División de Ciencias Exactas, Ingeniería y Tecnología

Ingeniería en Logística y transporte

3° Semestre

Unidad Didáctica:
Inventarios

Unidad 3. Modelos básicos para la gestión de inventarios

Clave
TSU 14142314/ LIC 13142314

Universidad Abierta y a Distancia de México

Unidad 3. Modelos básicos para la gestión de inventarios

Presentación de la unidad

Ya se acabaron los tiempos en que el cálculo de inventarios se hacía a la ligera; hoy ni siquiera la tiendita de la esquina puede consentir tener pérdidas cuantiosas por no saber estimar la cantidad de artículos a pedir y cuándo pedir, ya que esto ha llevado a muchos de estos negocios a la banca rota. El manejo de los inventarios es tan importante para la gran empresa como para los pequeños negocios. El exceso de inversión en inventarios provocados por una mala planeación o por inversiones muy dosificadas no produce los rendimientos normales esperados por la falta de rotación adecuada o porque se hace inversiones fuera de tiempo. Uno de los factores que lleva a estos errores es la carencia de información relevante y oportuna, que permita analizar las principales variables de decisión. En realidad, muchas empresas no pueden aplicar ni los más elementales modelos de inventarios porque desconocen sus costos de operación y las características de su demanda, es decir, no tienen la precaución de recoger la información sobre su gestión. Ciertamente, es indispensable disponer de información precisa de los parámetros que determinan las variables de decisión, siendo ésta una de las tareas iniciales que deberás abordar en las empresas para hacer uso de los modelos de inventarios.

En el caso de los modelos de inventarios, como dice Bellini (2004), “Se han escrito enciclopedias completas sobre su manejo, por lo que resumir en tan breve espacio, algunos de los criterios fundamentales para su manejo, equivale a lo que los expertos en mercadeo llaman dar una degustación del producto, buscando de esta manera, que los interesados indaguen más adelante, formas de adquirir una mayor cantidad de éste”.

Esta unidad abarca tres grandes temas; el primero, te permitirá acercarte el marco teórico conceptual de los modelos de gestión de inventarios, donde identificarás sus diferencias, en un segundo momento, te exponemos el modelo clásico EOQ (por sus siglas en inglés: *Economic Order Quantity* - Cantidad Económica de Pedido) y sus variantes; finalmente, te presentamos los argumentos técnicos de la administración de los inventarios que debes tener presente en su gestión.

Competencia específica

Explicar el sistema de gestión de inventarios, para reconocer su estructura y función, mediante la descripción de los elementos que lo componen.

Logros a alcanzar

Distinguir los conceptos y tipos de inventarios.
Comprender el proceso de sistema de inventarios.

Unidad 3. Modelos básicos para la gestión de inventarios

- 3.1. Tipos de modelos
  - 3.1.1. Modelo determinista
  - 3.1.2. Modelo probabilístico
  - 3.1.3. Modelo de revisión continúa
- 3.2. Cantidad económica del pedido (EOQ)
  - 3.2.1. El modelo básico de cantidad económica de pedido
  - 3.2.2. Formas de cálculo del lote económico
  - 3.2.3. Políticas de inventarios
- 3.3. Administración de inventarios
  - 3.3.1. Gestión financiera de los stocks
  - 3.3.2. La inflación en la administración de inventario
  - 3.3.3. Estrategias de gestión de inventarios

3.1. Tipo de modelos

En general, existen modelos matemáticos para el control de inventarios, que son usados indistintamente para describir el reabastecimiento con un proveedor externo o para la producción interna. Esto significa que desde el punto de vista del modelo, el control de inventarios y la planeación de la producción con frecuencia son sinónimos (Nahmias, 2007). El principal objetivo de estos modelos está orientado a satisfacer las necesidades de los clientes que pueden presentar una demanda constante, variable en el tiempo, determinista, o aleatoria. Generalmente los modelos de inventario se clasifican de acuerdo con el conocimiento de la demanda en un período determinado, llamándose en este caso deterministas y estocásticos cuando se trabaja con cantidades posibles. Por el tipo de demanda que se analiza, los modelos de inventarios pueden clasificarse de la siguiente manera:

- Modelos de inventario
  - Determinísticos
    - Estáticos (Demanda constante)
    - Dinámicos (Demanda variable en el tiempo)
  - Estocásticos o Probabilísticos
    - Estacionarios (Demanda constante)
    - Dinámicos (Demanda variable en el tiempo)

Modelos de inventario
Fuente: Jiménez (2006)

¿Para qué utilizamos modelos de inventarios?
Generalmente utilizamos los modelos para establecer una política óptima de inventario, que nos permita establecer cuándo colocar un pedido y determinar el tamaño del lote por comprar o fabricar. Lo anterior tiene dos objetivos:

- Mantener cierta cantidad de mercancía en existencia durante un período fijo para minimizar los costos
- Lograr el mejor nivel de servicio al cliente

Por tanto, seleccionar una adecuada política de gestión de inventarios puede incidir de manera significativa en los costos de una empresa. Entonces, el problema fundamental de la administración de inventarios puede describirse con dos preguntas:

1. ¿Cuándo se debe hacer un pedido?
2. ¿Cuánto se debe pedir?

Para responder a estas preguntas, en este subtema te presentaremos una serie de modelos de inventarios que te permitirán establecer las cantidades óptimas del pedido y el momento más conveniente para lograr el costo mínimo.

Antes de entrar en materia, es oportuno hacer una revisión de los componentes fundamentales del sistema de gestión de inventarios para la aplicación y desarrollo de los modelos.

Política de inventario. Está determinada por el cuándo y cuánto debemos de pedir, o fabricar, en el caso del proveedor. La decisión depende del sistema de pedidos que se utilice:

a) punto de orden: conocidos como inventarios perpetuos, mantienen un registro perpetuo de inventarios. Los registros se revisan continuamente y cuando el inventario llega a un nivel predeterminado o **punto de reorden**, se inicia un pedido de reabastecimiento. Es muy común que este método se utilice para cuando existe una gran cantidad de SKU y cuando los costos de manutención de inventarios son considerables. Por ejemplo, en el supermercado, con lectores digitales en las cajas se enlaza con la base de datos de inventario a nivel de almacén, conforme un artículo se pasa por el lector, se registra la transacción en la base de datos y el nivel de inventario se actualiza. En este caso el tiempo de revisión se le llamará revisión continua.

b) revisión periódica: la evaluación de los inventarios se hace a intervalos fijos y predeterminados, por tanto, los niveles de inventario sólo se conocen en puntos discretos del tiempo. Las cantidades solicitadas de abastecimiento o en su caso la fabricación varía. El inventario disponible se compara con el deseado y la diferencia entre los dos niveles es la cantidad que se ordena. Un ejemplo de revisión periódica es la tienda de la esquina que hace una auditoria física de sus existencias para determinar el estado actual de sus niveles de inventario.

