Ciencias Exactas, Ingeniería y Tecnología

Ingeniería en Logística y transporte

1er. Semestre

Unidad Didáctica:
Álgebra

Unidad 3. Ecuaciones

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Presentación de la unidad

En las dos unidades anteriores abordaste temas relacionados con los números reales, mismos que usamos en la vida diaria y con los que trabajarás en otros cursos de tu formación profesional. Estudiaste sus propiedades y se hicieron explícitas las razones de cómo se utilizan y cómo se llevan a cabo los algoritmos que se usan para hacer operaciones con ellos.

Estudiaste los objetos algebraicos llamados polinomios como miembros de un conjunto que también puede ser operado y que tiene propiedades semejantes a los números. Estos objetos se estudiaron para desarrollar algunas herramientas útiles para el manejo algebraico en tu formación subsecuente.

En esta tercera unidad se abordarán las ecuaciones, sus propiedades y algunos procedimientos para resolverlas. Se aplicarán, como herramientas las propiedades de los números y de los polinomios para así plantear expresiones algebraicas que involucren igualdades.

Las ecuaciones son el primer paso para comenzar a modelar, a un nivel básico, algunas situaciones que se presentan en tu desarrollo personal y profesional para así llevar a cabo estudios y análisis sistemáticos de las situaciones que te permitan hallar vías de solución de una manera analítica y razonada.

Así pues, comenzaremos con las ecuaciones lineales y posteriormente con las cuadráticas, pero también estudiaremos situaciones en las que se necesitan más de una ecuación para analizar una situación en particular, por lo que los sistemas de ecuaciones (de dos o tres variables, con ecuaciones lineales o no) se tomarán en cuenta. Para ello estudiarás una serie de técnicas o métodos para resolverlas y así poder aplicarlas.

Recuerda, la práctica ayuda a desarrollar habilidades y una intención de este curso es proporcionarte herramientas algebraicas que utilizarás después para que no tengas que detenerte porque falta alguna herramienta básica.

Competencia específica

Utilizar las ecuaciones de primer y segundo grado, para analizar problemas cotidianos y de logística, a través de la resolución de ejercicios.

Logros:

- Dar solución y argumentar ecuaciones de primer grado, de una incógnita.
- Identificar las variables involucradas en un problema de transporte de mercancías.
- Integrar nuevos conocimientos a los ya adquiridos en el planteamiento de ecuaciones lineales de 2 y 3 incógnitas.
- Compartir información y enriquecer conocimientos mediante el intercambio de los contenidos investigados sobre el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales.
- Identificar los tipos de ecuaciones.
- Resolver ecuaciones de primer y segundo grados y ecuaciones simultáneas.
- Resolver problemas utilizando ecuaciones.

3.1. Ecuaciones de primer grado

Una ecuación es una expresión algebraica que involucra una igualdad en el sentido de ser una proposición que puede ser calificada como verdadera o falsa dependiendo de los valores que se tomen para las diversas **variables** (o **incógnitas**) que están involucradas. El conjunto de valores de las variables que hagan a la ecuación una proposición verdadera se le llama **conjunto solución** de la ecuación. Cuando las incógnitas no están multiplicadas entre sí en cada término y, por tanto, cuando el grado mayor de los términos involucrados en la ecuación es uno, se dice que se tiene una **ecuación lineal o de primer grado**. De manera un poco más concreta una ecuación lineal es de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$$

donde se tienen n variables o incógnitas (todos los coeficientes y los valores de x_i son números reales). En este caso el conjunto solución está compuesto por todas las n-adas ordenadas tales que es una proposición verdadera.

Algunos ejemplos son:

- $2xy + 6x = 0$ y $5z^2 = 0$ **no son ecuaciones lineales** porque las variables involucradas están multiplicadas entre sí (recordemos que $z^2 = z \cdot z$).
- La ecuación $5x + 4y – 5 = 0$ **es una ecuación lineal** en x y y. La pareja ordenada (3, 2), es decir $x = 3$ y $y = 2$, no es una solución porque al sustituirla se tiene una proposición $(5\cdot3 + 4\cdot2 – 5 = 0)$ que es falsa porque equivale a $18 = 0$.
- Para la misma ecuación la pareja ordenada (–1.4, 3) sí es una solución porque al sustituirla en la ecuación se tiene la expresión simplificada $0 = 0$, es decir, se tiene una proposición verdadera. Esto quiere decir que dicha pareja ordenada está en el conjunto solución de la ecuación.
- $5x + 2y + z + 3 = 0$ **es una ecuación lineal de tres variables** y algunas triadas que están en su conjunto solución son (0, 0, –3), (0, –1.5, 0), (–5, 7, 8).

Hay un detalle importante del uso del signo "=" que está relacionado con lo que viste en la unidad anterior y que parece trivial, pero que en ocasiones les causa problemas de comprensión en la lectura a los estudiantes. Cuando se utiliza este signo con los polinomios se debe tomar más como un señalamiento de que a algo se le va a asignar un valor, como cuando se avisa que una literal tiene cierto valor o para señalar que después de que en un polinomio se le asignaron valores a las literales se obtiene cierto número o resultado. Esto es equivalente a cuando uno hace operaciones desde la Primaria.

Por otro lado, cuando utilizamos este signo en las ecuaciones se refiere más a establecer una relación entre los dos miembros de la igualdad y afirmar que el valor de uno de ellos es el mismo que el del otro. En este caso se habla de una relación entre números, más que de una asignación de valores.

Estos dos usos los aprendes con la práctica, pero hacemos la referencia para hacer explícito un problema potencial al utilizar masivamente un mismo signo para dos cosas en un mismo curso.

A continuación sólo abordaremos las ecuaciones lineales con una incógnita y el procedimiento para hallar su conjunto solución o, como se dice coloquialmente, resolverlas.

3.1.1. Ecuaciones con una incógnita

Como un caso particular de lo recién mencionado, una ecuación lineal con una incógnita es una ecuación como la siguiente: $a_1x + a_{n+1} = 0$, donde x es la variable (o incógnita) y a_1 y a_{n+1} son números reales. El valor de x, como número real, es el conjunto solución de la ecuación.

El procedimiento para resolver estas ecuaciones, es decir, hallar su conjunto solución, es relativamente fácil y se logra aplicando directamente los axiomas de campo y algunas propiedades relacionadas que ya estudiaste en la unidad 1 de este curso. De hecho, el punto **3** de la evidencia de aprendizaje *Propiedades de campo* es el proceso paso a paso para resolver una ecuación lineal aplicando directamente los axiomas de campo. Recordemos este procedimiento a continuación:

$x(a - 3) = ax - 7b$	Es la expresión inicial.
$xa - x(3) = ax - 7b$	Axioma 5 de distributividad.
$ax - 3x = ax - 7b$	Axioma 2 de conmutatividad de la multiplicación.
$(-ax) + (ax - 3x) = (-ax) + (ax - 7b)$	Por el axioma 8 existe el inverso aditivo de ax.
$[(-ax) + ax] - 3x = [(-ax) + ax] - 7b$	Axioma 3 de asociatividad de la suma.
$0 - 3x = 0 - 7b$	Axioma 8 del inverso aditivo.
$0 + (-3x) = 0 + (-7b)$	Definición de la resta.
$(-3x) = (-7b)$	Axioma 6 del elemento neutro para la suma.
$(-3x) + 3x = (-7b) + 3x$	Propiedad de la igualdad que permite sumar lo mismo a ambos miembros.
$0 = (-7b) + 3x$	Axioma 8 del inverso aditivo.

$(-7b) + 0 = (-7b) + [(-7b) + 3x]$	Propiedad de la igualdad que permite sumar lo mismo a ambos miembros.
$-7b = (-7b) + [(-7b) + 3x]$	Axioma 6 del elemento neutro para la suma.
$-7b = [(-7b) + (-7b)] + 3x$	Axioma 3 de asociatividad de la suma.
$-7b = 0 + 3x$	Axioma 8 del inverso aditivo.
$-7b = 3x$	Axioma 6 del elemento neutro para la suma.
$(3^{-1})(-7b) = (3^{-1})(3x)$	Por el axioma 9 existe el inverso multiplicativo de 3.
$(3^{-1})(-7b) = [(3b)^{-1} \cdot 3]\, x$	Axioma 4 de asociatividad de la multiplicación.
$(3^{-1})(-7b) = 1 \cdot x$	Axioma 9 del inverso multiplicativo.
$(3^{-1})(-7b) = x$	Axioma 7 del neutro para la multiplicación.
$(-7b) \div 3 = x$	Definición de la división.

En otras palabras, para la ecuación $x(a-3) = ax - 7b$, cuya incógnita es x, se tiene que su conjunto solución es $\left\{-\frac{7b}{7}\right\}$, es decir, su solución es $x = -\frac{7b}{7}$, con *a* y *b* números reales.

Repasemos un poco el procedimiento que aparece arriba.

La lista de pasos que aparece arriba puede parecer excesiva y tediosa, lo cual ha hecho que algunos pasos se omitan cuando se lleva a cabo el proceso de resolución ya teniendo algo de experiencia. Es posible que algún momento hayas oído la expresión “si está sumando pasa restando y si está restando pasa sumando”, pero esto es un resumen de los siguientes pasos del desarrollo presentado:

$(-3x) = (-7b)$	Axioma 6 del elemento neutro para la suma.
$(-3x) + 3x = (-7b) + 3x$	Propiedad de la igualdad que permite sumar lo mismo a ambos miembros.
$0 = (-7b) + 3x$	Axioma 8 del inverso aditivo.

De igual manera, la regla que a veces se expresa “está multiplicando, pasa dividiendo y con el mismo signo” es un resumen de la aplicación de los axiomas que en el caso anterior se muestra en los siguientes pasos:

$-7b = 3x$	Axioma 6 del elemento neutro para la suma.
$(3^{-1})(-7b) = (3^{-1})(3x)$	Por el axioma 9 existe el inverso multiplicativo de 3.
$(3^{-1})(-7b) = [(3b)^{-1} \cdot 3]\,x$	Axioma 4 de asociatividad de la multiplicación.
$(3^{-1})(-7b) = 1 \cdot x$	Axioma 9 del inverso multiplicativo.
$(3^{-1})(-7b) = x$	Axioma 7 del neutro para la multiplicación.
$(-7b) \div 3 = x$	Definición de la división.

Con estas dos reglas “comunes” hay que tener cuidado, pues en ocasiones se abusa de ellas y se cometen errores. Consideremos la ecuación $3(x - 5) = 4$ y considera el caso del 5 que aparece restando a la x. Si aplicamos la regla recién mencionada sin fijarnos en nada más, podríamos tener el siguiente desarrollo para obtener el valor de la incógnita[1]:

$3(x - 5) = 4$	Esta es la ecuación original
$3(x) = 4 + 5$	Se aplica la regla “está restando pasa sumando”.
$3x = 9$	Hacemos la suma.
$x = \frac{9}{3}$	Se aplica la regla “está multiplicando pasa dividiendo”.
$x = 3$	Se hace la división, así que 3 es la solución de la ecuación.

