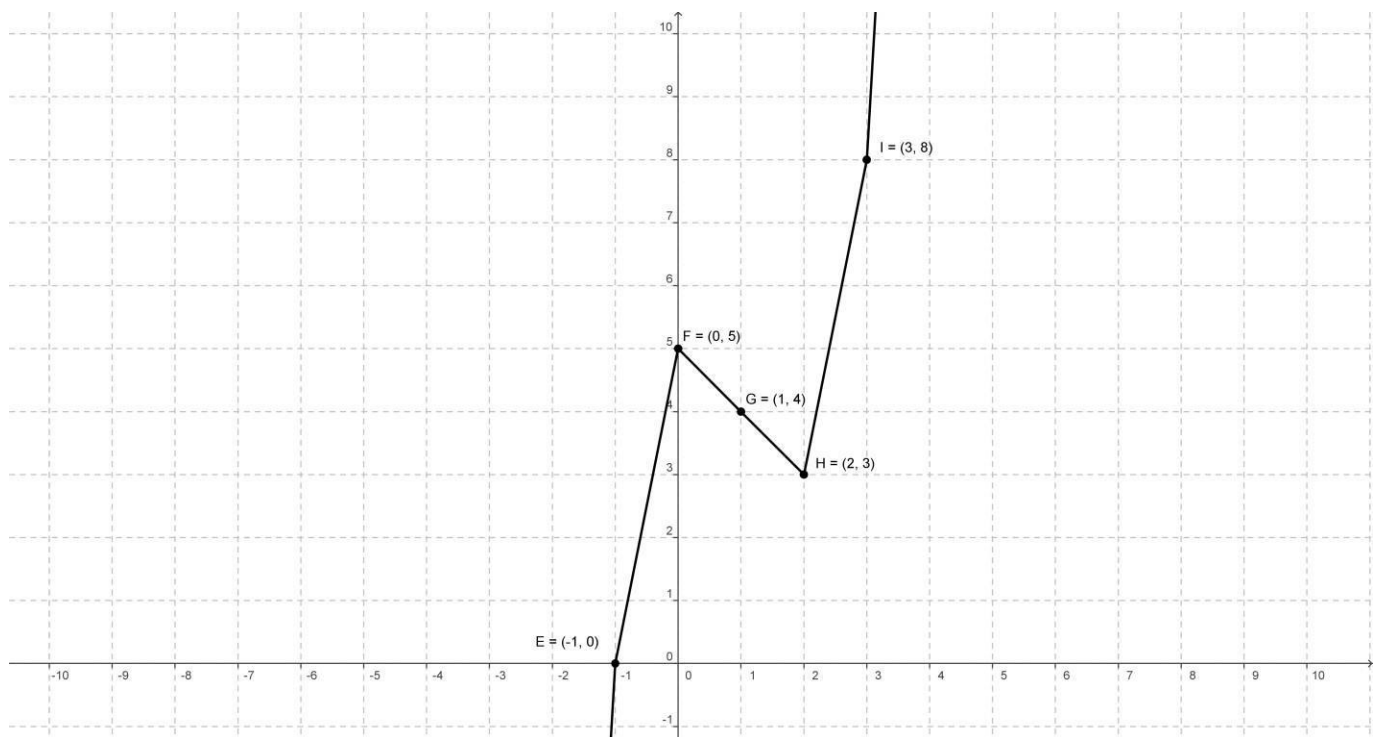
⁴ Si se consideran polinomios de dos variables entonces la gráfica de las funciones polinomiales no sería en el plano, sino en el espacio (dos dimensiones por las dos variables del polinomio y una dimensión por los valores que toman las funciones).



Así que aprovechando la continuidad podemos comenzar a esbozar algunas gráficas a mano. Para ello es necesario tener una hoja cuadrículada. El método más común es el tabulado y después trazar los resultados en el papel. Consideremos el polinomio $x^3 - 3x^2 + x + 5$, así que la tabla de valores quedaría como sigue:

Nombre	Valor de x	Operaciones	Valor de $p(x)$	Coordenadas
A	-5	$(-5)^3 - 3(-5)^2 + (-5) + 5$	-200	$(-5, -200)$
B	-4	$(-4)^3 - 3(-4)^2 + (-4) + 5$	-111	$(-4, -111)$
C	-3	$(-3)^3 - 3(-3)^2 + (-3) + 5$	-52	$(-3, -52)$
D	-2	$(-2)^3 - 3(-2)^2 + (-2) + 5$	-17	$(-2, -17)$
E	-1	$(-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) + 5$	0	$(-1, 0)$
F	0	$(0)^3 - 3(0)^2 + (0) + 5$	5	$(0, 5)$
G	1	$(1)^3 - 3(1)^2 + (1) + 5$	4	$(1, 4)$
H	2	$(2)^3 - 3(2)^2 + (2) + 5$	3	$(2, 3)$
I	3	$(3)^3 - 3(3)^2 + (3) + 5$	8	$(3, 8)$
J	4	$(4)^3 - 3(4)^2 + (4) + 5$	25	$(4, 25)$
K	5	$(5)^3 - 3(5)^2 + (5) + 5$	60	$(5, 60)$

Con estos datos se ubican los puntos en el plano cartesiano y, como existen valores intermedios entre cada uno de los puntos (por el axioma de completitud de $\mathbb{R}$ y de que como función continua, su gráfica no puede tener “agujeros” la gráfica), lo común es unir los puntos con segmentos, así que el resultado es una gráfica como sigue:



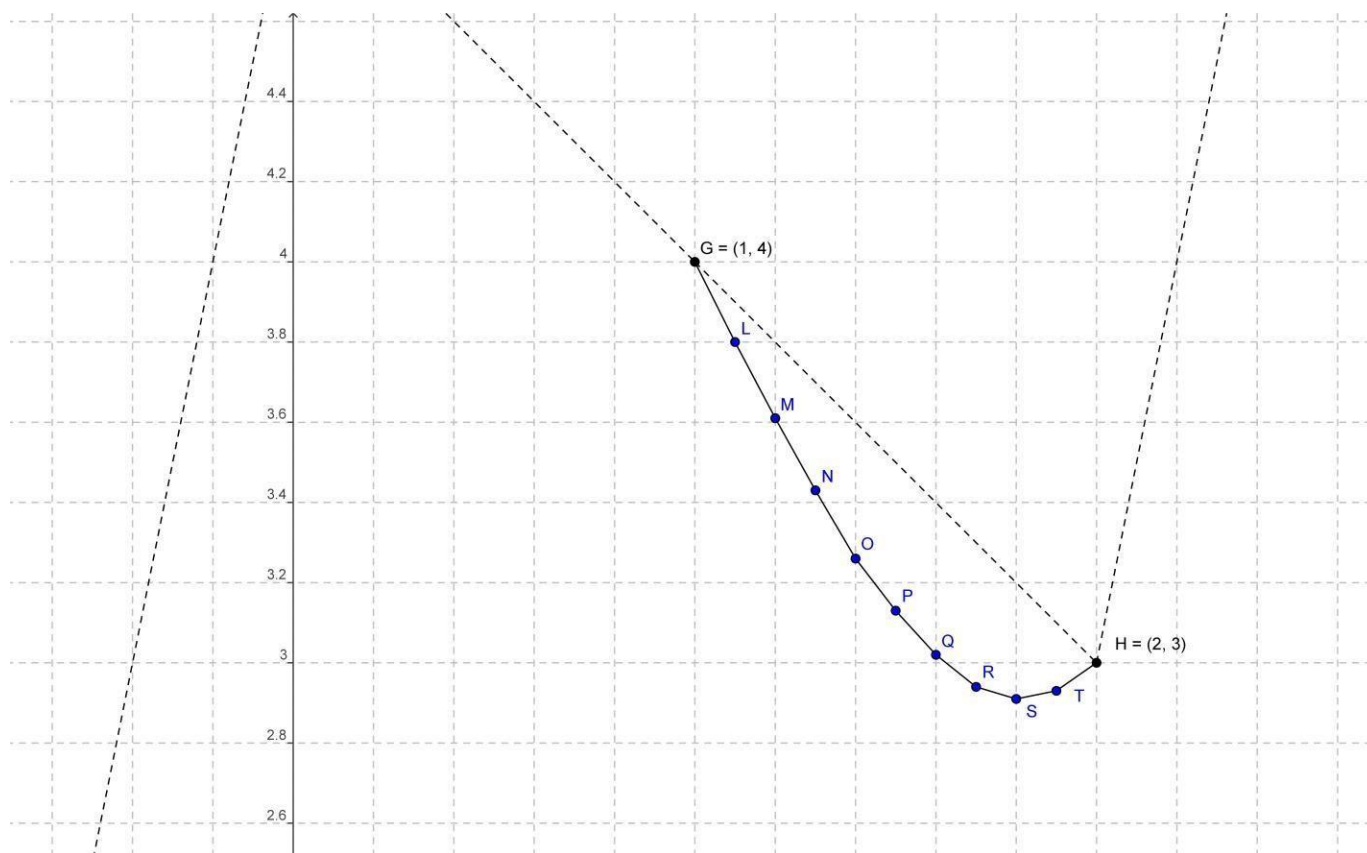
Algunos puntos quedaron fuera de la hoja, así que concentrémonos en los que sí aparecieron. ¿Observas que los puntos graficados no siguen un patrón lineal?, entonces queda la pregunta si realmente entre cada pareja de puntos la gráfica es un segmento de recta. Veamos un acercamiento entre el 1 y el 2. Para los valores de x y de y se obtiene la siguiente tabla (sólo aparecen las coordenadas):

Punto	Coordenadas
L	(1.10,3.80)
M	(1.20,3.61)
N	(1.30,3.43)
O	(1.40,3.26)
P	(1.50,3.13)

Punto	Coordenadas
Q	(1.60,3.02)
R	(1.70,2.94)
S	(1.80,2.91)
T	(1.90,2.93)