Los supuestos. Se hacen sobre el comportamiento y las características de la demanda. Frecuentemente son lo más importante para determinar el nivel de complejidad o simplificación del modelo de control. Por todos es conocido que la demanda de un bien no es controlable, sin embargo, su magnitud y frecuencia traducida en abastecimiento puede ser controlable. En los modelos de inventarios, los supuestos plantean las siguientes situaciones sobre la demanda:

- **Demanda constante.** En los modelos más sencillos de inventarios se hace el supuesto de que la demanda presenta una tasa constante de consumo. Como verás más adelante, el modelo de cantidad económica de pedido CEP o EOQ y sus extensiones se basan en este supuesto.
- **Demanda variable**. Es la más común y se presenta en distintos contextos. Como su nombre lo indica varía de período a período, y se conoce con más certeza a partir de las estadísticas que presenta.
- **Demanda conocida.** Cuando la demanda se conoce con cierto grado de precisión en términos de probabilidad, se dice que existe certidumbre en la toma de decisiones. Si las estadísticas nos ayudan a pronosticar razonablemente bien la demanda de períodos futuros, podríamos plantear un modelo de inventario que suponga que todos los pronósticos son precisos; entonces, estaríamos hablando de demanda conocida.
- **Demanda desconocida**: Se le dice así, cuando es posible conocer su distribución de probabilidad. En este caso se suele asumir *a priori* la distribución de la demanda y después, cada vez que se dispone de una nueva observación de la demanda, se actualiza el parámetro estimado usando la regla de Bayes.

Dependiendo de las condiciones operacionales del sistema de inventarios, los supuestos permiten definir modelos más o menos complejos. Entre estos aspectos influyentes que condicionan el sistema, destacan los siguientes:

- **Tiempo de demora o retardo.** Se define como el lapso de tiempo que transcurre desde el momento en que se coloca un pedido hasta el momento que llega el artículo, en el contexto de la cadena de suministro le llaman **tiempo de ciclo** o ***lead time***. Su valor es importante, debido a que representa la medida de respuesta del sistema (McKeown, 2000). Un supuesto común en los modelos es que este valor sea cero, situación que nunca puede suceder en la práctica; ni siquiera cuando los artículos se producen internamente; en este caso, el **tiempo de demora** es el tiempo requerido para fabricar un lote de artículos. Aquí representaremos al tiempo de demora con letra griega τ (tau) y se expresará en las unidades de tiempo de la demanda. Al igual que la demanda, el tiempo de demora puede ser constante y puede conocerse con certidumbre o ser de naturaleza probabilística. El análisis es mucho más complejo si se supone que el periodo de retardo es una variable aleatoria (Abdul-Jalbar, 2005).

- **Exceso de demanda.** Ocurre agotamiento de existencias cuando la demanda excede la cantidad disponible. Cuando la demanda no puede satisfacerse de inmediato con el nivel de existencias disponibles, el diseño de los modelos de inventarios supone que se pierde, para ser satisfecha fuera del sistema o se recorre y acumula, para ser satisfecha en el futuro, lo que McKeown (2000) denomina **pedidos retroactivos**. Otras posibilidades que se manejan es una acumulación parcial; es decir, parte de la demanda se acumula y parte se pierde o existe impaciencia por parte del cliente; esto es, que si el pedido del cliente no se satisface dentro de un tiempo determinado se cancela. La gran mayoría de los modelos de inventario, en especial los que se aplican en la práctica, suponen acumulación total de exceso de la demanda (Nahmias, 2007).

- **Horizonte de tiempo**. Define el período sobre el cual el nivel de inventarios estará controlado. Los modelos de inventarios regularmente se plantean en dos horizontes de tiempo: finito e infinito. Por lo general, el horizonte infinito es utilizado cuando la demanda es estacionaria o constante, se asume que los parámetros toman el mismo valor durante un largo periodo de tiempo; mientras que los modelos con horizonte finito son aplicados a problemas con demanda dinámica; es decir, calculada para cada periodo de tiempo, por medio de técnicas de pronósticos o series de tiempo.

La complejidad del modelo resultante depende de los supuestos que se hagan acerca de los diversos parámetros del sistema. La mayor diferencia se da entre los modelos que suponen una demanda conocida o determinística y los que suponen demanda aleatoria o probabilística. Por lo anterior, a continuación, revisaremos por separado esta clase de modelos.

3.1.1. Modelo determinista

Se le llama demanda determinística o determinista cuando las cantidades pedidas en los periodos subsiguientes se conocen con certeza. La demanda sobre periodos iguales de tiempo puede ser constante o puede variar.

En la Unidad 1 de esta Unidad Didáctica revisaste brevemente los **costos relevantes** de la gestión de inventarios, en este subtema, ampliaremos dichos conceptos para que comprendas mejor su aplicación en los modelos de inventario. Entre los costos relevantes que analizarás a continuación se encuentran los siguientes: **costo por mantener inventarios**; **costo por pedir** y **costo de penalización**.

Costo por mantener el inventario

Winston (2005), señala que éste es el costo de retener o poseer una unidad de inventarios durante un período de tiempo y Nahmias (2007) indica que es la suma de todos los costos proporcionales a la cantidad de inventario disponible físicamente en cualquier punto en el tiempo; en este orden de ideas, podemos decir que es un costo en el que se incurre por mantener un determinado nivel de inventarios durante un tiempo específico. Aunque Krajewski y Ritzman (2000) aclaran que es un costo variable que se paga para tener artículos a la mano. McKeown (2000) señala que en los modelos de inventarios, el costo de conservación generalmente se expresa en costo por unidad de tiempo y que el análisis puede simplificarse sí suponemos que es proporcional al número promedio de unidades del inventario.

Nahmias (2007) y McKeown (2000) coinciden que entre los componentes del costo de mantener el inventario se incluyen diversos aspectos aparentemente no relacionados, como los siguientes:

- Costo de suministrar el espacio físico para almacenar los artículos
- Impuestos y seguros
- Roturas, fracturas, deterioros y obsolescencia
- Costo de oportunidad de una inversión alternativa

En general, para que las empresas sean rentables, deben lograr tasas de interés mayores sobre la inversión de sus inventarios que aquellas que le puedan otorgar los bancos si el dinero lo colocan en una cuenta de ahorro. En este sentido, surge la pregunta: ¿Cuál debería ser la tasa de interés que les permita justificar la inversión de su capital en inventarios? Nahmias, reconoce que es muy difícil calcular esta tasa de interés dado el costo de oportunidad, por tanto, propone utilizar el término **costo de capital** para conocer la magnitud del costo por mantener inventarios.