Sin embargo consideremos la comprobación, es decir, el sustituir este valor en la ecuación original y verificar que se obtenga una proposición verdadera:

$$3[(3) - 5] \stackrel{?}{=} 4$$
$$3(-2) \stackrel{?}{=} 4$$
$$-6 \stackrel{?}{=} 4.$$

[1] En este caso los axiomas aplicados ya no aparecen, pero si quieres identificarlos te puede servir para mejorar tus habilidades.

Es muy fácil darse cuenta que no se cumple la igualdad, que si x = 3 dicha expresión es una proposición falsa. La razón es la aplicación indiscriminada de esa regla popular sin considerar que, para este caso particular, existe un 3 afuera del paréntesis y hay un axioma de distributividad (el 5) que nos obliga a considerar que ese 3 afecta a la x y al –5 también. Así que de una manera no tan extensa el desarrollo correcto sería el siguiente:

$3(x-5)=4$	Esta es la ecuación original
$\frac{3(x-5)}{3}=\frac{4}{3}$	Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 3 porque es una versión corta de considerar que se multiplican ambos miembros por el inverso multiplicativo del 3 que es $3^{-1}=\frac{1}{3}$ (axioma 9) y luego tomar en cuenta la definición de la división.
$x-5=\frac{4}{3}$	Simplificamos el miembro izquierdo al considerar que $\frac{3(x-5)}{3}=\frac{3}{3}(x-5)=1(x-5)$ aplicando sucesivamente la asociatividad, la propiedad del inverso y la existencia del neutro, todos de la multiplicación (axiomas 4, 9 y 7). Entre el primer paso y éste se aplicó (bien) la regla "está multiplicando, pasa dividiendo".
$x=\frac{4}{3}+5$	Ahora sí, en una versión corta de sumar 5 a ambos miembros de la igualdad, aplicar la propiedad del inverso aditivo (–5 + 5 = 0) y de aplicar la propiedad del elemento neutro para la suma (x + 0 = 0) se aplicó correctamente la regla "está restando, pasa sumando". (Axiomas 8 y 6).
$x=\frac{19}{3}$	Al simplificar queda de la forma que se observa en la izquierda.

Al verificar la solución sustituyéndola en la ecuación original se obtiene el siguiente desarrollo:

$$3\left[\left(\frac{19}{3}\right)-5\right]\overset{?}{=}4$$
$$3\left(\frac{4}{3}\right)\overset{?}{=}4$$
$$\left(\frac{3}{3}\right)4\overset{?}{=}4$$
$$1\cdot 4\overset{?}{=}4$$
$$4=4.$$

Igual que en el caso anterior, es evidente que con este valor se hace verdadera la proposición (la igualdad), así que es el conjunto solución de la ecuación.

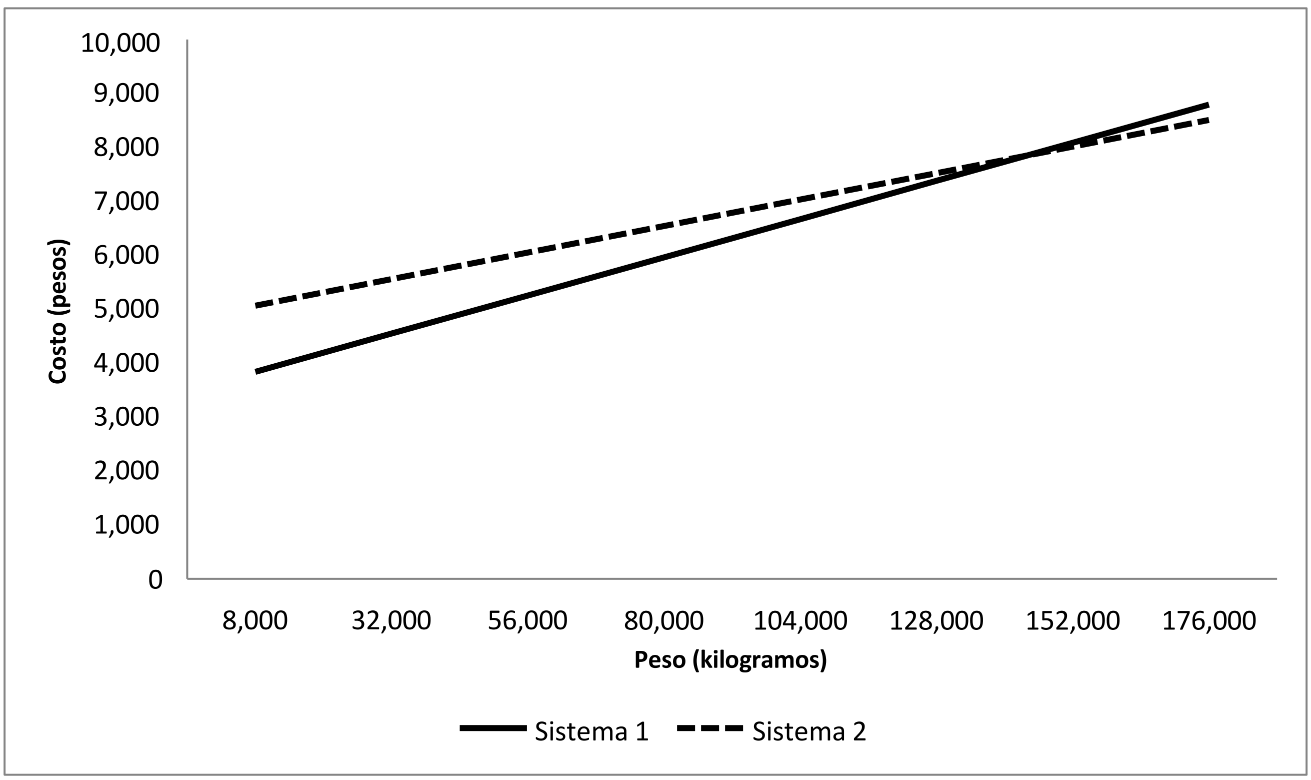
Al igual que en otros subtemas, la práctica en la resolución de ecuaciones lineales es necesaria para identificar posibles caminos y desarrollar habilidades. Para que puedas ver cómo se resuelven algunos ejercicios revisa los siguientes videos de Julio Ríos:

Ecuación de primer grado con una incógnita.
http://www.youtube.com/watch?v=LD2VeoX0J4A

Solución de una ecuación lineal con una incógnita.
http://www.youtube.com/watch?v=xeUWLZY4roM

3.1.2. Ecuaciones simultáneas con dos y tres incógnitas

Las ecuaciones lineales de una variable sirven para modelar situaciones relativamente sencillas, pero ¿qué ocurre cuando hay que comparar, por ejemplo, dos situaciones semejantes? ¿Qué hacer cuando uno tiene que decidir cuál es el punto de equilibrio de dos crecimientos simultáneos como los que siguen?



Cada uno de los crecimientos puede ser representado por ecuaciones y como las dos gráficas son segmentos de recta entonces las ecuaciones son lineales (de ahí el nombre).

En estos casos existen dos variables (en este ejemplo en particular podrían ser P de peso y C de costo) que están relacionadas entre sí. El caso graficado representa los costos que le representa a una empresa el envío de sus mercancías utilizando dos sistemas de transporte que tienen los siguientes datos:

Sistema	Costo fijo	Costo variable por kilogramo
1	$ 3,600	$ 0.0295
2	$ 4,900	$ 0.0205

Así que se pueden plantear dos ecuaciones, una para cada sistema:

Sistema 1: $C = 3600 + 0.0295P$
Sistema 2: $C = 4900 + 0.0205P$

Esto en la notación tradicional de sistemas de ecuaciones se representaría como sigue:

$$\begin{cases} C = 3600 + 0.0295P \\ C = 4900 + 0.0205P \end{cases}$$

De hecho la llave quiere indicar que lo que se quiere hallar es el conjunto solución de ambas ecuaciones simultáneamente. En otras palabras, se quiere hallar cuáles parejas ordenadas de la forma (P,C) satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones.

Es importante recalcar la palabra “simultáneamente” porque cada una de las ecuaciones tiene una cantidad infinita de soluciones porque hay una cantidad infinita de parejas que las hacen verdaderas de manera independiente. Es por ello que sus gráficas son rectas: **todos** los puntos de sus gráficas representan parejas ordenadas que las satisfacen y, por tanto, están en sus respectivos conjuntos solución.

Pero también es posible ver en la gráfica que sólo hay un punto que pertenece a las dos rectas: el punto donde se cortan. Eso quiere decir que las coordenadas de dicho punto forman la pareja ordenada que satisface a ambas ecuaciones, son la solución del sistema o bien son el conjunto solución. Hay que establecer algunas estrategias para obtener dicha solución.

Antes de seguir hay que decir el nombre. Estos sistemas de ecuaciones se llaman **sistemas de ecuaciones lineales con dos variables** y en general son de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{cases}$$

Donde a_{ij} es un número real que es coeficiente de la j-ésima variable en la i-ésima ecuación, x_1 y x_2 son las variables y los b_j son los términos independientes.

En el ejemplo que se consideró arriba se pueden acomodar términos para que asemejen a la forma general, aunque esto no es obligatorio. Sólo de manera ilustrativa esto quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{cases} C - 0.0295P = 3600 \\ C - 0.0205P = 4900 \end{cases}$$

Las técnicas más utilizadas para resolver estos sistemas de ecuaciones son las siguientes:

- Gráfico
- Sustitución
- Igualación
- Suma y resta
- Por determinantes

Todas estas técnicas tienen ventajas y desventajas, cosa que vamos a ir viendo conforme se revisen. Además, tienes que tomarlas en cuenta e identificar cuál es la intención de cada una de las técnicas o métodos desarrollados para poder así aplicarlos de la mejor manera para cada caso, ejercicio o ejemplo.

El método gráfico

Este método en general proporciona una idea de la situación, pero no da soluciones exactas. Básicamente se trata de graficar las dos ecuaciones en el plano y localizar el punto donde se cortan. Como ya se mencionó, al ser cada recta graficada una representación del conjunto solución de cada ecuación se tiene que las coordenadas del punto de corte es el conjunto solución del sistema.

El principal problema que se tiene es la inexactitud. Puedes intentar a proponer una solución en la gráfica que está más arriba, pero lo más seguro es que, literalmente, no le atines. Es por ello que no ahondaremos más al respecto.

El método de sustitución

Este método se basa en el hecho de que una variable puede ser puesta en función de la otra para luego sustituirla en la otra ecuación. Con esto se obtiene una ecuación lineal de una sola variable. Por ejemplo, para el sistema

$$\begin{cases} C - 0.0295\,P = 3600 \\ C - 0.0205\,P = 4900 \end{cases},$$

El siguiente sería el procedimiento a seguir:

En primer lugar habría que escoger una variable de la primera ecuación y despejarla, así que se tiene

$$C = 3600 + 0.0295\,P\,.$$

Después hay que sustituir este valor en la segunda ecuación (en la otra, nunca en la misma) para obtener una ecuación de una sola variable y resolverla:

$$\begin{aligned}(3600 + 0.0295\,P) - 0.0205\,P &= 4900\\ 0.009\,P &= 4900 - 3600\\ 0.009\,P &= 1300\\ P &= \frac{1300}{0.009} = 144{,}444.\overline{4}.\end{aligned}$$

Ahora habría que hallar el valor de la segunda variable. Como el primer paso fue despejar la primera variable en una ecuación, entonces sólo habría que sustituir el valor recién obtenido en ese despeje:

$$\begin{aligned}C &= 3600 + 0.0295\,P\\ C &= 3600 + 0.0295\left(\frac{1300}{0.009}\right)\\ C &= 3600 + \frac{38350}{9}\\ C &= \frac{70750}{9} = 7{,}861.\overline{1}.\end{aligned}$$

Así que la pareja $(144\,444.\overline{4}, 7\,861.\overline{1})$ es el conjunto solución o, que es lo mismo, $P = 144\,444.\overline{4}$ y $C = 7\,861.\overline{1}$.