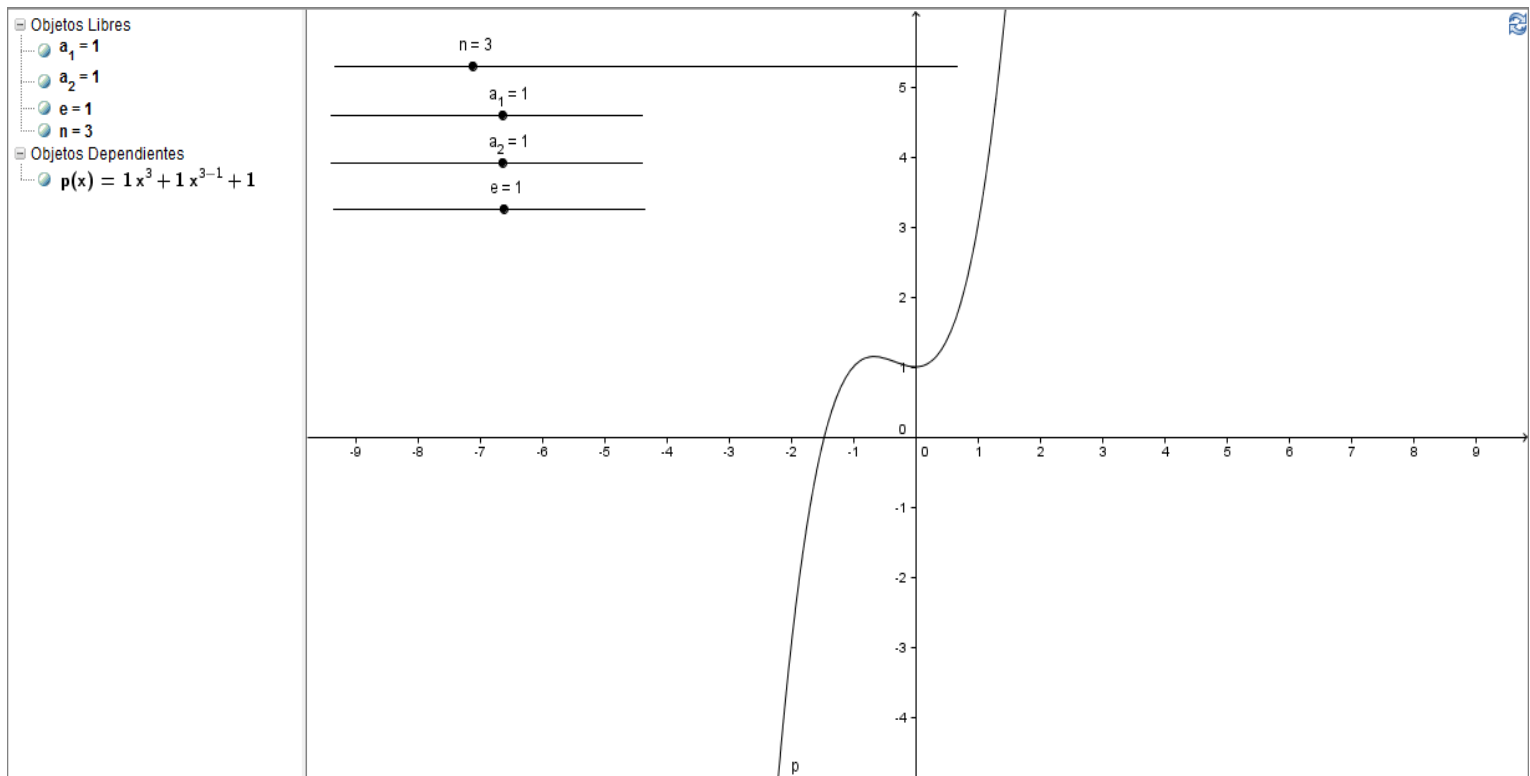
Y entonces la gráfica de la función polinomial en ese intervalo (de 1 a 2) quedaría más como:



En punteado aparecen los segmentos de la primera gráfica, así que puedes observar que hay una diferencia entre la primera gráfica y la última. De hecho, incluso se nota que el punto más bajo en la gráfica (en ese intervalo) no está en el punto (2,3), sino más bien cercano al (1.8, 2.91). Con esto podríamos pensar que la gráfica en realidad no está compuesta de segmentos de recta, pues entre más cercanos se grafiquen los puntos mejor se irá delineando una línea curva de la gráfica de la función. Esto no quiere decir que graficar a mano y tabulando sea un trabajo inútil. Si bien carece de algo de exactitud, sí proporciona un esbozo y una idea rápida.

En lo sucesivo **vamos a utilizar una herramienta** para hacer algunas exploraciones y actividades. Esta herramienta es un programa de computadora, basado en Java, que se denomina **Geogebra**. Para facilitar su uso e instalación descarga los siguientes documentos que se encuentran disponibles en la sección *Material de apoyo* del aula virtual.

- ✓ Guía para instalar Geogebra
- ✓ Manual de usuario Geogebra



Esta aplicación, grafica una función polinomial de la forma $p(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + e$. Los valores de los coeficientes y los exponentes se controlan con los deslizadores que están arriba a la izquierda. Utilizando el ratón muévelos y observa cómo cambian los valores en la vista algebraica a la izquierda y la gráfica en la ventana de la derecha. Al final de estos movimientos da clic en el icono  para que la pantalla quede nuevamente como al inicio.

Sin modificar los valores de los coeficientes (a_1 , a_2 y e) modifica el valor del exponente n y observa lo que ocurre. Te darás cuenta de que al variar los valores desde 1 hasta 10 se comienza con una recta, luego una parábola, después una curva cúbica y así sucesivamente. Dos sucesos puedes observar:

- Si el grado de la función polinomial es **impar** entonces la gráfica aparece abajo a la izquierda y desaparece arriba a la derecha. Si, por el contrario, el grado es **par** entonces la gráfica aparece y desaparece arriba.
- Entre mayor sea el grado de la función más “aplanada” es la parte central de la gráfica.