Supongamos que el costo de mantener el inventario es una tasa agregada de interés formada por cuatro componentes:

35% = Costo de capital
7% = Impuestos y seguros
6% = Costo de almacenamiento
3% = Costo de roturas y deterioros
51% = Cargo total por interés

Se evalúa un cargo de 51 centavos por cada dólar que se ha invertido en inventarios durante un periodo de un año. Entonces, un artículo valuado en $3,645 pesos tendría un costo anual de inventario $\boldsymbol{h} =$ (0.55) ($3,645 pesos) = $2,004.75 pesos. Si se mantuvieran 450 artículos de esos durante 7 años, el costo total de inventario durante los 7 años sería de:

$$(\mathbf{7})(\mathbf{450})(\mathbf{2004.75}\boldsymbol{pesos}) = \mathbf{6'314,962}\ \boldsymbol{pesos}$$

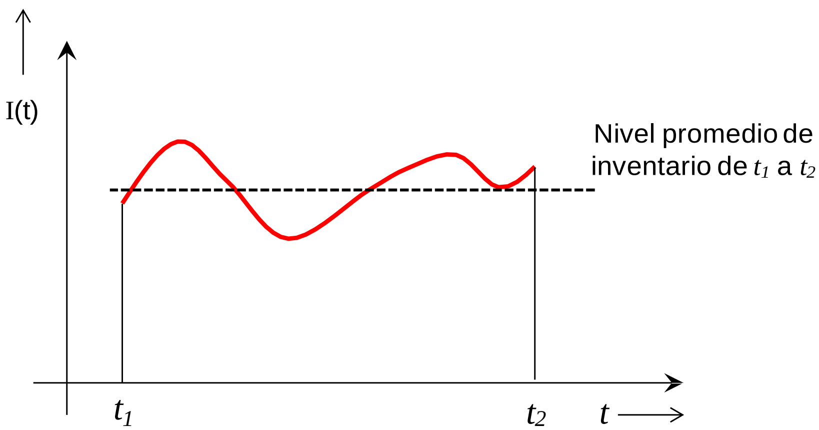
Ahora supongamos que durante el periodo de 7 años el nivel de inventario no permaneció fijo en 450, sino que varió continuamente, entonces, ¿Cómo se calcularía el costo de mantener el inventario en este caso?

Por lo general el inventario se mide en unidades y no en unidades monetarias, por tanto, conviene expresar el costo de manutención en pesos por unidad por año ($/u-año) con la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{h = Ic}$$

$\boldsymbol{h}$ = Costo anual del inventario
$\boldsymbol{I}$ = Tasa anual de interés
$\boldsymbol{c}$ = Valor monetario de una unidad de inventario

Desde luego se espera que los niveles de inventario cambien a través del tiempo, es decir, decrezcan cuando los artículos se despachen para satisfacer la demanda y aumenten cuando se producen unidades o lleguen pedidos. Con relación a esto, vamos a suponer que el nivel de inventario $\boldsymbol{I(t)}$ durante cierto intervalo $(\boldsymbol{t_1, t_2})$, tiene el comportamiento que se muestra en la siguiente gráfica:

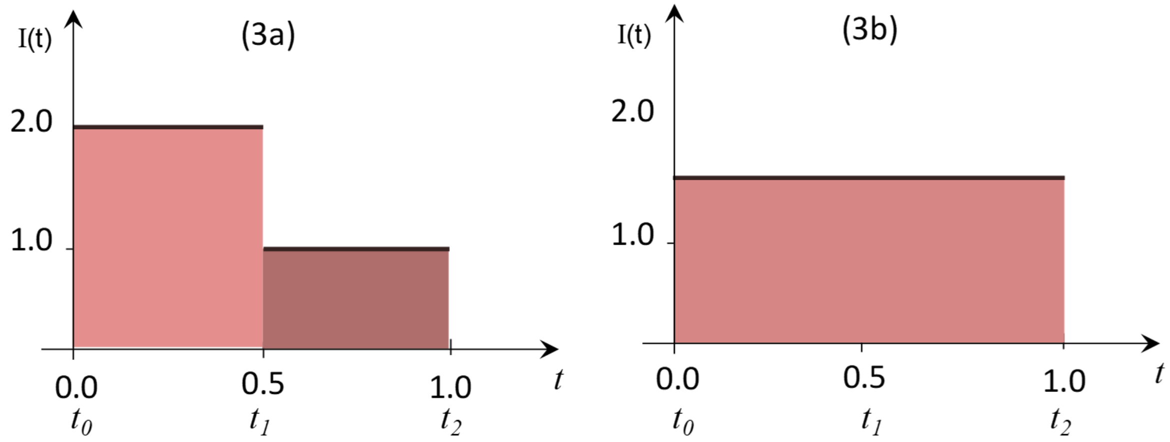


Inventarios en función del tiempo
Fuente: Adaptado de Nahmias (2007)

Entonces, el costo por mantener inventarios en cualquier punto en el tiempo es proporcional al nivel de inventario en ese momento. En general, el costo total de mantener el inventario incurrido entre $\boldsymbol{t_1}$ y $\boldsymbol{t_2}$ es $\boldsymbol{h}$ multiplicado por el área bajo la curva de $\boldsymbol{I(t)}$, es decir:

$$\boldsymbol{Costo\ total\ de\ mantener\ el\ inventario = h * I(t)}$$

Por ejemplo, de acuerdo con esta formulación, en las figuras (3a) y (3b) puedes ver que las áreas representan el nivel de inventario en diferentes momentos $\boldsymbol{I(t)}$. En la gráfica (3a) el costo total de manutención de inventario es de $[(\boldsymbol{0.5 * 2.0}) + (\boldsymbol{0.5 * 1.0})] * \boldsymbol{h}$. En la gráfica (3b) se obtiene directamente el valor de $\boldsymbol{1.5 * h}$.



Inventario en diferentes instantes $\boldsymbol{t}$

Cuando $\boldsymbol{I(t)}$ se describe con una recta, su valor promedio es obvio, por ejemplo, $\boldsymbol{I(t) = 1.5}$, en la figura (3b). Como puedes observar en la figura (3a), la curva de $\boldsymbol{I(t)}$ es compleja, por tanto, el nivel promedio de inventario se determinará calculando la integral de $\boldsymbol{I(t)}$ sobre el intervalo $(\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t_2})$, dividiéndola entre $\boldsymbol{t_2 - t_0}$.

$$\boldsymbol{I(t_0, t_2) = \frac{\int_{t_0}^{t_2} I(t)\, dt}{(t_2 - t_0)}}$$

Por lo tanto, el costo total de mantener un inventario entre los instantes $\boldsymbol{t_0}$ y $\boldsymbol{t_2}$ queda:

$$\boldsymbol{\int_{t_0}^{t_2} hI(t)dt = h(t_0, t_2) * I(t_0, t_2)}$$

Costo de pedido o por ordenar

Besley y Brigham (2008) señalan que estos costos están relacionados con la colocación y la recepción de una orden o pedido para comprar nuevo inventario. En su definición destacan dos propiedades de este tipo de costos:

- los costos asociados a cada orden son fijos, sin importar el tamaño del pedido
- los costos que incluyen las actividades de gestión básicas, por ejemplo: costo por transmitir datos, teléfono, correos electrónicos, fax y demás; aunque nosotros debemos de pensar también en los salarios del personal que interviene, equipo y programas de cómputo empleado para generar las órdenes; revisión de la orden, trabajo.

De igual modo, desde el punto de vista del proveedor o fabricante, a estos costos se le conoce como costos de *setup* o *preparación* y se producen cuando se atiende un pedido del cliente e incluyen: limpieza y preparación de máquinas, mantenimiento de equipos, atención a clientes, etcétera.