Este método tiene la ventaja de que es posible utilizarlo con sistemas de ecuaciones no lineales o cuando una variable es fácil de despejar o está prácticamente despejada.

Ahora puedes ver el video de Julio Ríos denominado *Solución de un sistema de 2 x 2 por el Método de sustitución.* http://www.youtube.com/watch?v=3FHhPLVUt9o

El método de igualación

Este método se basa en el hecho de que se busca en las dos ecuaciones (o en todas las del sistema) el valor de una variable de manera simultánea, así que lo que se hace es despejar la misma variable en las dos ecuaciones y luego, como deben valer lo mismo, se igualan entre sí. Con esto se elimina esa variable y queda una ecuación de una variable (la otra).

Por ejemplo, en el caso que se ha estado tratando el planteamiento original incluía a las dos ecuaciones ya con una variable despejada:

$$\begin{cases} C = 3600 + 0.0295P \\ C = 4900 + 0.0205P \end{cases}$$

Así que el procedimiento sería igualarlas porque el valor de C es el mismo y luego despejar la otra variable:

$$3600 + 0.0295\,P = 4900 + 0.0205\,P$$

$$0.0295\,P - 0.0205\,P = 4900 - 3600$$

$$0.009\,P = 1300$$

$$P = \frac{1300}{0.009} = 144{,}444.\overline{4}.$$

A partir de este momento se retoma el procedimiento utilizado en el método anterior: Se sustituye el valor obtenido de P en una de las dos ecuaciones despejadas y así se obtiene el valor de y $C = 7\,861.\overline{1}$. Como te habrás dado cuenta, esta técnica es apropiada si es fácil despejar la misma variable en las dos ecuaciones.

Ahora observa el video *Solución de un Sistema de 2 x 2 por el Método de Igualación* de Julio Ríos. http://www.youtube.com/watch?v=ITRANviJWEY

El método de suma y resta

El método de suma y resta aprovecha el hecho de que a una igualdad se le puede sumar la misma cantidad en cada miembro y entonces se toma a los dos miembros de la igualdad como lo que son: cantidades iguales. De esta manera se busca eliminar una variable convirtiendo las dos ecuaciones en una sola.

Consideremos el mismo ejemplo que hemos estado utilizando:

$$\begin{cases} C - 0.0295P = 3600 \\ C - 0.0205P = 4900 \end{cases}$$

Habría que preguntarse: ¿por qué número multiplico la segunda ecuación para que al sumar los miembros izquierdos de ambas ecuaciones se elimine una variable, por ejemplo, la C? Recuerda que C es un número real y tiene inverso aditivo, por lo que la idea es hallar un número que multiplique a la ecuación de abajo para que la C se “convierta” en el inverso aditivo de la C de la primera ecuación y así al sumarlas se eliminen. El número en cuestión es –1, así que podemos convertir el sistema de ecuaciones original en otro equivalente porque tendría las mismas soluciones:

$$\begin{cases} C-0.0295\,P=3600 \\ C-0.0205\,P=4900 \end{cases} \sim \begin{cases} C-0.0295\,P=3600 \\ -1(C-0.0205\,P)=-1(4900) \end{cases} \sim \begin{cases} C-0.0295\,P=3600 \\ -C+0.0205\,P=-4900 \end{cases}$$

Ahora coloquialmente se suman las dos ecuaciones, es decir, se obtiene una ecuación que el miembro izquierdo es la suma de los dos miembros izquierdos y el miembro derecho es la suma de los dos miembros derechos:

$$\begin{array}{rrcl} & C-0.0295P & = & 3600 \\ + & & & \\ & -C+0.0205P & = & -4900 \\ \hline & 0-0.009P & = & -1300 \end{array}$$

Así que la ecuación resultante $-0.009P = -1300$ puede ser resuelta para obtener el resultado que ya sabemos: $P = 144\,444.\overline{4}$.

Algo que vale la pena indicar es que **se escogió eliminar la C porque es la variable más fácil de eliminar, pero también la P también se puede eliminar, aunque hay que pensar en cómo "convertir" por medio de multiplicaciones los coeficientes de P en ambas ecuaciones para que sean inversos aditivos entre sí.** Esto se logra multiplicando la primera ecuación con el coeficiente de la P de la segunda ecuación y viceversa. Los signos se deben escoger para obtener los inversos aditivos.

Así que en este caso la primera ecuación se multiplicará por 0.0205 y la segunda ecuación por –0.0295 y así tenemos el siguiente desarrollo:

$$\begin{cases} C-0.0295\,P=3600 \\ C-0.0205\,P=4900 \end{cases} \sim \begin{cases} 0.0205(C-0.0295\,P)=0.0205(3600) \\ -0.0295(C-0.0205\,P)=-0.0295(4900) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 0.0205\,C-0.00060475\;P=73.8 \\ -0.0295\,C+0.00060475\;P=-144.55 \end{cases}$$

Ahora se realiza la suma de las ecuaciones:

$$\begin{array}{rrcl} & 0.0205C-0.00060475P & = & 73.8 \\ + & & & \\ & -0.0295C+0.00060475P & = & -144.55 \\ \hline & 0.009C+0 & = & -70.75 \end{array}$$

En esta última ecuación se despeja *C* y obtenemos que $C = \frac{-70.75}{-0.009} = 7861.1$.

Como podrás ver, es más fácil aplicar el procedimiento para eliminar la C porque ya está prácticamente dada.

Ahora puedes ver el video *Solución de un Sistema de 2 x 2 por el Método de Eliminación (Suma y Resta)* de Julio Ríos http://www.youtube.com/watch?v=v6iKv3QXqNs

El método por determinantes

Este método sólo se puede aplicar a sistemas de ecuaciones lineales en los que el número de variables es el mismo que el de ecuaciones. Hasta este momento sólo hemos trabajado este tipo de casos, pero al ampliarlo en la siguiente sección quedará limitado. Esta es una razón por la que no lo abordaremos en este curso.

Hay otra razón más poderosa. En tu curso de Álgebra Lineal abordarás este tema y con mucha mayor profundidad para poder obtener el máximo provecho posible. Como habrás notado, no importa la técnica utilizada siempre el resultado es el mismo, pero en algunos casos es más fácil aplicar alguna técnica en lugar de otra.

En cuanto al ejemplo que se ha planteado, al tener la solución del sistema de ecuaciones se ve que cuando el peso es de 144,444.44 kilogramos el costo de los dos sistemas de transporte es el mismo, $7,861.11. Con un peso menor resulta que el sistema 1 es más económico, pero con un peso mayor es preferible el sistema 2. Con esta información es posible decidir cuál sistema utilizar con base en el peso de los envíos.

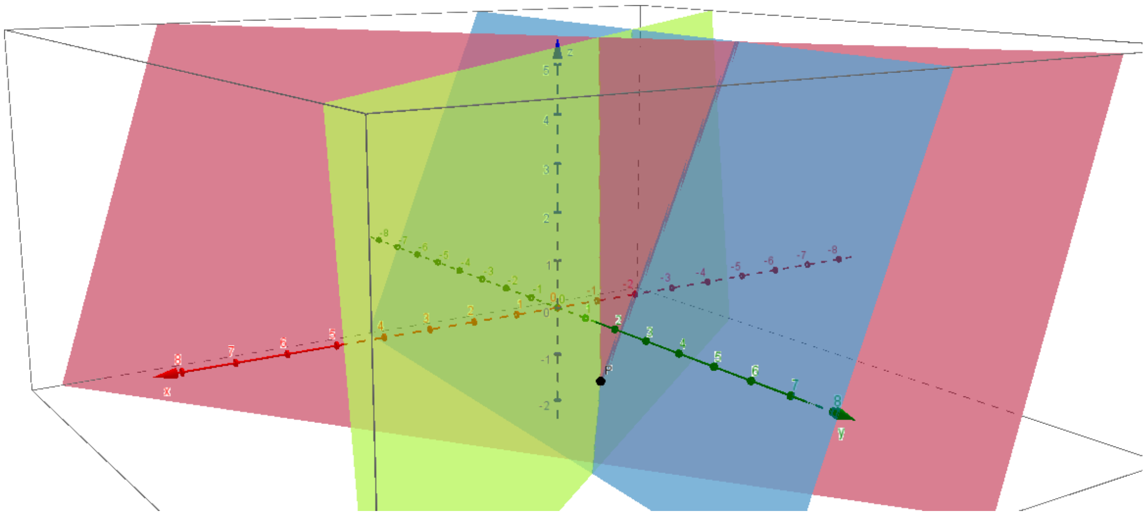
Sistemas de ecuaciones con tres variables

Cuando se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas es un caso como el siguiente:

$$\begin{cases} 6a - 8b - c = -13 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ 12a - b + 5c = -3 \end{cases}$$

En este caso lo que se busca es una triada de números ordenados (a,b,c) que satisfagan simultáneamente a las tres ecuaciones. En términos gráficos cada ecuación puede ser representada ya no por una línea recta, sino por un plano, y entonces la satisfacción simultánea de las tres ecuaciones equivale a que los tres planos graficados se corten en un solo punto.

Esto se ilustra a continuación:



Sin embargo, este método, el de graficación, se complica mucho por las tres dimensiones y resulta muy poco fiable, así que retomaremos los anteriores que son analíticos.