Deja el valor del exponente fijo y cambia los valores del coeficiente del término de mayor grado (a_1). Observa que en general se mantiene la forma de la gráfica, pero al cambiar el signo del coeficiente cambia la orientación de la gráfica:

- Si n es par y a_1 es positivo entonces la gráfica es algo semejante a una “U”. Si, por el contrario, a_1 es negativo entonces la U se invierte.



- Si n es impar y a_1 es positivo la gráfica es como antes (va de abajo a la izquierda a arriba a la derecha). Si a_1 es negativo entonces la gráfica se invierte y va de arriba hacia abajo.

Finalmente, el último coeficiente se llama e porque es el término independiente. Al modificarlo observarás que la gráfica sube y baja con respecto a los ejes cartesianos.

Al igual que en el caso anterior hay algunos deslizadores para graficar una función polinomial de quinto grado que tiene coeficientes racionales:

$$p(x) = a \left(\frac{1}{10} x^5 - \frac{55}{100} x^4 - \frac{17}{100} x^3 + \frac{885}{1000} x^2 - \frac{9}{100} x + e \right),$$



a es un número por el que se multiplica todo el polinomio y e , nuevamente, es el término independiente.

Manipula los valores de a y observa que el resultado que la gráfica se alarga verticalmente entre más crece su valor. Cuando decrece la gráfica de la función se convierte en una recta horizontal ($p(x) = 0$) y, finalmente, cuando se vuelve negativo su valor se invierte su forma y se vuelve a alargar conforme decrece lo más posible.

El deslizador del medio que controla el valor de k está ligado al valor de x . **Manipúlalo y verás cómo cambia** la regla de correspondencia (en la vista algebraica) a la forma:

$$p(x) = a \left(\frac{1}{10}(x+k)^5 - \frac{55}{100}(x+k)^4 - \frac{17}{100}(x+k)^3 + \frac{885}{1000}(x+k)^2 - \frac{9}{100}(x+k) + e \right).$$

Además, al manipularlo la gráfica no cambia de forma y tamaño, sino sólo se desplaza lateralmente de acuerdo al signo del valor de k . Observa que cada uno de los coeficientes y los exponentes afectan tanto a x como a k .

En resumen:

- El término independiente hace que la gráfica se traslade verticalmente.
- Sustituir x por $(x + k)$ hace que la gráfica se traslade horizontalmente.

Ahora vas a trabajar con Geogebra para sumar funciones polinomiales pero introducidas por ti mismo. Puedes utilizar el programa si has podido instalarlo. Esta opción te permite trabajarlo en línea (directamente), pero no puedes guardar archivos y si no aparece la vista algebraica se puede activar con las teclas Ctrl+Mayús+A o en el menú **Vista**.

Introduce dos funciones polinomiales:

$$p(x) = \frac{1}{1000}x^4 + \frac{1}{500}x^3 - \frac{103}{1000}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{10},$$

$$q(x) = \frac{1}{1000}x^5 + \frac{1}{200}x^4 - \frac{53}{1000}x^3 - \frac{229}{1000}x^2 + \frac{13}{250}x + \frac{28}{125},$$



las cuales se escriben $p(x)=1/1000x^4+1/500x^3-103/1000x^2-1/5x+3/10$ y $q(x)=1/1000x^5+1/200x^4-53/1000x^3-229/1000x^2+13/250x+28/125$, respectivamente.

Utilizando el botón derecho sobre cada una de las gráficas puedes modificar sus propiedades y cambiarles el color para distinguirlas.

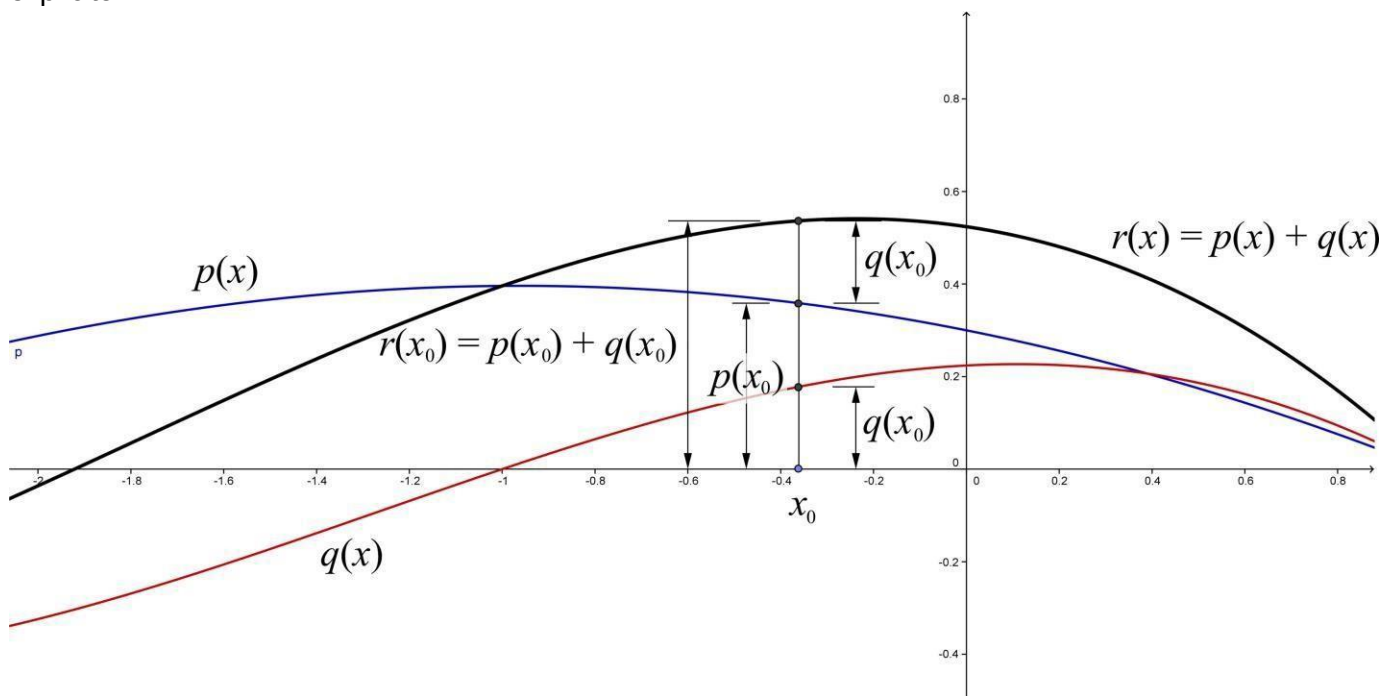
Ahora prueba a introducir en la barra de entrada la expresión $r(x) = p(x) + q(x)$, que representa la suma de las dos funciones polinomiales. La gráfica que resulta es la misma que si hiciéramos el proceso analítico de sumar las dos funciones que es como sumar dos polinomios:

$$\begin{aligned}
 p(x) + q(x) &= \left(\frac{1}{1000}x^4 + \frac{1}{500}x^3 - \frac{103}{1000}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{10} \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{1000}x^5 + \frac{1}{200}x^4 - \frac{53}{1000}x^3 - \frac{229}{1000}x^2 + \frac{13}{250}x + \frac{28}{125} \right) + \\
 &= \frac{1}{1000}x^5 + \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{200} \right)x^4 + \left(\frac{1}{500} - \frac{53}{1000} \right)x^3 + \left(-\frac{103}{1000} - \frac{229}{1000} \right)x^2 + \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{5} + \frac{13}{250} \right)x + \left(\frac{3}{10} + \frac{28}{125} \right) \\
 &= \frac{1}{1000}x^5 + \frac{3}{500}x^4 - \frac{51}{1000}x^3 - \frac{83}{250}x^2 - \frac{37}{250}x + \frac{131}{250}
 \end{aligned}$$

En términos gráficos lo que resulta es añadir (o quitar, porque lo que está debajo del eje horizontal es valor negativo).



Por ejemplo, la siguiente imagen es un acercamiento de la suma anterior donde se hace esto explícito:

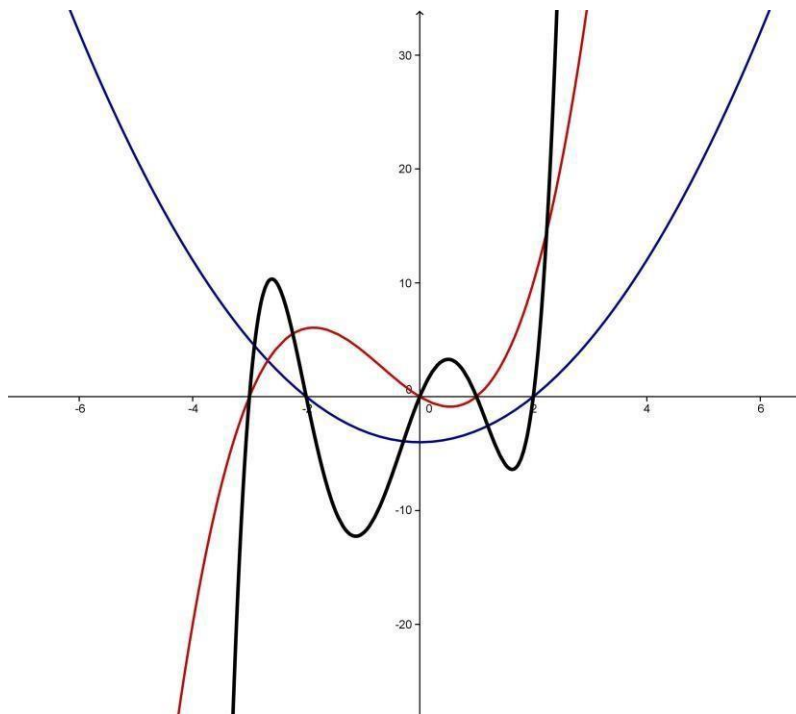


En el aula virtual encontrarás una aplicación de Geogebra que tiene graficadas las funciones polinomiales recién mencionadas. Desliza el punto x_0 (de color morado) hacia los lados para asignarle diversos valores y observa cómo se va calculando la suma de las funciones de manera dinámica.

El caso del producto de funciones polinomiales es un poco más complejo, porque no es sólo añadir o quitar distancias. Consideremos dos polinomios relativamente sencillos $p(x) = x^2 - 4$ y $q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$. El producto $r(x)$ queda como sigue analíticamente:

$$r(x) = p(x) \cdot q(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 2x^2 - 3x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 12x.$$

Como la primera función es de segundo grado y la otra es de tercer grado el producto es de quinto grado (la suma de los grados). Al graficar las tres funciones en Geogebra queda lo siguiente ($p(x)$ está en azul, $q(x)$ en rojo y $r(x)$ en negro):



Como verás un factor produce una gráfica en forma de parábola (la azul) y otra en forma de cúbica (la roja), pero el producto tiene una gráfica más compleja.