Nahmias (2007) va más lejos y divide el costo por ordenar en dos componentes:

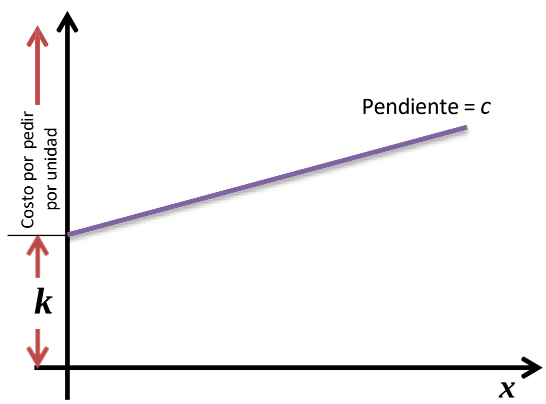
1. Costo fijo. El costo fijo, $\boldsymbol{k}$, se incurre independientemente del tamaño del pedido, mientras no sea cero.
2. Costo variable. El costo variable, $\boldsymbol{c}$, es incurrido con base en el número de unidades.

Como revisaste anteriormente, a $\boldsymbol{k}$ también se le llama costo de preparación.
$\boldsymbol{c}$ = costo proporcional de pedido.
$\boldsymbol{C(x)}$ = costo de pedir (o producir) $\boldsymbol{x}$ unidades.

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{C(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \textbf{sí } \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{k + cx}, & \textbf{sí } \boldsymbol{x > 0} \end{cases}$$

Esta función se representa en la siguiente figura:



Función del costo del pedido

Costo de penalización

Este tipo de costo también es llamado costo escasez, faltante o de agotamiento de inventario y es resultado de no disponer de existencias suficientes para satisfacer la demanda. Como ya se dijo al inicio, si hay un exceso de demanda puede acumularse o perderse. En el caso de la acumulación, el costo de penalización comprende todos los costos contables y/o demora en que pudiera incurrirse. El costo de penalización se representa con el símbolo $\boldsymbol{p}$, entonces, cada vez que haya una demanda que no se pueda satisfacer de inmediato, se incurre en un costo $\boldsymbol{p}$, independiente de lo que se tarde en cumplir con la demanda.

Barfield y otros (2004) afirman que no es fácil medir este tipo de costos y estiman que algunos de los costos involucrados podrían incluir la pérdida de prestigio ante los clientes, la pérdida de utilidades por no ser capaz de realizar ventas, se incurre en costos adicionales por órdenes y embarque que atienden fuera de programa y la pérdida de clientes.

En el caso de una compañía de manufactura, uno de los primeros costos que se incurren se debe al ajuste que se tiene que hacer a la producción, como resultado de no disponer de inventarios, ya sea que se reprograme o ésta se suspenda, llevándolos a incurrir en costos de preparación de máquinas, antes de comenzar la producción nuevamente (Barfield y otros, 2004).

3.1.2. Modelo probabilístico

De acuerdo con Alfalla (2007), la gestión de inventarios se analiza bajo tres situaciones distintas. La primera, bajo condiciones de certeza o determinísticas, esto es, cuando se conoce el valor exacto de las variables; segundo, cuando existen condiciones probabilísticas en las que se conoce el valor exacto de las variables y su distribución de probabilidad y tercera, cuando existe incertidumbre, es decir, cuando se tiene un desconocimiento total del valor de las variables.

Anderson y Sweeney (2004) nos indican que en situaciones en las que la tasa de demanda no es determinística, existen modelos que tratan la demanda como probabilística y la describen mejor con una densidad de probabilidad. Ríos y otros (2008) confirman que los inventarios probabilísticos con demanda independiente se caracterizan por el supuesto de que se conoce la probabilidad de distribución de la demanda durante un determinado período, pero que se desconoce la demanda que se gesta durante ese período, por tanto, añaden que, si establecemos el punto de pedido en dicho período, existe la posibilidad de que el inventario se agote y tener que enfrentar un costo por faltantes.

En general, las ventas exactas de pan en una panificadora o de cualquier otro negocio, no pueden predecirse con toda precisión, pero las estadísticas de eventos pasados nos pueden proporcionar información muy útil para estructurar un modelo matemático probabilístico, el cual nos permita reducir la incertidumbre que casi siempre prexiste durante el proceso de gestión de inventarios de esta clase de actividades.

Diversos autores (Abdul-Jalbar, 2005; Winston, 2005; Ríos y otros, 2008) reconocen que, en casi todos los problemas de administración de inventarios, la demanda se caracteriza por tener cierto grado de incertidumbre, lo que cuestiona la valía de los modelos deterministas de inventario; sin embargo, Nahmias (2007) nos aclara que existen dos razones para estudiar esos modelos. El primero, es que crean una plataforma para entender las tendencias de la administración de inventarios y segundo, que son muy buenos modelos de apoyo para a la empresa, aunque dependen del nivel de incertidumbre en la demanda. Por esto último, este autor señala que la demanda ($\boldsymbol{D}$) puede tener una componente determinística y otra aleatoria ($\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D_{Det}} + \boldsymbol{D_{Ale}}$); sin embargo, establece que es válido considerar a la demanda determinística por las siguientes circunstancias, aunque $\boldsymbol{D_{Ale}}$ no sea cero:

1. Cuando la varianza del componente aleatorio, $\boldsymbol{D_{Ale}}$, es pequeña en relación con la magnitud de $\boldsymbol{D}$.
2. Cuando la variación predecible es más importante que la variación aleatoria.
3. Cuando la estructura del problema es demasiado compleja para incluir una representación explícita de la aleatoriedad en el modelo.

Tratamiento de los procesos aleatorios

Con frecuencia, los términos probabilístico e incertidumbre se utilizan por igual y los términos aleatorio y estocástico se emplean constantemente en este tipo de modelos. Un poco para diferenciarlos puede decirse que lo estocástico proviene de la teoría estadística de los procesos cuya evolución en el tiempo es aleatoria, tal como la secuencia de las tiradas de un dado perteneciente al juego de azar, la cual define un espacio muestral cuyos elementos establecen buenas razones para creer que se verificará o sucederá, con objeto de obtener cierta probabilidad o certidumbre en relación a sus resultados; esto es, se reduce la duda o falta de seguridad sobre algo, es decir, la incertidumbre.

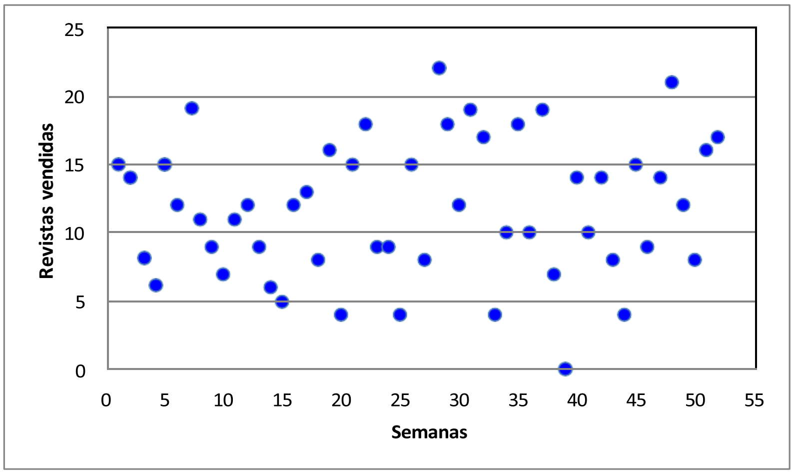
Para clarificar los términos aleatoriedad e incertidumbre en el contexto de los inventarios, utilicemos el siguiente planteamiento de Nahmias (2007):

El dueño de un puesto de periódicos registró la demanda semanal de una revista que vendió durante un año, en la que incluyó la cantidad de ejemplares que realmente vendió más la cantidad de pedidos que no pudo surtir. Las demandas observadas durante las 52 semanas se presentan en el siguiente cuadro.