En estos casos el proceso general a seguir es tomar dos ecuaciones (la 1 y la 2 por ejemplo) y aplicarle alguna de las técnicas mencionadas más arriba con lo que se obtiene una ecuación con dos variables. Después se toman otra pareja de las ecuaciones originales (la 2 y la 3 por ejemplo) y se elimina la misma variable para obtener otra ecuación con dos variables. Finalmente se resuelve el sistema de dos ecuaciones que se generó y con el resultado se obtiene el valor de la tercera variable. Veamos el ejemplo y numeremos las ecuaciones:

$$6a - 8b - c = -13 \qquad \ldots (1)$$
$$3a + 2b + c = 4 \qquad \ldots (2)$$
$$12a - b + 5c = -3 \qquad \ldots (3)$$

Siguiendo lo explicado habría que tomar las ecuaciones (1) y (2) para resolver el sistema que se forma:

$$\begin{cases} 6a - 8b - c = -13 \\ 3a + 2b + c = 4 \end{cases}$$

¿Cuál es el método más adecuado para eliminar una de las tres variables? Podría ser por suma y resta para eliminar la c porque, de hecho, no hay que hacerle nada al sistema sino únicamente sumar las ecuaciones:

$$\begin{array}{rrcl} & 6a - 8b - c & = & -13 \\ + & & & \\ & 3a + 2b + c & = & 4 \\ \hline & 9a - 6b & = & -9 \end{array} \qquad \ldots (4)$$

Ahora consideremos las ecuaciones (2) y (3) para ser resueltos como un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 4 \\ 12a - b + 5c = -3 \end{cases}$$

En este caso ya no hay que escoger la variable a eliminar, pues como ya se seleccionó la c más arriba, ahora hay que eliminarla de alguna manera. Utilizaremos el método de igualación, para lo cual hay que despejar esa variable en ambas ecuaciones

$$c = 4 - 3a - 2b \text{ y } c = \frac{-3 - 12a + b}{5},$$

luego igualarlas y entonces simplificar:

$$4 - 3a - 2b = \frac{-3 - 12a + b}{5}$$

$$20 - 15a - 10b = -3 - 12a + b$$

$$-3a - 11b = -23 \qquad \ldots (5)$$

Ahora tomamos las ecuaciones obtenidas (4) y (5) se resuelve el sistema que se obtiene:

$$\begin{cases} 9a - 6b = -9 \\ -3a - 11b = -23 \end{cases}$$

Utilizaremos el método de sustitución. ¿Cuál variable convendrá despejar y de cuál ecuación? Despejemos la a de la primera ecuación

$$a = \frac{6b - 9}{9} = \frac{2}{3}b - 1,$$

y entonces este valor se sustituye en la segunda ecuación:

$$-3\left(\frac{2}{3}b - 1\right) - 11b = -23$$

$$-2b + 3 - 11b = -23$$

$$-13b + 3 = -23$$

$$-13b = -26$$

$$b = \frac{-26}{-13} = 2.$$

Ahora podemos ir calculando las demás variables a partir de este punto:

$$a = \frac{2}{3}b - 1 = \frac{2}{3}(2) - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Y para el caso de la c podemos tomar cualquiera de las tres ecuaciones originales, sustituir los valores obtenidos y resolver la ecuación lineal de una variable que se obtiene. Vamos a considerar la ecuación (2):

$$3a + 2b + c = 4$$

$$3\left(\frac{1}{3}\right) + 2\,(2) + c = 4$$

$$1 + 4 + c = 4$$

$$c = 4 - 5 = -1$$

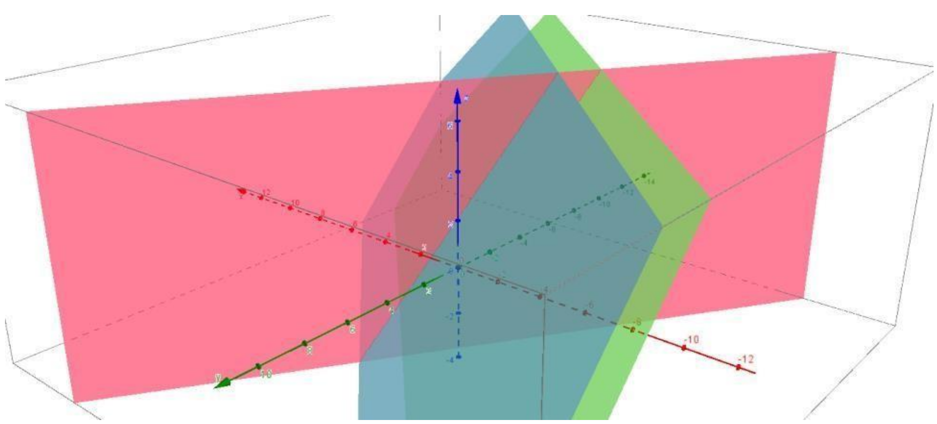
Así que la solución del sistema es la triada $\left(\frac{1}{3}, 2, -1\right)$, o lo que es lo mismo $a = \frac{1}{3}, b = 2$ y $c = -1$

En la gráfica de los tres planos de arriba está representado por el punto negro.

Como te podrás dar cuenta los métodos analíticos para resolver sistemas de dos ecuaciones de dos variables se pueden utilizar en sistemas con más ecuaciones o más variables pues se basan en propiedades de la igualdad y en los axiomas de campo de los números reales.

Ahora bien, puede ocurrir que se tengan tres ecuaciones, que se representan por planos, que se cortan entre sí dos a dos (en parejas) pero no las tres simultáneamente. Este es el caso del siguiente sistema cuya gráfica está enseguida:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 3 \\ 3x - 2y = 4 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$



No se ve un punto en común en los tres planos, así que seguiremos el mismo procedimiento que en el caso anterior y tomamos dos parejas de ecuaciones para obtener otras dos (las equivalentes a la (4) y la (5) del ejemplo anterior).

Estas dos ecuaciones son:

$$\begin{cases} 10y + 6z = 1 \\ 5y + 3z = -7 \end{cases}$$

Así que para resolver este sistema utilizaremos la técnica de suma y resta multiplicando la segunda ecuación por –2 y así poder eliminar la y de las ecuaciones, por lo que tenemos el sistema de ecuaciones equivalente:

$$\begin{cases} 10y + 6z = 1 \\ -2(5y + 3z) = -2(-7) \end{cases} \sim \begin{cases} 10y + 6z = 1 \\ -10y - 6z = 14 \end{cases}$$

Ahora hagamos la suma de ecuaciones:

$$\begin{array}{rrcl} & 10y + 6z & = & 1 \\ + & & & \\ & -10y - 6z & = & 14 \\ \hline & 0 & = & 15 \end{array}$$

El último renglón, el resultado, es una proposición falsa. Este resultado se interpreta diciendo que el sistema de ecuaciones no tiene solución. Además, puede explicar desde el punto de vista lógico de la misma manera en que se explica el error del ejercicio **3** de la actividad **3** (**Uso de propiedades de campo**) de la primera unidad: Se está suponiendo que el sistema de ecuaciones **sí** tiene solución y por eso se hace todo el procedimiento, pero como ese supuesto es falso (aunque no lo sepamos) entonces se llega a una afirmación falsa.

La conclusión es que **el sistema de ecuaciones no tiene solución**.

3.2. Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado son aquellas en las que en todos los términos involucrados a lo mucho las variables se multiplican entre sí dos veces. Las siguientes son ecuaciones de segundo grado o cuadráticas de una o más variables:

$$3x^2 - 5x + 1 = 0, \quad 8ab + 3 = 9b - a, \quad -3(z + y^2) = yz + 2$$

En esta parte de la unidad estudiarás el caso de las ecuaciones de segundo grado para una sola variable que nos permitirá sentar las bases para el estudio de casos generales.
Así pues, las ecuaciones cuadráticas tienen la siguiente forma general o **forma canónica**:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Con a, b y c números reales que son los coeficientes de la ecuación. En particular a es el coeficiente del término cuadrático, b es el del término lineal y c es el término independiente. Es importante identificar estos coeficientes de acuerdo con el grado del término al que le corresponden y no necesariamente a la posición visual que ocupan en la ecuación. Es por ello que se recomienda acomodar los términos en las ecuaciones de acuerdo con la forma canónica.

Los siguientes son ejemplos donde aparecen ecuaciones de segundo grado con sus términos no necesariamente en el orden que se acaba de mencionar pero con los valores de sus coeficientes:

Ecuación original	Ecuación ordenada	Valores de los coeficientes
$34x^2 – 2x + 3 = 0$	$34x^2 – 2x + 3 = 0$	$a = 34$ $b = –2$ $c = 3$
$23x – 3x^2 = 76$	$–3x^2 + 23x – 76 = 0$	$a = –3$ $b = 23$ $c = –76$
$4x^2 + 1 = 2x^2 – 6x$	$2x^2 + 6x + 1 = 0$	$a = 2$ $b = 6$ $c = 1$
$ex – 3dx^2 + 5 = 2(ex^2 – dx)$	$(–3d – 2e)x^2 + (2d + e)x + 5 = 0$	$a = –3d – 2e$ $b = 2d + e$ $c = 5$

Para estas ecuaciones existen varias técnicas o métodos para resolverlas. De manera similar que en los casos de la sección anterior de la unidad, el primero y menos exacto es el método gráfico y para ejemplificarlo usaremos la ecuación $4x^2 + 1 = 2x^2 – 6x$. En primer lugar hay que igualarla a cero:

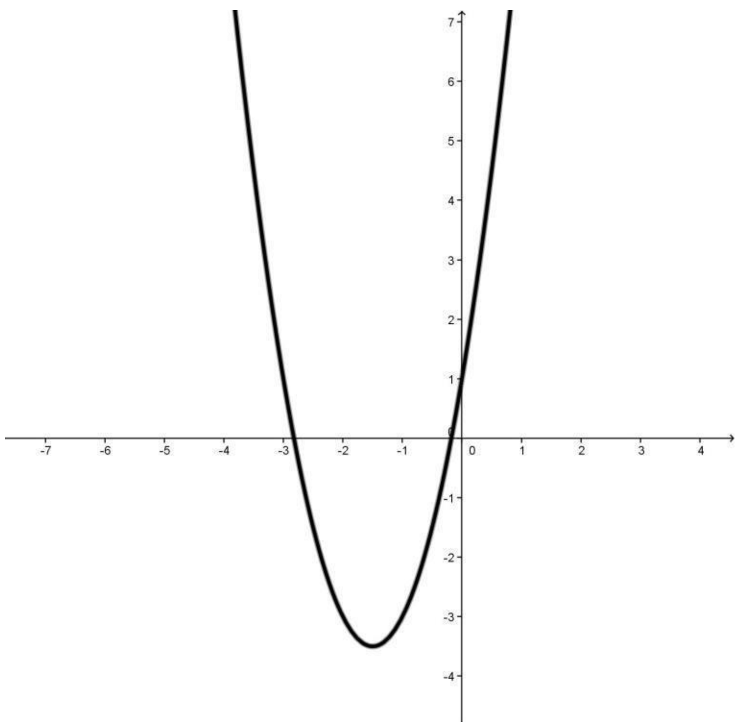
$$2x^2 + 6x + 1 = 0.$$

No es gratuito este paso porque el miembro izquierdo de la igualdad es un polinomio de una variable y de grado dos. Básicamente lo que dice la ecuación es que hay que hallar un valor para la variable (x) para que el polinomio valga 0.

Ahora bien, como el miembro izquierdo es un polinomio entonces aplicaremos lo que viste en la unidad anterior y graficaremos la función polinomial asociada a dicho polinomio:

$$p(x) = 2x^2 + 6x + 1.$$

Aprovechando Geogebra tenemos:



Ahora bien, recordando la ecuación que originó la gráfica y vinculándola con la función polinomial lo que se quiere saber es cuándo $p(x) = 0$, es decir, ¿para cuáles valores de x la función vale 0?

En otras palabras, ¿para cuáles valores de x la gráfica corta el eje horizontal porque ahí es donde $y = p(x)$ vale 0? (¿Recuerdas las actividades de la Unidad 2?) Como podrás ver hay dos opciones: casi en –3 y casi en 0, pero no podemos saberlo exactamente. (Haciendo un acercamiento a la gráfica se ve que es casi–2.8 y –0.2, pero todavía es inexacto.) La solución es buscar un método analítico.