Algo que puedes observar son los cortes con el eje horizontal. La gráfica de $p(x)$ corta dos veces este eje y la gráfica de $q(x)$ lo hace tres veces. Observa que la gráfica de $r(x)$ corta el eje cinco veces, una por cada vez que cualquiera de las otras dos gráficas cortan el eje. Esto es porque un corte con el eje horizontal quiere decir que la función vale cero ($p(-2) = 0$ por ejemplo) y al multiplicarla por otra función (cualquiera que sea su valor) se obtiene cero también (así que $r(-2) = 0$).

En el aula virtual, te encontrarás una aplicación de Geogebra que tiene graficadas las funciones polinomiales recién mencionadas. Desliza el punto x_0 (de color morado) hacia los lados para que asignarle diversos valores y observa cómo se va calculando el producto de las funciones de manera dinámica.

La última operación con las funciones polinomiales también puede provocar problemas. Ésta es la división.

Como ya se mencionó en la sección anterior de esta unidad, no todas las divisiones son exactas en los polinomios porque no todos tienen inverso multiplicativo. He ahí la importancia de identificar que los polinomios, junto con las dos operaciones básicas, forman un anillo a diferencia de los números reales que forman un campo. Esto tiene como consecuencia que no podemos expresar la división de polinomios, ni de funciones polinomiales, con otro polinomio como tal y entonces nos referiremos a **funciones racionales** que tienen la forma:

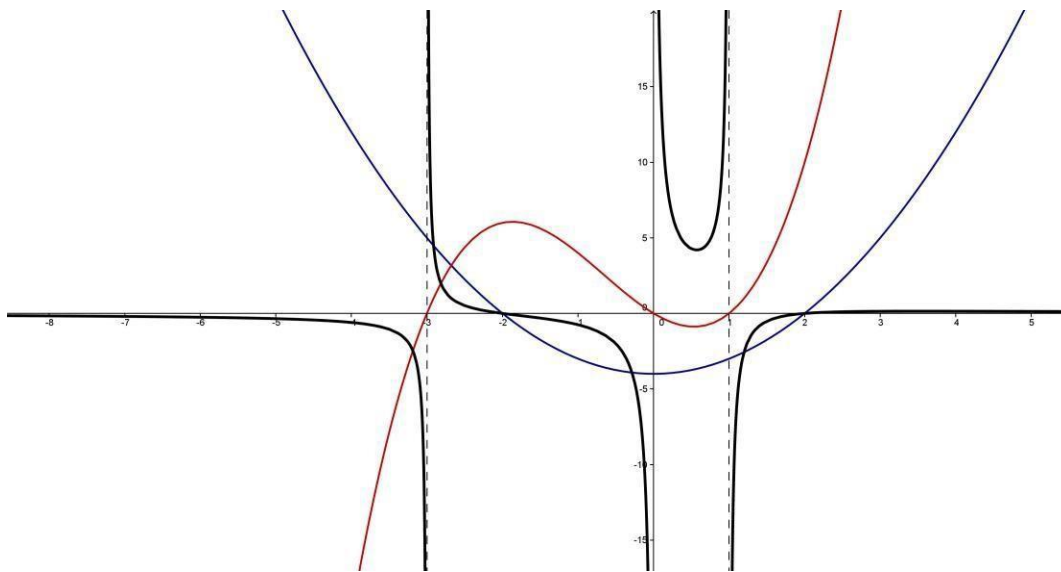


$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de una variable.

Aquí hay que tener un poco de cuidado porque cuando $Q(x_0) = 0$, para algún valor x_0 , resultará que $r(x)$ no estará definida (¿recuerdas el axioma 9?) y entonces la gráfica tendrá un agujero o una ruptura. En otras palabras, muchas de estas funciones no son continuas y el número de discontinuidades dependerá del número de valores de x que hagan que $Q(x_0) = 0$.

La siguiente gráfica es de la función racional $r(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 - 3x}$:



En color rojo está la gráfica del numerador $p(x) = x^2 - 4$, en azul está la gráfica del denominador $q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ y en negro está la gráfica de $r(x)$. Como puedes ver, la gráfica roja corta tres veces el eje horizontal y en esos puntos la gráfica negra tiene discontinuidades.

En esta gráfica aparecen unas rectas que se les denominan asíntotas. Éstas son rectas a las que se aproxima la gráfica de la función $r(x)$ pero no las llega a tocar (aunque lo parezca). En el ejemplo particular que se tomó hay tres **asíntotas verticales** que son el **eje y** y las dos rectas punteadas. Estos son los casos en que el valor del denominador se hace 0 y entonces su gráfica corta el eje horizontal como recién se mencionó, ocasionando que la división de la función racional no esté definida.



La otra recta que es **asíntota horizontal** es el eje x . Como podrás ver en los dos extremos de la gráfica pareciera que ésta se acerca a este eje. Lo que ocurre es que conforme el denominador crece (porque es de grado 3 y el numerador es de grado inferior) el resultado de la función se hace cada vez más pequeño pero nunca llega a cero.