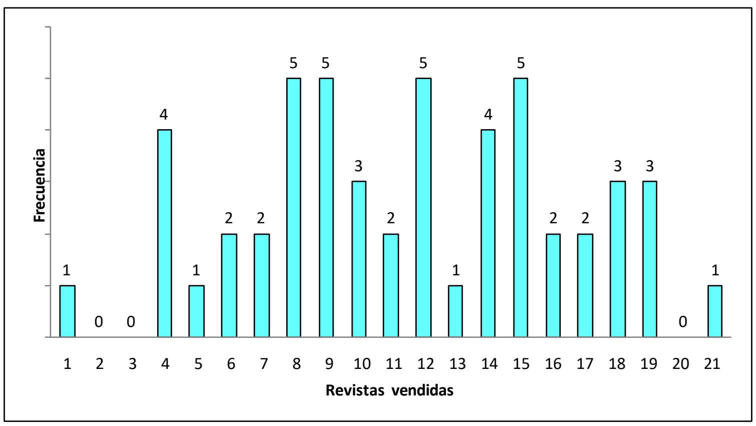
Demandas observadas por cada semana

15	19	9	8	9	22	4	7	8	21
14	11	6	16	9	18	10	0	4	12
8	9	5	4	4	12	18	14	15	8
6	7	12	15	15	19	10	10	9	16
15	11	13	18	8	17	19	14	14	17
12	12	Demanda total en el año = 608							

Derivado de la información de las demandas observadas, en la figura **Patrón semanal de ventas**, puedes observar que gráficamente no existe un patrón en especial en los datos, por lo que es difícil predecir la demanda de la revista; no obstante, los datos históricos de la demanda los podemos montar en un **histograma** de **frecuencias** como el de la figura siguiente, en donde podemos notar el número de veces que se observó la misma cantidad de ventas u ocurrencia por semana, además, de que nos permite ver una tendencia más evidente.



Patrón semanal de ventas



Histograma de frecuencias de 52 semanas de venta de la revista

En términos generales, el histograma de frecuencias lo podemos utilizar para estimar un valor específico de la probabilidad de que "*x*" cantidad de ejemplares de la revista se vendan en cualquier semana. Este valor puede obtenerse dividiendo la cantidad de veces que se observó la ocurrencia (frecuencia) de la demanda durante el año, entre 52. Por ejemplo, la probabilidad de que en una semana se vendan 12 ejemplares es de 5/52 = 0.0962 y que se vendan 6, es de 2/52=0.0385, los resultados completos los puedes ver en el cuadro **Cálculo de probabilidades empíricas**. Al conjunto de todas las probabilidades publicadas en dicho cuadro, se le denomina *distribución de probabilidades empíricas*. De manera similar, estamos en posibilidad de conocer la *probabilidad acumulada* de que se vendan en total "*p*" revistas en el año. Por ejemplo, deseamos conocer la probabilidad de que se vendan 15 revistas o menos, es 15/52 = 0.2885; que corresponde al *valor acumulado empírico* de la suma individual de las *probabilidades empíricas* de las frecuencias: 1+0+0+4+1+2+2+5.

Cálculo de probabilidades empíricas

CLASE	FRECUENCIA	PROBABILIDADES EMPÍRICAS	ACUMULADO EMPIRICO
1	1	0.0192	0.0192
2	0	0.0000	0.0192
3	0	0.0000	0.0192
4	4	0.0769	0.0962
5	1	0.0192	0.1154
6	2	0.0385	0.1538
7	2	0.0385	0.1923
8	5	0.0962	0.2885
9	5	0.0962	0.3846
10	3	0.0577	0.4423
11	2	0.0385	0.4808
12	5	0.0962	0.5769
13	1	0.0192	0.5962
14	4	0.0769	0.6731
15	5	0.0962	0.7692
16	2	0.0385	0.8077
17	2	0.0385	0.8462
18	3	0.0577	0.9038
19	3	0.0577	0.9615
20	0	0.0000	0.9615
21	1	0.0192	0.9808
22	1	0.0192	1.0000
TOTAL	52	1.0000	--

A pesar de que las probabilidades empíricas pueden emplearse para hacer análisis lo suficientemente buenos, existen tres inconvenientes para su uso:

a) Se requiere mantener un registro histórico de la demanda para cada artículo. Que puede llegar a ser costoso y tedioso.
b) Como en el caso revisado, la distribución debe expresarse como 22 probabilidades distintas.
c) Se torna complejo calcular las políticas óptimas de inventarios con distribuciones empíricas.

Por todo lo anterior, es más conveniente aproximar la historia de la demanda con una distribución continua. La distribución más usada para aplicaciones de inventarios es la normal. La razón principal de ello es que modela adecuadamente las fluctuaciones de la demanda. Sin embargo, debe usarse con cuidado el modelo normal de la demanda, porque admite la posibilidad de valores negativos. Al usar la distribución normal para analizar un fenómeno no negativo como la demanda, la probabilidad de una observación negativa debe ser muy pequeña, por ejemplo, menor a 0.1 sería suficiente para evitar que fuese relevante.

Como todos sabemos, la distribución normal queda determinada por dos parámetros: la media $\boldsymbol{\mu}$ y la varianza $\boldsymbol{\sigma}^2$. Estos pueden estimarse partiendo de una historia de la demanda, por medio de la media de la muestra, $\bar{\boldsymbol{D}}$ y de la varianza de la muestra $\boldsymbol{S}^2$. Sean $\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \ldots, \boldsymbol{D_n}$, $\boldsymbol{n}$ observaciones de la demanda en el pasado, entonces:

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_1 - \bar{D})^2$$

La función de densidad normal, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, se expresa con la fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \text{ para } -\infty < x < +\infty$$

Para ejecutar la función, $\boldsymbol{\mu}$ debe sustituirse por el estimador $\bar{\boldsymbol{D}}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ por el estimador $\boldsymbol{s}$. Para nuestro caso, de los datos de revistas vendidas por semana, los valores de la media y desviación estándar son los siguientes:

Media	$\mu = \bar{D}$	11.69
Desviación estándar	$s = \sigma$	5.02

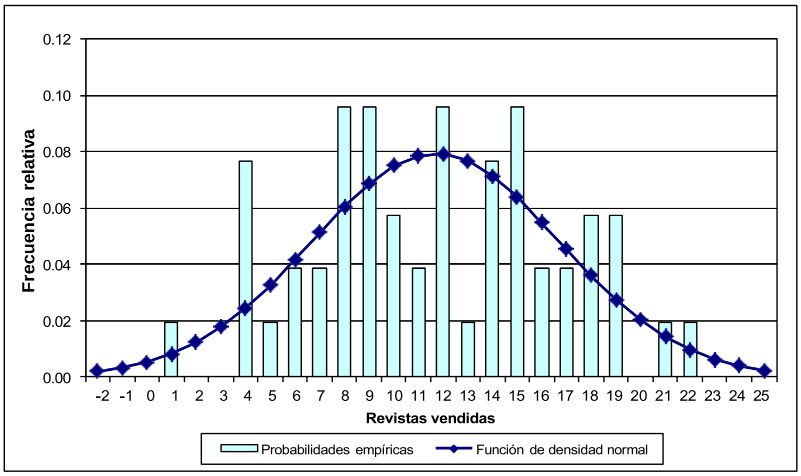
A continuación, se muestran los resultados de la función de densidad normal que resulta al hacer las sustituciones de la media y la desviación estándar en la función de densidad normal. En la siguiente tabla se pueden apreciar los mismos.