3.2.1. Fórmula general

Para hallar el valor exacto de la x, a fin de que la igualdad $2x^2 + 6x + 1 = 0$ se cumpla, es posible utilizar una técnica aplicable a todas las ecuaciones de segundo grado y es la aplicación de la llamada **fórmula general para ecuaciones de segundo grado**. Su obtención lo exponemos a continuación más que nada para que le des sentido a la fórmula.

Como sabes las fórmulas se obtienen de considerar los casos generales. También como ya se mencionó, la forma canónica de las ecuaciones de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$, así que lo podemos considerar y aplicarle un procedimiento que se conoce como **completar un trinomio cuadrado** porque la idea es convertir el miembro izquierdo de la ecuación en un trinomio cuadrado perfecto, después factorizarlo y así encontrar sus soluciones.

El procedimiento es el siguiente:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Es importante que notes que lo que está entre corchetes es un trinomio cuadrado perfecto. Como estudiaste en la unidad anterior un trinomio de este tipo puede factorizarse como un **binomio al cuadrado** y así simplificar la expresión. Además, observa que lo que se sumó en el miembro izquierdo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ se sumó también en el derecho, mientras que el cambio en la

ecuación del tercer al cuarto renglón se obtuvo simplemente multiplicando explícitamente el segundo término por $1 = \frac{2}{2}$.

Ahora continuemos:

$$\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{\ }\right)^2 \qquad \frac{b^2}{\ } \qquad \frac{c}{\ } \qquad 2a$$

$= 4a^2 - a$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

En este punto hay que detenerse un momento para reflexionar sobre las posibilidades en cuanto a signos. Debes recordar que si un número real a es la raíz cuadrado de otro b ($a = \sqrt{b}$) esto quiere decir que a^2 es b, pero esto tiene dos opciones: a puede ser **positivo** o puede ser **negativo**. Por ejemplo, $\sqrt{4}$ puede ser 2 o puede ser –2 porque $2^2 = 4$ y también $(-2)^2 = 4$. En el caso del desarrollo que se está llevando a cabo, cuando se calcula la raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad puede haber hasta cuatro combinaciones posibles en los signos de los miembros:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{, (la que está indicada)}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} \text{ ,}$$

$$-\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ ó}$$

$$-\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Resulta interesante que estas cuatro combinaciones al operar con los signos se reducen a dos y el miembro izquierdo puede quedar con un solo signo:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ ó } \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = -\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$$

Esto lo escribimos comúnmente $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

Habiendo hecho esta aclaración terminamos el desarrollo

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta última expresión es la fórmula buscada y permite obtener las soluciones de la ecuación una vez que se identificaron los valores de los coeficientes a, b y c a partir de expresar la ecuación en la forma canónica ya mencionada más arriba.

Una observación muy importante es que los coeficientes representan números reales, por lo que pueden ser positivos, negativos o el cero (en cuyo caso no se escribe el término correspondiente), así como enteros, racionales o irracionales. Es por esto el hincapié en la sección anterior sobre identificar correctamente los valores de los coeficientes con base en el grado de los términos y no sólo en su posición visual dentro de la ecuación.

Así que para el caso expuesto de la ecuación $2x^2 + 6x + 1 = 0$ tenemos los valores de los coeficientes de $a = 2$, $b = 6$ y $c = 1$, por lo que la fórmula general y su posterior desarrollo queda como sigue:

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 8}}{4}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{4}.$$

En este punto es cuando hay que considerar los dos posibles signos para las dos posibles soluciones que se identificarán con los subíndices 1 y 2, respectivamente:

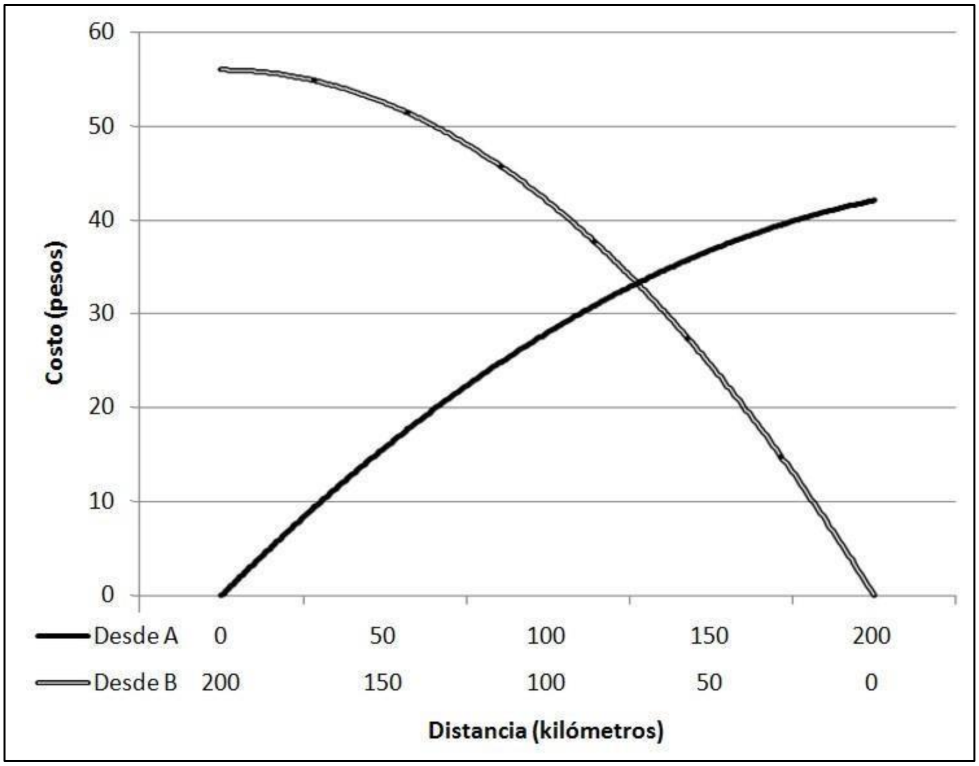
$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{28}}{4} \approx \frac{-6 + 5.291503...}{4} = -2.822875655 ...,$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{28}}{4} \approx \frac{-6 - 5.291503...}{4} = -0.1771243444 ...$$

Esto quiere decir que los valores $x_1 = -2.822875655\ldots$ ó $x_2 = -0.1771243444\ldots$ son los dos números reales que satisfacen la ecuación original, los dos números son la solución de ecuación o bien que el conjunto {–2.822875655…, –0.1771243444…} es el conjunto solución de la ecuación. Si recuerdas la gráfica de la sección anterior los valores obtenidos son casi los que están mostrados aquí.

Ahora **observa el video** *Solución de una ecuación cuadrática* de Julio Ríos.
http://www.youtube.com/watch?v=xmzG2xR-oBI

Ejemplo:
Supongamos que una empresa tiene dos almacenes separados por 200 km entre sí. En un almacén tiene productos del tipo A y en el otro tiene productos del tipo B. El costo para enviar un producto de cada tipo a un punto intermedio entre los almacenes se puede representar en la siguiente gráfica:



Resulta que el costo de envío desde el almacén *A* hacia un punto *C* intermedio se puede calcular con la fórmula $c = -0.0007d^2 + 0.3505d$. Por su parte el costo de envío desde el almacén B al mismo punto *C* se puede calcular con $c = -0.0014d^2 + 56$, siempre considerando como punto de origen al almacén A para simplificar.

Si quisiéramos saber a qué distancia del almacén A pondríamos el punto *C* de tal manera que el costo de envío fuese lo mismo desde ese almacén que desde el almacén B, tendríamos que buscar el punto donde se cortan las dos gráficas. Esto quiere decir que tendríamos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c = -0.0007d^2 + 0.3505d \\ c = -0.0014d^2 + 56 \end{cases}$$

Como puedes ver estas dos ecuaciones **no** son lineales, así que de hecho éste es un sistema de ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas. La primera ecuación tiene los términos cuadrático y lineal para *d*, mientras que la segunda tiene los términos cuadráticos y el independiente.

Para resolver el sistema se puede aplicar algunas de las técnicas que estudiaste en la primera parte de la unidad (aunque no todas). Antes de continuar revísalas e identifica cuál podría ser la más adecuada. Vamos a considerar el método de igualación pues en ambas ecuaciones ya está despejada la c. Entonces al igualarlas queda la siguiente ecuación:

$$-0.0007\,d^2 + 0.3505\,d = -0.0014\,d^2 + 56$$
$$-0.0007\,d^2 + 0.0014\,d^2 + 0.3505\,d - 56 = 0$$
$$0.0007\,d^2 + 0.3505\,d - 56 = 0$$

Lo que se obtiene es una ecuación de segundo grado que puede resolverse utilizando la fórmula general donde a = 0.0007, b = 0.3505 y c = –56. El desarrollo sería el siguiente:

$$d = \frac{-(0.3505) \pm \sqrt{(0.3505)^2 - 4(0.0007)(-56)}}{2(0.0007)}$$

$$d = \frac{-0.3505 \pm \sqrt{0.12285025 + 0.1568}}{0.0014}$$

$$d = \frac{-0.3505 \pm \sqrt{0.27965025}}{0.0014}$$

$$d_1 = \frac{-0.3505 + \sqrt{0.27965025}}{0.0014} \approx 127.3711973\ldots$$

ó

$$\{ d_2 = \frac{-0.3505 + \sqrt{0.27965025}}{0.0014} \approx -628.0854830\ldots$$

Esto quiere decir que la ecuación se satisfizo con los dos resultados que aparecen, pero habría que preguntarse si tienen sentido en términos del planteamiento original. El primer resultado (d_1) indica una distancia de unos 127.371 km, lo cual entra en el rango de 0 a 200 km del planteamiento, así que puede ser aceptado como resultado útil. El otro resultado (d_2) es un número negativo que no tiene sentido en términos de lo planteado, así que es inútil considerarlo para este caso.

Con el resultado adecuado tenemos que la distancia buscada es de 127.371 km desde el almacén A y le corresponde un costo de $33.29.

Con este ejemplo te puedes dar cuenta de la potencia que tienen los métodos para resolver sistemas de ecuaciones, pues no sólo se aplican a las ecuaciones lineales, sino que se pueden utilizar para sistemas de ecuaciones de grado mayor (cuadráticas e incluso superiores). Lo importante es entender de qué se trata cada técnica (incluida las utilizadas para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas) para aplicarlas lo más adecuadamente posible.

Hasta este momento las ecuaciones cuadráticas han sido tratadas en términos generales, pero en ocasiones se presentan bajo ciertas condiciones que hacen más fácil su resolución utilizando otras técnicas que utilizando la fórmula general. Esto ocurre básicamente bajo tres situaciones:

- que el término lineal no aparezca (b = 0),
- que el término independiente no aparezca (c = 0) o
- que el trinomio que se tiene pueda ser factorizado de alguna manera

Esto lo vamos a abordar en la siguiente sección de la unidad. Mientras tanto puedes revisar en la sección *Para saber más* algunos ejercicios.

3.2.2. Por factorización

En el tema anterior se mencionó el caso general de las ecuaciones de segundo grado, pero en ocasiones se presentan algunas que no están "completas" porque no aparece el término independiente o el término lineal. El primer caso, que son de la forma $ax^2 + c = 0$, se les llama **ecuaciones incompletas puras** y el segundo caso, de la forma $ax^2 + bx = 0$, se les llama **ecuaciones incompletas mixtas**. Como podrás ver las primeras son las más fáciles.