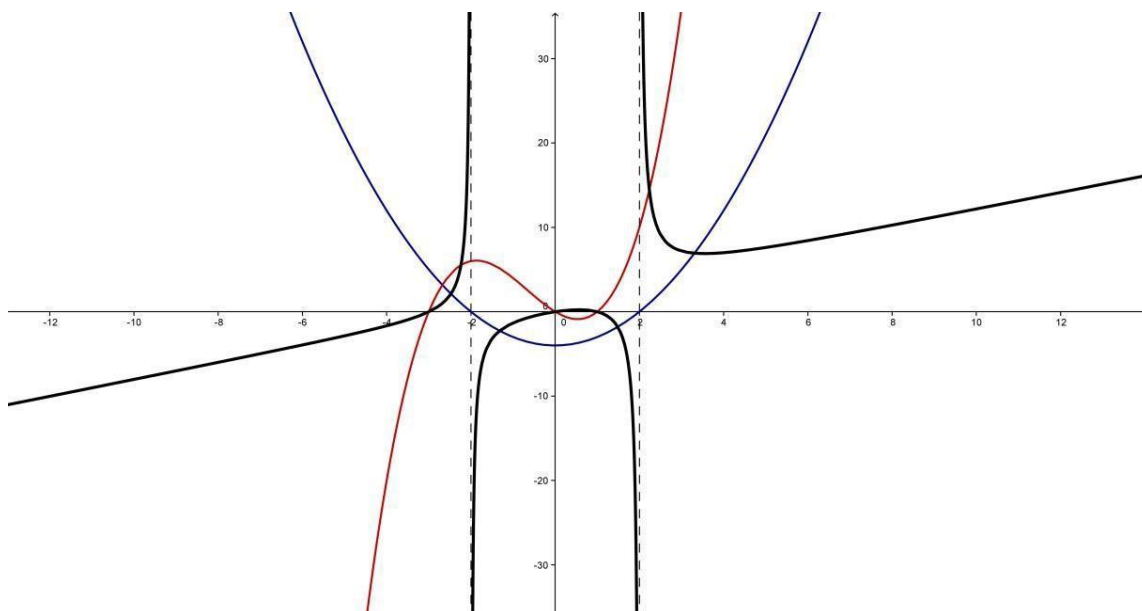
Se ha mencionado qué ocurre cuando el denominador toma el valor de 0, pero ¿qué ocurre cuando es el numerador el que lo toma? En la gráfica de arriba es preguntarse ¿qué pasa con la gráfica negra cuando la gráfica azul corta el eje horizontal? Es relativamente fácil que vas la respuesta: En los puntos donde la gráfica azul corta dicho eje la gráfica negra también lo hace. Esto ocurre porque si el numerador de una fracción es 0 entonces el valor de la fracción también es 0.

Como otro ejemplo consideremos el caso de invertir los polinomios recién considerados para ver

qué ocurre con la función $s(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 4}$. Algunas observaciones antes de poner su gráfica:

- Esta función tiene un polinomio de mayor grado en el numerador, por lo que se dijo sobre la asíntota horizontal puede variar.
- Se puede suponer que cortará el eje horizontal en tres ocasiones, pues son las veces que la función del numerador corta dicho eje.
- Se puede suponer que tendrá dos discontinuidades, pues son las veces que la función del denominador corta el eje x y se hace cero.

Veamos la gráfica (en rojo está la del numerador $q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$, en azul está la del denominador $p(x) = x^2 - 4$ y en negro está la de $s(x)$):





El estudio de este tipo de funciones (valores, características, propiedades) lo verás con mayor profundidad en tu curso de Cálculo.

Cierre de la unidad

A partir de las propiedades que observaste en la unidad anterior se amplió el espectro de objetos a considerarse en Álgebra. De esta manera pasaste de estudiar conjuntos de números con operaciones definidas a estudiar conjuntos de expresiones algebraicas particulares como son los polinomios, con sus operaciones definidas y algunas propiedades.

El estudio de los polinomios como estructura algebraica te permite ir sentando las bases para su aplicación sistematizada en otros momentos como es la resolución de ecuaciones y cursos más avanzados de tu carrera. De esta manera se abordaron los algoritmos de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) estableciendo el paralelismo entre los polinomios y los números para darle sentido al uso de los procesos presentados.

Además se abordaron dos aspectos importantes del estudio de los polinomios y la aplicación como herramientas matemáticas. Estos aspectos son el uso de los productos notables y las técnicas de factorización. Estas herramientas algebraicas tienen una gran aplicación porque se pueden convertir en algoritmos de rápido uso para abordar la resolución de problemas de segundo grado y de sistemas de ecuaciones, además de que en los cursos de Cálculo y de Álgebra Lineal podrán ser explotados.

En la parte final de la unidad se abordaron las representaciones gráficas de los polinomios a través de las funciones polinomiales en el plano cartesiano. Esta representación te permitió identificar propiedades de los polinomios y las consecuencias de la modificación de sus parámetros. El uso de un *software* dinámico permite esbozar muchos casos de manera más o menos rápida y estudiar lo que ocurre cuando también se suman, se multiplican y se dividen las funciones. Este estudio establece las bases para un análisis visual de las propiedades y para el estudio posterior de las funciones y de los procesos de modelación en cursos como los de Cálculo.