Cálculo de probabilidades empíricas y densidad normal

CLASE	FRECUENCIA	PROBABILIDADES EMPÍRICAS	FUNCIÓN DE DENSIDAD NORMAL $f(x)$
1	1	0.0192	0.0082
2	0	0.0000	0.0123
3	0	0.0000	0.0177
4	4	0.0769	0.0246
5	1	0.0192	0.0327
6	2	0.0385	0.0418
7	2	0.0385	0.0513
8	5	0.0962	0.0606
9	5	0.0962	0.0688
10	3	0.0577	0.0751
11	2	0.0385	0.0787
12	5	0.0962	0.0793

13	1	0.0192	0.0768
14	4	0.0769	0.0715

15	5	0.0962	0.0640
16	2	0.0385	0.0550
17	2	0.0385	0.0454
18	3	0.0577	0.0361
19	3	0.0577	0.0275
20	0	0.0000	0.0202
21	1	0.0192	0.0142
22	1	0.0192	0.0097
TOTAL	52	1.0	0.9924



Histograma de frecuencia y aproximación normal

En la práctica se usa el suavizamiento exponencial para actualizar recursivamente los estimados de la media y la desviación estándar de la demanda. La desviación estándar se estima con la desviación absoluta media (DAM, por sus siglas en inglés). Sea $\bar{D}_t$ el estimado de la media después de observar la demanda D_t y sea DAM_t el estimado de la DAM, entonces:

$$\bar{D}_t = \propto D_t + (1 - \propto)\bar{D}_{t-1}$$

$$DAM_t = \alpha |D_t - \bar{D}_{t-1}| + (1 - \propto) DAM_{t-1}$$

en la que $0 < \propto < 1$ es la constante de suavizamiento. Para la demanda con distribución normal,

$$\sigma \approx 1.25 * DAM$$

Por lo regular, la constante de suavizamiento se usa con valor de $\propto = 0.1$ para asegurar la estabilidad en los estimandos.

Optimización en los procesos aleatorios

La optimización en los problemas de producción equivale generalmente a determinar una regla de control que logre el costo mínimo. Sin embargo, cuando la demanda es aleatoria, el mismo costo incurrido es aleatorio y ya no es obvio cuál debe ser el criterio de optimización. La motivación para optar por el criterio del valor esperado es que los problemas de control de inventarios son, por lo general, problemas dinámicos. En algunas situaciones podrá suceder que el valor esperado no sea el mejor criterio de optimización.

Cuando se adquiere un producto sólo una vez, no es obvio que lo adecuado sea minimizar los costos esperados. En ese caso, por lo general lo más adecuado es maximizar la probabilidad de algún evento. Sin embargo, debido a la naturaleza dinámica de la mayoría de los problemas de producción, el criterio del valor esperado se usa virtualmente en todas las aplicaciones estocásticas de control de inventarios (Nahmias, 2007).

Definiciones útiles

El desarrollo de modelos probabilísticos supone la demanda $\boldsymbol{D}$ como una función aleatoria continua y no negativa con función de densidad de probabilidad $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y función de densidad acumulada $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

La variable de decisión $\boldsymbol{Q}$ es la cantidad de unidades que se comprarían al principio del período.

$\boldsymbol{c_0}$ = costo del inventario positivo, por unidad, que queda al final del periodo, que llamaremos *costo de excedentes*.

$\boldsymbol{c_u}$ = costo de la demanda insatisfecha, por unidad, que bien puede considerarse como el costo por unidad de inventario negativo final, al que le llamaremos *costo de faltantes.*

Un esquema general para analizar la mayoría de los problemas estocásticos de inventario es el siguiente:

1. Deducir una ecuación del costo incurrido en función de la variable aleatoria $\boldsymbol{D}$ y también de la variable de decisión $\boldsymbol{Q}$.
2. Determinar el valor esperado de esta ecuación con respecto a la función densidad o la función probabilidad de la demanda.
3. Calcular el valor de $\boldsymbol{Q}$ que minimice la función costo esperado.

Política óptima. Su objetivo del análisis es calcular la $\boldsymbol{Q^*}$ (cantidad óptima) que minimiza los costos esperados incurridos al final del periodo. Para ello considerar las siguientes relaciones matemáticas:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Si\ c_u < c_o,} & \text{Entonces, } \boldsymbol{Q^* = z\sigma - \mu} \\ \boldsymbol{Si\ c_u > c_o,} & \text{Entonces, } \boldsymbol{Q^* = z\sigma + \mu} \\ \boldsymbol{Si\ c_u = c_o,} & \text{Entonces, } \boldsymbol{Q^* = \mu} \end{array}$$

Relación crítica

Sea $\boldsymbol{F(Q^*)}$ la probabilidad de que la demanda no sea mayor que $\boldsymbol{Q^*}$ $(\boldsymbol{P(D \leq Q^*)})$; la relación crítica es la probabilidad de satisfacer toda la demanda durante el período si se compra $\boldsymbol{Q^*}$ unidades al inicio de él.

$$\boldsymbol{F(Q^*) = P(D \leq Q^*) = \frac{c_u}{(c_0 + c_u)}}.$$

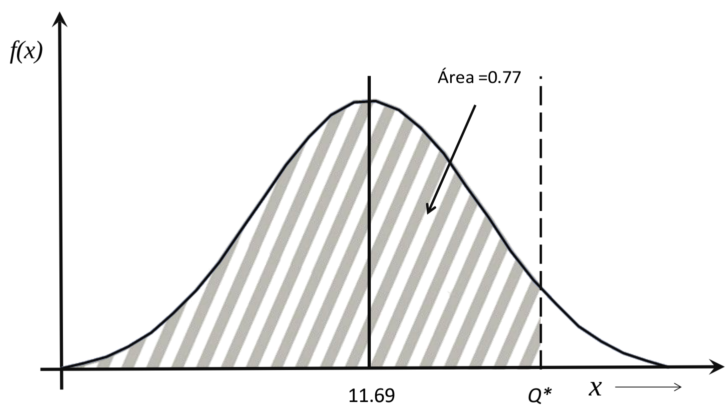
Nota: la ecuación anterior no es igual a la proporción de demandas satisfechas. Cuando $c_0 = c_u$, ➔ $F(Q^*) = 1/2$; en este caso, Q^* es la mediana de la distribución de la demanda. Si la densidad es simétrica, como la densidad normal, la media y la mediana son iguales.