Ecuaciones incompletas puras

Estas ecuaciones son relativamente fáciles de resolver aunque hay que aclarar que no siempre se resuelven por factorización. Es más, resulta más fácil resolver despejando la incógnita (considerando la potencia al cuadrado) y luego se aplica la raíz cuadrada a los dos miembros de la ecuación. Por ejemplo para la ecuación $3x^2 – 5 = 0$ se procedería como sigue:

$$3x^2 = 5$$

$$x^2 = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Como viste en el tema anterior, es muy común usar el símbolo "±" para indicar las dos posibilidades, aunque en sentido estricto se debería escribir el último renglón como:

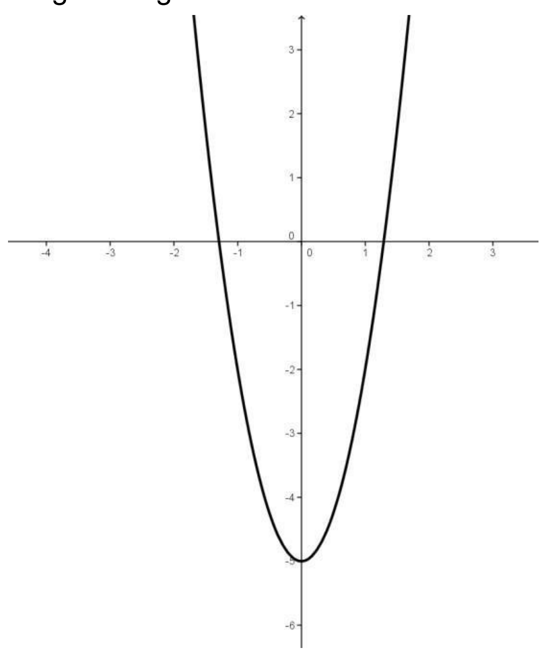
$$|x| = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

por la definición de valor absoluto. Pero por convenciencia lo vamos a dejar como está más arriba y entonces nos preguntamos qué números elevados al cuadrado nos producen $\frac{3}{5}$. Como te imaginarás hay dos posibilidades que son:

$$x = \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ ó } x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

En otras palabras, esos dos números satisfacen la ecuación original.

Aprovechando Geogebra puedes graficar la función polinomial asociada a la ecuación, $p(x) = 3x^2 - 5$, y obtendrías la siguiente gráfica:



¿Recuerdas las actividades de la unidad anterior donde manipulabas los parámetros de las funciones polinomiales para ver sus gráficas? Eso te puede servir para darte cuenta de que la gráfica es simétrica con respecto al eje vertical y corta al eje horizontal en dos puntos a la misma distancia del origen: los que corresponden a las soluciones de la ecuación. Todas las gráficas de las funciones polinomiales asociadas a ecuaciones cuadráticas puras tienen estas características de simetría.

Como otro ejemplo considera el modelo de la cantidad fija de la orden (FOQ por sus siglas en inglés) de pedidos para que una empresa minimice costos o maximice ganancias al buscar un equilibrio en el manejo de inventarios, el costo al ordenar y los costos derivados de una falta de productos.

Según este modelo, el costo total anual del inventario (CTA) cuando no hay certeza en la demanda queda en función de variables como:

- la cantidad de producto que debe ordenarse (Q),
- el costo de colocación del producto (A),
- la demanda anual del producto en unidades (R),
- el costo anual de mantenimiento y almacenamiento por unidad (S),
- el exceso esperado en unidades (e) y
- el costo esperado por ciclo debido a la falta de producto en el inventario (G)

Así que si lo que se quiere saber es la cantidad de producto que debe ordenarse (Q) para que el costo total anual (CTA) sea mínimo se necesita que Q satisfaga la siguiente ecuación[2]:

$$\frac{1}{2}SQ^2 - R(A+G) = 0\ .$$

Si consideramos que Q es la incógnita y las demás literales representan números que corresponden a una situación en particular entonces tenemos una ecuación cuadrática incompleta pura.

Siguiendo el mismo procedimiento arriba expuesto tenemos que:

$$\frac{1}{2}SQ^2 = R(A+G)$$

$$\varrho^2\text{-}\ \frac{R(A+G)}{\frac{1}{2}S}$$

$$\varrho^2 = \frac{2R(A+G)}{S}$$

$$\varrho^2 = \frac{2R(A+G)}{S}$$

$$\varrho = \pm\sqrt{\frac{2R(A+G)}{S}}$$

Así que las opciones posibles son:

$$\varrho = \pm\sqrt{\frac{2R(A+G)}{S}}\ \text{ó}\ \ \varrho = -\sqrt{\frac{2R(A+G)}{S}}$$

[2] Para obtener esta ecuación no sólo hay que plantear matemáticamente el modelo sino aplicar conocimientos de Cálculo Diferencial, específicamente sobre la obtención de máximos y mínimos de funciones. Puedes consultar el capítulo 6 del libro *The management of business logistics* de Coyle, Bardi y Langley Jr.

Entonces vamos a suponer que una empresa en particular tiene una demanda anual (R) de

3,000 unidades de un cierto producto con un costo de colocación de $175.00 del producto por orden (A), con un costo esperado por ciclo debido a la falta de producto en el inventario de $9.00 ($G$) y con un costo esperado por ciclo debido a la falta de producto en el inventario de $18.00 ($S$). Al sustituir estos valores en la ecuación original obtendrías:

$$\frac{1}{2}(18)Q^2 - 3000\,(175 + 9) = 0$$

$$9Q^2 - 552{,}000 = 0.$$

Y al resolver la ecuación tendrías dos soluciones:

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{2(3000)\ (175+9)}{18}} = \sqrt{\frac{1'104{,}000}{18}} = \sqrt{6{,}1333.\bar{3}} \approx 247.65567\ldots$$

$$\varrho_2 = \sqrt{\frac{2(3000)\ (175+9)}{18}} = -\sqrt{\frac{1'104{,}000}{18}} = -\sqrt{6{,}1333.\bar{3}} \approx -247.65567\ldots$$

Observa que hay dos números reales que satisfacen la ecuación pero sólo uno que le da sentido. Es muy importante que discrimines estas situaciones e identifiques cuáles son las soluciones o los números que satisfacen a un modelo matemático (ecuación, función, polinomio, matriz, etcétera) que te pueden ser útiles y que le den sentido a las situaciones donde se aplican. En este caso es la solución positiva la que te sirve:

$$Q \approx 247.65567\ldots$$

Así que cuando el inventario llegue a la cantidad fijada para hacer un pedido (punto de re-orden), la empresa lo hará por una cantidad de 248.

Ecuaciones incompletas mixtas

Las ecuaciones incompletas mixtas son las que no tienen término independiente, así que son de la forma:

$$ax^2 + bx = 0.$$

Como podrás ver, el miembro izquierdo de la ecuación tiene dos términos con un factor en común x. Así que procederemos a factorizar ese binomio tal como se trabajó en la unidad anterior:

$$x(ax + b) = 0.$$

Ahora bien, ¿recuerdas el ejercicio 2 de la actividad 3 de la unidad 1? En ese ejercicio se plantearon los argumentos para demostrar que dados dos números reales, a y b, si $ab = 0$ y $a \neq 0$, entonces $b = 0$. Esto quiere decir que, en general, si tenemos un producto que dé 0, entonces alguno de los dos factores es 0.[3] Aplicado a este caso en particular entonces se tiene que

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad ax + b = 0.$$

Como primera conclusión, se tiene que en este tipo de ecuaciones una solución es 0. La otra solución resulta de resolver la ecuación de primer grado de la derecha:

$$ax + b = 0$$
$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}.$$

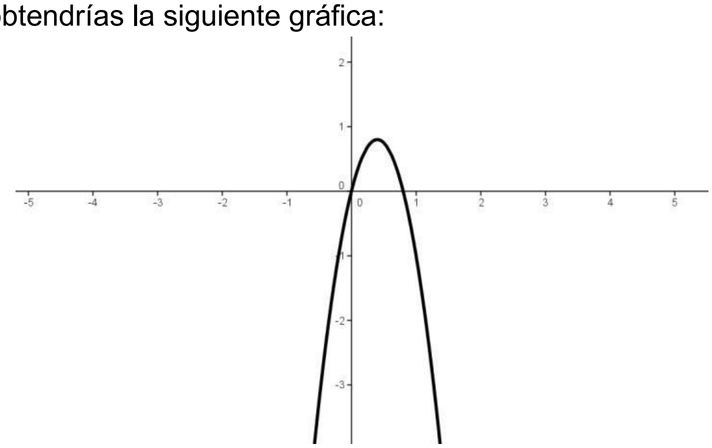
Por ejemplo, para la ecuación $-5x^2 + 4x = 0$ la solución se obtiene (siguiendo todo el proceso) al factorizar:

$$x(-5x + 4) = 0$$

Así que una solución es $x = 0$. La otra solución es:

$$-5x + 4 = 0$$
$$-5x = -4$$
$$x = \frac{4}{5}.$$

Entonces, esos dos números $(0 \text{ y } \frac{4}{5})$ son las dos soluciones de la ecuación. Al graficar la función polinomial asociada obtendrías la siguiente gráfica:



[3] Si recuerdas, en la actividad 2 de la unidad 1 **Propiedades de $\mathbb{Z}_n$** observaste que el producto de algunos $\mathbb{Z}_n$ no siempre cumplía esta propiedad del producto (por ejemplo en $\mathbb{Z}_6$ sucede que $2 \times 3 = 0$), por lo que en esos casos los métodos de factorización para obtener las soluciones de ecuaciones cuadráticas no sirven.

Por el signo negativo del coeficiente del término cuadrático la parábola abre hacia abajo, pero como verás esta gráfica no es simétrica con respecto al eje vertical, pero pasa por el origen. Todas las gráficas de las funciones polinomiales asociadas a las ecuaciones cuadráticas incompletas mixtas tienen esta característica de pasar por el origen.

Otras factorizaciones

No sólo las ecuaciones incompletas mixtas pueden ser resueltas rápidamente utilizando la factorización y aprovechando las propiedades de los productos. Para ello es necesario que recuerdes las formas de factorización que estudiaste en la unidad anterior:

- el trinomio cuadrado perfecto, que se factoriza en un binomio al cuadrado;
- la diferencia de cuadrados, que se factoriza en binomios conjugados; y
- el trinomio de la forma $x^2 + ax + b$, que se factoriza en binomios con un término común.

Lo importante es que al expresar la ecuación cuadrática en su forma canónica tienes que identificar si el polinomio cuadrático asociado a la ecuación ($ax^2 + bx + c$) es susceptible de ser factorizado.