Para saber más

Mucho de lo estudiado en esta unidad, requiere que le dediques más tiempo para desarrollar habilidades para el manejo de algoritmos, siempre teniendo consciencia de lo que se está haciendo, para ello te recomendamos los siguientes materiales relacionados con los temas de esta segunda unidad:

Ríos, J. (2009). *Álgebra* [Archivo de video]. *YouTube*.
<https://www.youtube.com/playlist?list=PL9B9AC3136D2D4C45>

Para que puedas ver más ejemplos y ejercicios relacionados con el tema 2.1.1. Suma y resta, consulta:

- Las páginas 6 a 10 del libro *Álgebra* de Rees y Sparks.
- Las páginas 169 a la 172 del libro *Álgebra* de Elena de Oteyza y sus colegas
<https://books.google.com.mx/books?id=we3f-zkpAesC&printsec=frontcover&dq=%C3%A1lgebra.+oteyza&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjj8gfQy6TnAhVQVK0KHbAkDiAQ6wEINDAB#v=onepage&q=%C3%A1lgebra.%20oteyza&f=false>
- Las páginas 275 a la 280 del libro *Álgebra intermedia* de Gustafson y Frisk.

Para que puedas ver más ejemplos y ejercicios relacionados con el tema 2.1.2. Multiplicación, consulta:

- Las páginas 11 a 14 del libro *Álgebra* de Rees y Sparks.
- Las páginas 172 a la 178 del libro *Álgebra* de Elena de Oteyza y sus colegas, disponible
<https://books.google.com.mx/books?id=we3f-zkpAesC&printsec=frontcover&dq=%C3%A1lgebra.+oteyza&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjj8gfQy6TnAhVQVK0KHbAkDiAQ6wEINDAB#v=onepage&q=%C3%A1lgebra.%20oteyza&f=false>
- Las páginas de la 282 a la 284 del libro *Álgebra intermedia* de Gustafson y Frisk.

Para que puedas ver más ejemplos y ejercicios relacionados con el tema 2.1.3. División, consulta:

- Las páginas 15 a 17 del libro *Álgebra* de Rees y Sparks.
- Las páginas 244 a la 247 del libro *Álgebra* de Elena de Oteyza y sus colegas, disponible



en <https://books.google.com.mx/books?id=we3f-zkpAesC&printsec=frontcover&dq=%C3%A1lgebra.+oteyza&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjj8gfQy6TnAhVQVK0KHbAkDiAQ6wEINDAB#v=onepage&q=%C3%A1lgebra.%20oteyza&f=false>

Para reforzar los subtemas 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3, te invitamos a que consultes ejemplos y realices ejercicios de los siguientes libros:

- El capítulo 2 del libro *Álgebra* de Rees y Sparks.
- El capítulo 7 (secciones 7.1 a 7.5) del libro *Álgebra* de Elena de Oteyza y sus colegas, disponible en <https://books.google.com.mx/books?id=we3f-zkpAesC&printsec=frontcover&dq=%C3%A1lgebra.+oteyza&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjj8gfQy6TnAhVQVK0KHbAkDiAQ6wEINDAB#v=onepage&q=%C3%A1lgebra.%20oteyza&f=false>

Finalmente te invitamos a que consultes ejemplos y realices ejercicios de los siguientes libros:

- El capítulo 2 del libro *Álgebra* de Rees y Sparks.
- El capítulo 7 (secciones 7.6 a 7.12) del libro *Álgebra* de Elena de Oteyza y sus colegas, disponible en <https://books.google.com.mx/books?id=we3f-zkpAesC&printsec=frontcover&dq=%C3%A1lgebra.+oteyza&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjj8gfQy6TnAhVQVK0KHbAkDiAQ6wEINDAB#v=onepage&q=%C3%A1lgebra.%20oteyza&f=false>



Fuentes de consulta

Básica

- Cárdenas, Humberto; Lluís, Emilio; Raggi, Francisco y Tomás, Francisco (2007). *Álgebra superior*. México: Editorial Trillas.
- Gustafson, R. y Frisk, P. (2005). *Álgebra intermedia*. México: Thomson.
- Oteyza, Elena, et al. (2003). *Álgebra*. México: Pearson Educación. Disponible parcialmente: <https://books.google.com.mx/books?id=we3f-zkpAesC&printsec=frontcover&dq=%C3%A1lgebra.+oteyza&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwii8gfQy6TnAhVQVK0KHbAkDiAQ6wEINDAB#v=onepage&q=%C3%A1lgebra.%20oteyza&f=false>
- Rees, Paul K. y Sparks, Fred W. (1998). *Álgebra*. México: Reverté S.A. de C.V.
- Vázquez Sánchez, Agustín (2005). *Fundamentos de geometría analítica*. México: Thomson.
- Lovaglia, Florence M.; Elmore, Merritt A. y Conway, Donald (1972). *Álgebra*. México: Harla.

Complementaria

- Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (12ª ed.). Cengage Learning.
<https://www.udocz.com/apuntes/62863/algebra-y-trigonometria-con-geometria-analitica-swokowski-12th>
- Courant, Richard y Robbins, Herbert (2002). *¿Qué son las matemáticas?* México: Fondo de Cultura Económica.
- Meserve, Bruce E. y Sobel, Max A. (1978). *Introduction to mathematics*. Nueva Jersey, EEUU: Prentice-Hall.
- Lehmann, Charles H. (1989). *Geometría analítica*. México: Editorial Limusa.