Ejemplo:
En el caso de las revistas, el vendedor tiene las siguientes transacciones:

CONCEPTO	POR REVISTA	COSTO DE EXCEDENTES (c_o)	COSTO DE FALTANTES (c_u)
Costo de compra	0.25		
Costo de recuperación por revista no vendida	0.10	0.15	
Precio de venta al público	0.75		
Utilidad	0.50		0.50

La relación crítica es: $F(Q^*) = \frac{c_u}{(c_0+c_u)} = \frac{0.50}{(0.15+0.50)} = 0.77$

Por tanto, el número de revistas que debemos comprar debe ser tal que satisfaga la demanda semanal con una probabilidad de 0.77; es decir, la cantidad óptima Q^*, es el 77º percentil de la distribución de la demanda.



Determinación de la cantidad óptima

Dado que $c_u > c_o$; utilizaremos $Q^* = z\sigma + \mu$.
De las tablas de distribución normal y esperanzas parciales, tenemos que para $F(z) = 0.77$, la variable estandarizada $z = 0.74$.
Dado que:

Media	$\mu = D$	**11.69**
Desviación estándar	$s = \sigma$	5.02

Sustituyendo los valores, tenemos:

$$Q^* = \sigma z + \mu = 5.02(0.74) + 11.69 = 15.4 \approx 16$$

Política óptima con demanda discreta

En algunos casos, cuando la demanda media es pequeña, es muy complicado representar fielmente el patrón observado de la demanda usando una distribución continúa, como en el caso de las revistas.

En tal virtud, se supone que la demanda es discreta y a través de una generalización del caso continuo podemos obtener la solución óptima. El caso continuo, el valor de $\boldsymbol{Q}$ en la solución óptima es el que hace que la función de distribución sea igual a la *relación crítica*. En el caso discreto, la función de distribución varía a saltos; esto es, se hace improbable que uno de sus valores sea igual a la relación crítica y esta última, caerá entre dos valores de $\boldsymbol{F(Q)}$, de los que se elegirá a la $\boldsymbol{Q}$ que corresponde al mayor valor.

Por ejemplo, en el siguiente cuadro, rescatamos los valores del acumulado empírico $\boldsymbol{F(Q)}$ y ubicamos el valor de la *relación crítica* de 0.77, el cual podemos observar dónde "cae" en la siguiente figura:

Clase (Q)	*Frecuencia*	*Probabilidades empíricas f(Q)*	*Acumulado empirico F(Q)*
1	1	0.0192	0.0192
2	0	0.0000	0.0192
3	0	[illegible]	0.0192
13	[illegible]	0.0192	[illegible]
14	4	0.0769	0.6731
15	5	0.0962	0.7692
16	2	0.0385	0.8077
17	2	0.0385	0.8462
18	3	0.0577	0.9038
19	3	0.0577	0.9615

Determinación de Q*

Como podemos observar que la *relación crítica* cae entre los valores de $\boldsymbol{Q = 15}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{Q = 16}$, y por redondeo seleccionaremos el de mayor valor ($\boldsymbol{F(Q) = 0.8077}$), la solución óptima es $\boldsymbol{Q^* = 16}$; que es la misma cantidad obtenida con la aproximación normal.

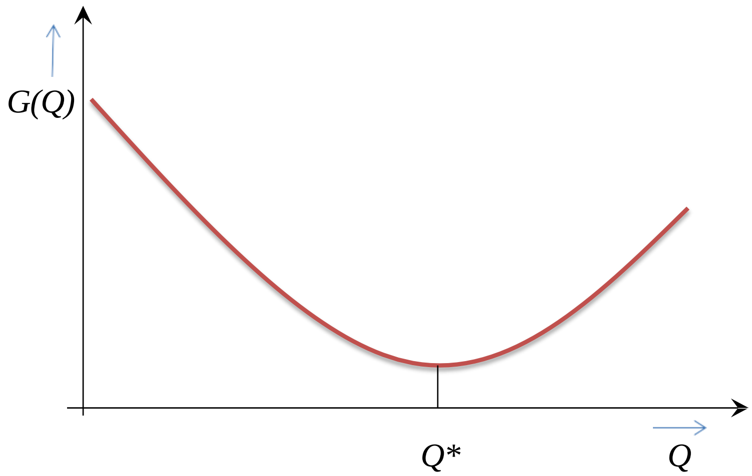
Determinación del pedido con inventario inicial diferente de cero

Bajo el supuesto que el inventario inicial es el sobrante del período anterior; esto es, que tenemos un inventario inicial con valor $\boldsymbol{u > 0}$, la política óptima sufrirá una modificación en comparación del caso cuando $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Esta ampliación es adecuada para productos cuya vida en almacén es mayor que un periodo.

Considera la siguiente función del costo total esperado por excedentes y faltantes.

$$\boldsymbol{G(Q) = c_o \int_0^Q (Q - x)\, f(x) dx + c_u \int_Q^\infty (x - Q) f(x) dx}$$

Supongamos que en la figura siguiente se presenta la curva del costo total esperado por excedentes y faltantes de esta función.



Función de costo esperado

Analicemos la curva de la función de costo esperado, $\boldsymbol{G(Q)}$, Ilustrada en la figura anterior. Si $\boldsymbol{u > 0}$, significa que estamos iniciando en algún punto distinto a 0.

En general, buscaremos estar en $\boldsymbol{Q^*}$ después de ordenar y que éste siga siendo el punto mínimo de la curva de costos.

> Si $\boldsymbol{u < Q^*}$, podríamos lograrlo pidiendo $\boldsymbol{Q^* - u}$; tengo $\boldsymbol{u}$ = 4, necesito $\boldsymbol{Q^*}$ = 16; pediré 16-4 = 12.
> Si $\boldsymbol{u > Q^*}$, de entrada ya estamos pasados de donde queremos estar en la curva. Colocar un pedido solo provocará movernos en la curva de costos hacia arriba, lo cual equivale a mayores costos. En este caso, lo óptimo simplemente es no pedir.

Por lo anterior, la política óptima cuando hay un inventario inicial $\boldsymbol{u > 0}$ es:
Pedir $\boldsymbol{Q^* - u}$ si $\boldsymbol{u < Q^*}$ y
No pedir si $\boldsymbol{u \geq Q^*}$

Observa que $\boldsymbol{Q}^*$ debe interpretarse como el punto hasta el cual debe hacerse el pedido y no como la cantidad a pedir cuando $\boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}$; ambos casos son diferentes.

Extensión a varios periodos de planeación

Como pudimos revisar en el párrafo anterior, el inventario final en cualquier periodo puede transformase en el inventario inicial del siguiente periodo, pero también dicho inventario puede durar hasta varios períodos después, sobre todo cuando se trata de productos industriales, por tanto, también habrá que modificar el valor de $\boldsymbol{Q}^*$ en dichos períodos; de manera especial, se destaca que la interpretación de $\boldsymbol{c_0}$ y $\boldsymbol{c_u}$ cambian por la forma en como se manejan los inventarios. Sólo consideraremos el caso en el que hay una cantidad infinita de periodos restantes.

Consideraciones:

a) Existe una cantidad finita de periodos que abarca el inventario restante.
b) El valor óptimo del punto hasta el cual pedir estará entre las soluciones para un periodo y para un número infinito de periodos.