Por ejemplo, para la ecuación $x^2 - 18x + 81 = 0$ se puede identificar el miembro izquierdo como un **trinomio cuadrado perfecto**, así que se puede factorizar de la siguiente manera:

$$x^2 - 18x + 81 = 0$$
$$(x - 9)^2 = 0.$$

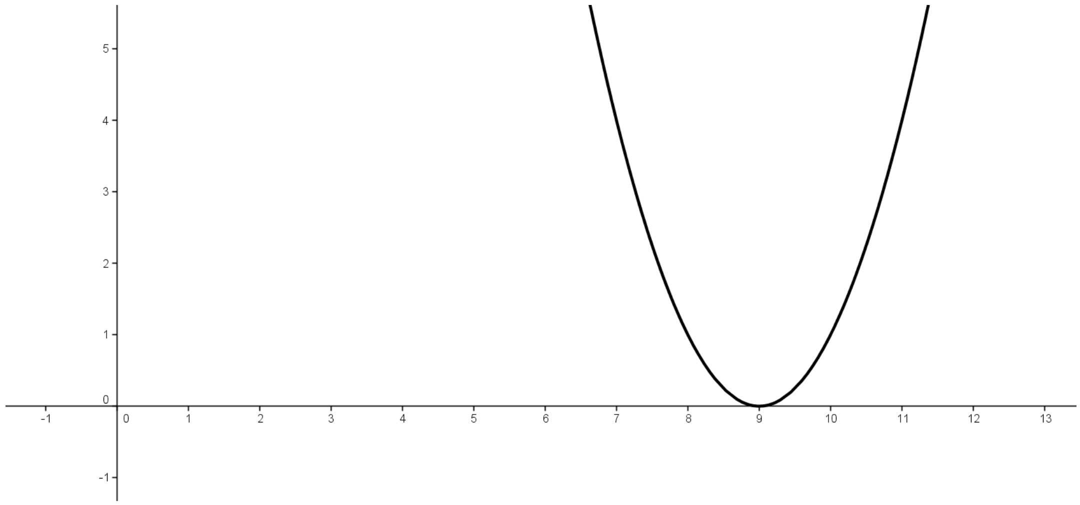
Esta expresión se puede desarrollar como: $(x - 9)(x - 9) = 0$.

Así que al considerar la propiedad de los números reales relativa a un producto que da cero tenemos que se puede plantear una ecuación lineal dos veces:

$$x - 9 = 0$$
$$x = 9.$$

Esto quiere decir que sólo hay un número, el 9, que satisface o es solución de la ecuación. Estrictamente hablando se dice que tiene una solución de multiplicidad dos.

Al graficar la función polinomial asociada a la ecuación se obtiene la siguiente gráfica:



Observa que la gráfica de la función toca en un solo punto el eje horizontal, en el punto (9,0), que corresponde a la solución de la ecuación. Como te podrás imaginar cuando se tienen ecuaciones que se pueden resolver con este tipo de factorizaciones las gráficas asociadas tocan en un solo punto al eje horizontal.

Otros ejemplos de ecuaciones de este tipo son los siguientes:

Ecuación	**Factorización**	**Solución (con multiplicidad dos)**
$121x^2 - 792x + 1296 = 0$	$(11x - 36)^2 = 0$	$x = \frac{36}{11}$
$361x^2 - 76x + 4 = 0$	$(19x - 2)^2 = 0$	$x = \frac{2}{19}$
$49x^2 - 112x + 64 = 0$	$(-7x + 8)^2 = 0$	$x = \frac{8}{7}$

Cuando se tiene una ecuación en la que el miembro izquierdo es una **diferencia de cuadrados** en realidad se tiene una ecuación incompleta pura:

$$4x^2 - 9 = 0$$

Como recordarás este tipo de ecuaciones se pueden resolver despejando, pero también factorizando:

$$4x^2 - 9 = 0$$
$$(2x + 3)(2x - 3) = 0.$$

Así que se plantean dos ecuaciones lineales:

$$2x + 3 = 0 \quad \text{y} \quad 2x - 3 = 0.$$

De aquí se tiene que las soluciones de la ecuación son:

$$x = -\frac{3}{2} \text{ y } x = \frac{3}{2}.$$

Estás en libertad de escoger el tipo de proceso de solución (despejando o factorizando) que quieras.

Finalmente está el caso en que el miembro izquierdo de la ecuación es **trinomio de la forma** $\boldsymbol{x^2 + ax + b}$. Para esta opción hay que encontrar la factorización adecuada y seguir el procedimiento similar. Como recordarás, para factorizar este trinomio hay que encontrar dos números (o expresiones) c y d que sumados den a ($c + d = a$) y multiplicadas den b ($cd = b$).

Por ejemplo para la ecuación $x^2 + 3x - 40 = 0$ sería encontrar los números c y d que satisfagan:

$$\begin{cases} c + d = 3 \\ cd = -40 \end{cases}$$

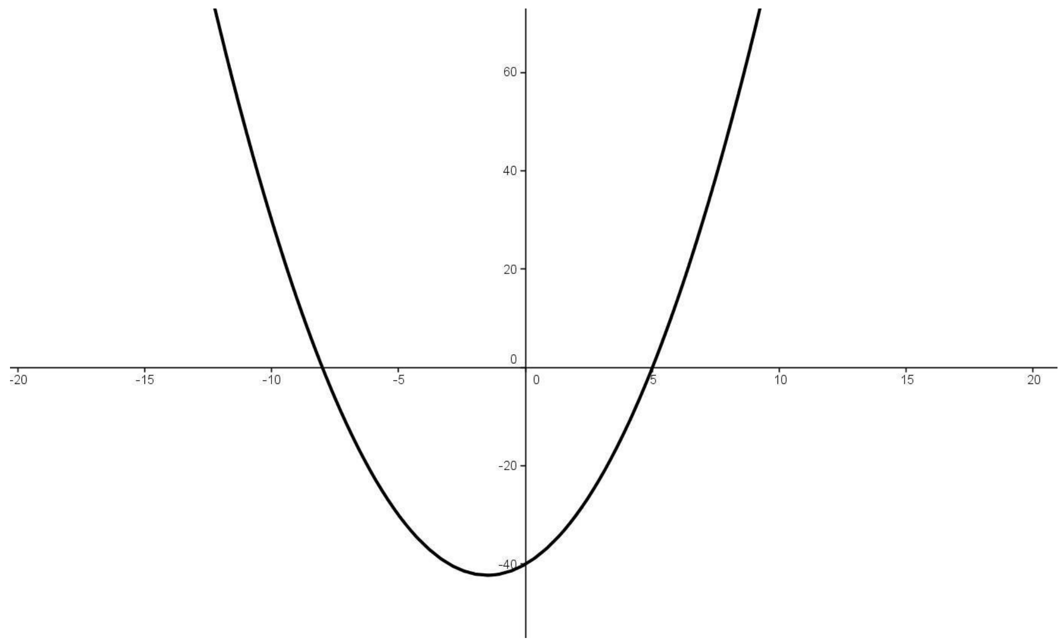
La solución del sistema es $c = 8$ y $d = -5$ (o viceversa), por lo que la ecuación original se puede escribir como

$$(x - 5)(x + 8) = 0.$$

Esto quiere decir que las dos soluciones se obtienen de resolver las dos ecuaciones lineales siguientes:

$$x - 5 = 0 \quad \text{y} \quad x + 8 = 0.$$

Así que las soluciones son x = 5 y x = –8. Si graficas la función polinomial con Geogebra obtendrías:



Como puedes ver no hay una simetría de la gráfica con respecto al eje vertical y en general para este tipo de ecuaciones no se espera necesariamente que la gráfica de la función polinomial asociada sea simétrica.

Otros ejemplos de ecuaciones de este tipo son los siguientes:

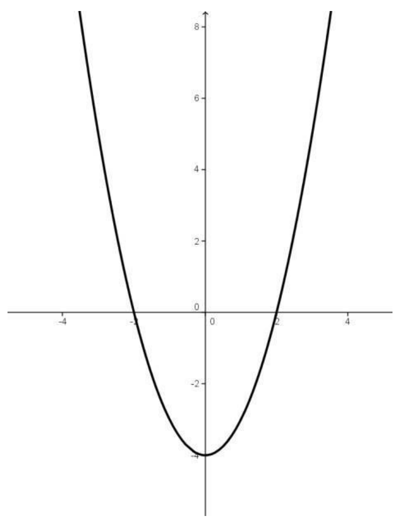
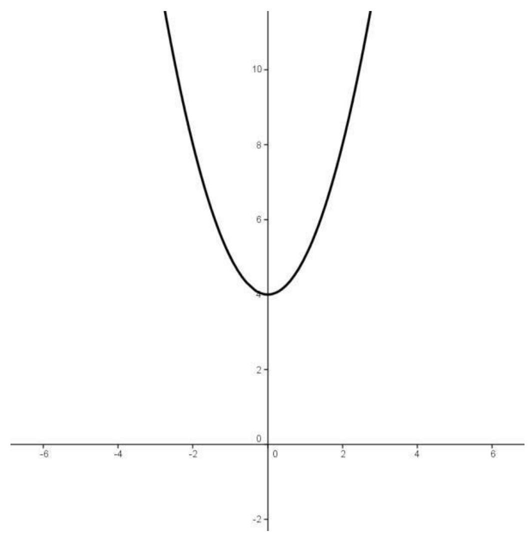
Ecuación	Factorización	Soluciones
$x^2 - 5x - 176 = 0$	$(x - 16)(x + 11) = 0$	$x = -11$ y $x = 16$
$3x^2 + 39x - 270 = 0$	$3(x + 18)(x - 5) = 0$	$x = -18$ y $x = 5$
$x^2 + 8x - 20 = 0$	$(x + 10)(x - 2) = 0$	$x = -10$ y $x = 2$
$x^2 - 6x = -8$	$(x - 4)(x - 2) = 0$	$x = 2$ y $x = 4$

Observa que el segundo ejemplo tiene un coeficiente del término cuadrático diferente a 1, por lo que aparece en la factorización como otro factor. Además en el último ejemplo se tuvieron que acomodar primero los términos para después proceder a la factorización.

3.2.3. Naturaleza de las soluciones y números complejos

Como te habrás dado cuenta, existen ecuaciones que no tienen solución en los números reales. En algunos casos es fácil determinar esto, por ejemplo en las ecuaciones cuadráticas incompletas puras ya que sólo hay que despejar y al momento de extraer la raíz cuadrada se identifica fácilmente si se puede o no.

Por ejemplo considera las ecuaciones $x^2 - 4 = 0$ y $x^2 + 4 = 0$. ¿Cuáles serías las soluciones para cada una de ellas? A continuación aparecen sus gráficas y sus soluciones:

$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 4 = 0$
Soluciones: –2 y 2.	Soluciones: No tiene
	

Observa que la gráfica de la derecha no corta el eje horizontal precisamente porque no hay valores en los números reales que satisfagan la ecuación.

¿Cómo identificar en general estos casos? Recuerda la fórmula general para ecuaciones de segundo grado (tema 3.2.1):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El problema para algunas ecuaciones está en la raíz cuadrada: Si lo que está en su interior es negativo entonces no hay ningún número real que cumpla, por lo que no existe entonces la solución. Es por ello que a la expresión que está dentro de la raíz cuadrada en la fórmula se le llama **discriminante** y se le representa con la letra D:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Con esta expresión es posible determinar si una ecuación cuadrática tiene o no soluciones en los números reales y si éstas son diferentes o no. Las posibilidades se resumen en la siguiente tabla:

Discriminante	Conclusión
$D = 0$	Es el caso en que hay una solución con multiplicidad 2, así que al expresar la ecuación en la forma canónica el miembro izquierdo de la ecuación es un trinomio cuadrado perfecto y, por tanto, se puede factorizar en un binomio al cuadrado.
$D < 0$	No es posible calcular la raíz cuadrada para los números reales y entonces la ecuación no tiene solución en este conjunto.
$D > 0$	Es posible obtener la raíz cuadrada del discriminante, por lo que se obtienen las dos soluciones de la ecuación.

¿Por qué la insistencia en utilizar la expresión "solución en los números reales" o cómo resolver este problema? Esto es porque en Matemáticas se considera un conjunto todavía más grande que los números reales y es el de los números complejos ($\mathbb{C}$). En este caso sí existe solución para todas las ecuaciones cuadráticas porque se define la unidad imaginaria como sigue:

$$i = \sqrt{-1}$$

Así que por ejemplo $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2\sqrt{-1} = 2\,i$. Este número no es un número real, sino complejo y, aunque se puede representar en el plano cartesiano como el que se ha estado utilizando, se le da otro enfoque porque en ese caso se le llama "plano complejo".

En general los números complejos se escriben de la siguiente manera:

$$a + bi,$$

donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria recién mencionada. Al primer término, a, se le llama **término real** y al segundo se le llama **término imaginario**. Algunos números complejos no reales son los siguientes:

$$-7.1 - 5.2i,\ 19.3 + 8i,\ -4.3 + 9.2i.$$

Observa que si $\boldsymbol{b = 0}$ entonces resulta que todos los números reales se pueden escribir como números complejos:

$$\pi = \pi + 0i$$

$$5 = 5 + 0i$$

$$0 = 0 + 0i$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} + 0i$$

De hecho, los números reales son un subconjunto de los números complejos. Además éstos últimos son campo por lo que cumplen con los nueve axiomas que estudiaste en la primera unidad. Sin embargo no es un campo ordenado, al igual que las matrices que estudiarás en tu curso de Álgebra Lineal.

Volvamos a las ecuaciones cuadráticas. Con estos números entonces se pueden ampliar las soluciones posibles.

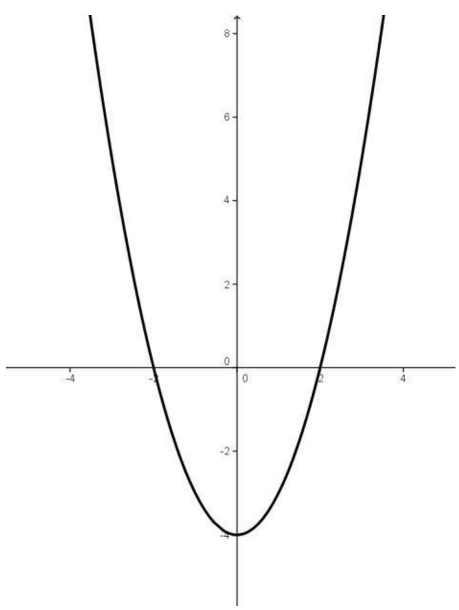
Con el mismo ejemplo de las ecuaciones $x^2 - 4 = 0$ y $x^2 + 4 = 0$ tenemos ahora:

<table>
<tr>
<td>

$x^2 - 4 = 0$

Soluciones en los números reales: -2 y 2.

Expresadas como números complejos:
$-2 + 0i$ y $2 + 0i$.

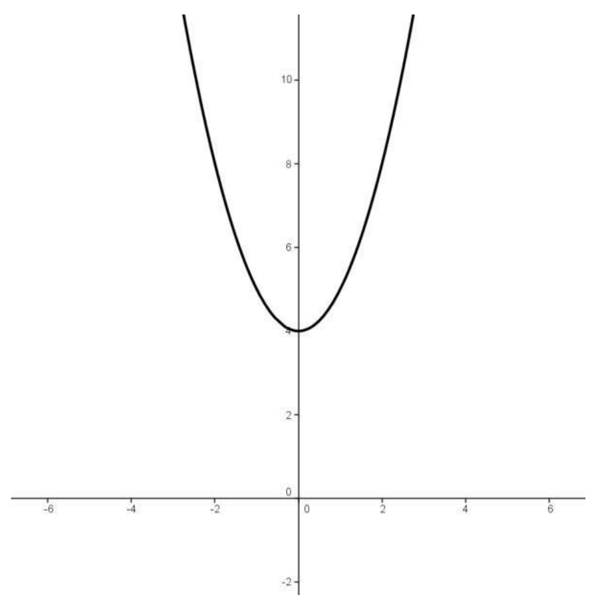


</td>
<td>

$x^2 + 4 = 0$

Soluciones en los números reales no tiene.

Soluciones en los números complejos:
$0 - 2i$ y $0 + 2i$.



</td>
</tr>
</table>

Si te preguntas si en una ecuación cuadrática pueden aparecer mezcladas una solución en los números reales y una en los números complejos no reales, la respuesta es negativa. Esto es porque las soluciones que son números complejos no reales siempre vienen en parejas, que se denominan números conjugados, y que sólo se diferencian en el signo del término imaginario.[4]

En este curso no ahondarás más al respecto porque formaría parte de un curso más profundo en Álgebra Superior, pero es bueno que lo sepas para que tengas conocimientos de lo que ocurre cuando en una ecuación cuadrática no hay números reales que la satisfagan.

[4] El hecho de que a dos números complejos se les llame "conjugados" porque sólo son diferentes en los signos de sus términos imaginarios (a + bi y a – bi, por ejemplo) y de que también en los productos notables se les llamen "conjugados" a dos binomios que sólo tienen un signo diferentes, no es una coincidencia. Revisa la sección *Para saber más* donde viene una referencia al respecto.

Cierre de la unidad

El estudio del Álgebra por sí misma es un área de estudio interesante y, por otro lado, las aplicaciones que tiene en otras ramas de las Matemáticas y de otras disciplinas como las Ingenierías son inmensas pues proveen de herramientas (lenguaje y algoritmos) que permiten simplificar procesos que de otro modo serían engorrosos.

En este curso, en particular para esta última unidad, estudiaste aspectos básicos de tu carrera que son útiles para abordar otros cursos. Como se te mencionó al inicio, es importante considerar que comprender los números que utilizamos y sus representaciones con generalizaciones algebraicas resulta indispensable para después aplicar estas herramientas y darles sentido.

Con esto en mente comenzaste revisando las propiedades básicas de los números que has utilizado desde tus primeros años en la escuela, pero que siempre pueden ir más allá. Esto te permitió darte cuenta de las propiedades con las que funcionan los números para que fuese posible su aplicación.

Posteriormente estudiaste algunas herramientas básicas de las expresiones algebraicas, de los polinomios en particular, para aprovechar las propiedades de los números y así poder echar mano de algoritmos que pueden simplificar el trabajo. También estudiaste las ventajas de representar gráficamente expresiones algebraicas, donde se hacen evidentes por medio de gráficas algunas propiedades y sus consecuencias. Esto te será muy útil para interpretar representaciones de este tipo, en diversos ámbitos de tu carrera y en el estudio del Cálculo que tiene, a su vez, una gran influencia en el desarrollo de la Ingeniería.

En esta última unidad repasaste elementos de Álgebra más aplicables. El uso de ecuaciones permite el desarrollo de modelos y de la búsqueda de soluciones a éstos. Es, de hecho, uno de los primeros pasos hacia la modelación matemática más compleja que estudiarás más adelante.

Para saber más

De manera similar a las unidades anteriores, mucho de lo que recién estudiaste requiere que le dediques tiempo para desarrollar habilidades para el manejo de algoritmos, teniendo siempre en mente el sentido que tiene.

Para reforzar el subtema 3.1.1. Ecuaciones con una incógnita, te recomendamos revisar:

- El capítulo 4 del libro *Álgebra* de Rees y Sparks.
- Las secciones 5.1 a 5.5 del libro *Álgebra* de Elena de Oteyza y sus colegas, disponible en https://books.google.com.mx/books?id=we3f-zkpAesC&printsec=frontcover&dq=inauthor:%22Elena+de+Oteyza+de+Oteyza%22&hl=es&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false
- Las secciones 1.5 a 1.7 del libro *Álgebra intermedia* de Gustafson y Frisk

Para complementar el subtema 3.1.2. Ecuaciones simultáneas con dos y tres incógnitas y ver más ejemplos y ejercicios consulta:

- El video *Problema de sistema de ecuaciones lineales de 3x3*de Julio Ríos que está disponible en http://www.youtube.com/watch?v=2S9IJbQIqaE
- El capítulo 6 del libro *Álgebra* de Rees y Sparks.
- El capítulo 11 del libro*Álgebra* de Elena de Oteyza y sus colegas, disponible en
- El capítulo 3 del libro *Álgebra intermedia* de Gustafson y Frisk

Para que puedas ver más ejemplos y ejercicios del tema 3.2.1. Fórmula general, consulta:

- Las secciones 8.5 y 8.6 del libro *Álgebra* de Rees y Sparks.
- El capítulo 10 del libro Elena de Oteyza y sus colegas *Álgebra*
- Las secciones 8.2 y 8.3 del libro de Gustafson y Frisk *Álgebra intermedia* disponible en

Para reforzar el subtema 3.2.2. Por factorización y observar ejemplos y ejercicios consulta:

- El video *Ecuación cuadrática resuelta por factorización* de Julio Ríos que está disponible en http://www.youtube.com/watch?v=zwMljIgCsAI
- El capítulo 8, y en particular la sección 8.2, del libro *Álgebra* de Rees y Sparks.
- El capítulo 10 del libro Elena de Oteyza y sus colegas *Álgebra*

- El capítulo 8, en particular la sección 8.1, del libro de Gustafson y Frisk *Álgebra intermedia*

Fuentes de consulta

Básica

- Gustafson, R. y Frisk, P. (2005). *Álgebra intermedia*. México: Thomson.
- Oteyza, Elena, et al. (2003). *Álgebra*. México: Pearson Educación
- Rees, Paul K. y Sparks, Fred W. (1998). *Álgebra*. México: Reverté S.A. de C.V.

Complementaria

- Cárdenas, Humberto; Lluis, Emilio; Raggi, Francisco y Tomàs, Francisco (2007). *Álgebra superior*. México: Editorial Trillas.
- Courant, Richard y Robbins, Herbert (2002). *¿Qué son las matemáticas?* México: Fondo de Cultura Económica.
- Kline, Morris (1992). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Meserve, Bruce E. y Sobel, Max A. (2002). *Introducción a las matemáticas*. México: Reverté. Disponible en: http://books.google.com.mx/books?id=nfYTEuuTjFAC&printsec=frontcover&dq=meserve&source=bl&ots=SjaoTatHs-&sig=goH6L3ALfSmi-3p6Fu8DnSefQ9Y&hl=es&sa=X&ei=wgJvULWDF8bgyQGYoICgCQ&ved=0CEAQ6AEwAw
  Swokowski, E.W. y Cole, Jeffery A. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. (12ª edición.) México: Cengage Learning. https://www.udocz.com/apuntes/62863/algebra-y-trigonometria-con-geometria-analitica-swokowski-12th