Como pudo apreciarse en la sección 3.1.1, el costo monetario por unidad ($\boldsymbol{c}$) interviene en la determinación del costo de manutención ($\boldsymbol{h} = \boldsymbol{Ic}$) y, como se verá más adelante, en todas las políticas factibles de operación participará en la determinación del costo promedio de abastecimiento, esto es $\boldsymbol{\lambda c}$. Sucede lo mismo para el vendedor de revistas con horizonte infinito. Mientras el exceso de la demanda se acumule para el siguiente periodo, en todas las políticas factibles sólo se pedirá la demanda durante cualquier periodo largo. De igual manera, mientras el exceso de la demanda se acumule, la cantidad de unidades vendidas sólo será igual a la demanda durante cualquier intervalo largo de tiempo. Por consiguiente, tanto $\boldsymbol{c_u}$ como $\boldsymbol{c_0}$ serán independientes del costo proporcional del pedido, $\boldsymbol{c}$, y del precio de venta del artículo. En este caso se interpreta a:

$\boldsymbol{c_u}$ = costo de pérdida por voluntad.
$\boldsymbol{c_o}$ = costo de manutención de inventario.

Veamos con un ejemplo esta situación y luego saquemos conclusiones:

Supongamos que el dueño del puesto de revistas vende la enciclopedia "Historia del Arte" que sale a la venta cada mes. Dado que es una enciclopedia de colección, el vendedor guarda los ejemplares excedentes para una venta futura. Supóngase que algunos clientes, cuando no la pueden comprar porque se agotó, lo dejan para el siguiente mes. En tal virtud, el dueño del puesto está tratando de determinar cómo abastecerse de inventario; toda vez que cada ejemplar lo compra en $15.50 pesos y lo vende en $37.00 pesos. El vendedor estima que le cuesta $6.80 pesos cuando no tiene la revista en el momento y tiene que acumular la demanda.

En términos generales, las estadísticas señalan que la demanda de esta enciclopedia se comporta como una distribución normal con media igual a 18 y desviación estándar de seis. El dueño aplica una tasa de interés $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{20}\%$, para determinar su costo de manutención de inventario. La pregunta es ¿cuántos ejemplares de la enciclopedia debe comprar al inicio de cada mes?

Solución
De acuerdo con las definiciones antes indicadas, el *costo de excedentes* en este caso es de: (15.50)*(0.20)/12 = 0.2583 pesos; mientras que el *costo de faltantes* es el costo de la pérdida por voluntad de $6.80 pesos. Por tanto, la *relación crítica* es de 6.80/(6.80+0.2583)=0.963; de acuerdo con las tablas de distribución normal y esperanzas parciales, tenemos que para $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{0.9630}$, la variables estandarizada $\boldsymbol{z} = \mathbf{1.79}$. Por tanto:

$$\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{\sigma z} + \boldsymbol{\mu} = \mathbf{6} * (\mathbf{1.79}) + \mathbf{18} = \mathbf{28.74} \approx \mathbf{29}$$

¿Pero qué pasa cuando los clientes tienen otra opción donde comprar su enciclopedia?

a) El exceso de demanda se pierde y no se acumula.
b) El pedido de abastecimiento será distinto al calculado anteriormente.
c) El costo de faltantes $\boldsymbol{c_u}$ será la suma del costo por voluntad ($6.80) más el costo de la venta perdida (37.00-15.50=21.60); es decir, $\boldsymbol{c_u}$= 6.8 + 21.60 = 28.40).
d) El costo de excedente seguirá interpretándose como el costo de manutención de inventarios.

Entonces, la relación crítica es 28.40/(28.40+0.2583) = 0.9909; de acuerdo con las tablas de distribución normal y esperanzas parciales, tenemos que y resulta un valor de z=2.36. Por tanto:

$$\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{\sigma z} + \boldsymbol{\mu} = \mathbf{6} * (\mathbf{2.36}) + \mathbf{18} = \mathbf{32.16} \approx \mathbf{32}$$

Aunque la solución para varios periodos parece tener la generalidad suficiente como para abarcar muchos tipos de problemas reales, padece una limitación seria: no hay costo fijo de pedido. Esto significa que la política óptima, que es pedir hasta llegar a $\boldsymbol{Q}^*$, requiere que el pedido se haga en cada periodo. Desafortunadamente, si se incluye un cargo fijo por colocar un pedido, se vuelve extremadamente difícil determinar las políticas óptimas de operación. Por esta razón se combatirá en una forma distinta el problema de demanda aleatoria cuando hay un cargo fijo de pedido. Se supondrá que los niveles de inventario se revisan en forma continua y se desarrollará una generalización del análisis de cantidad óptima de pedido.

De hecho, la teoría de los modelos de revisión continua se estudia a continuación y se compara contra los modelos de revisión periódica.

3.1.3. Modelos de revisión continua

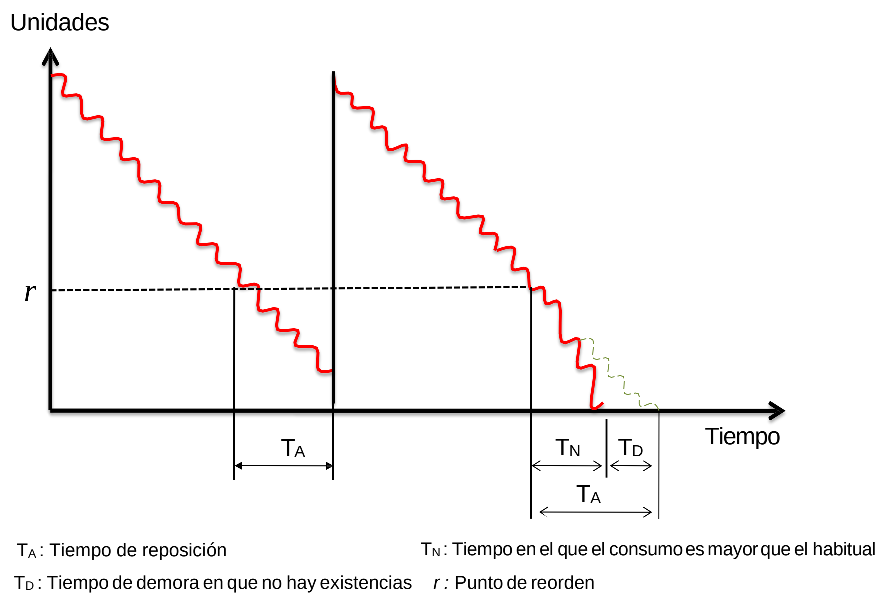
En términos generales, este modelo se conoce también como el modelo de punto de pedido o cantidad fija. Su operación se basa en el establecimiento de un nivel de existencias de seguridad que cubre los días suficientes a la llegada de un nuevo pedido solicitado. El tamaño de pedido de reabastecimiento fijo y previamente determinado, es programado para ser recibido hacia el final del período. En este modelo, se definen la cantidad a pedir $\boldsymbol{Q}$ (fija) y el punto de reabastecimiento, sin embargo, el tiempo entre cada orden es variable, aunque ocasionalmente puede coincidir.

De acuerdo con Matamoros y García (2010), el método se emplea generalmente cuando:

- ✓ Los artículos son fáciles de contabilizar.
- ✓ Los productos son de costo elevado.
- ✓ Requieren un estricto control.
- ✓ No presentan una gran variedad de surtidos.
- ✓ El proveedor o cliente se encuentra relativamente cerca.

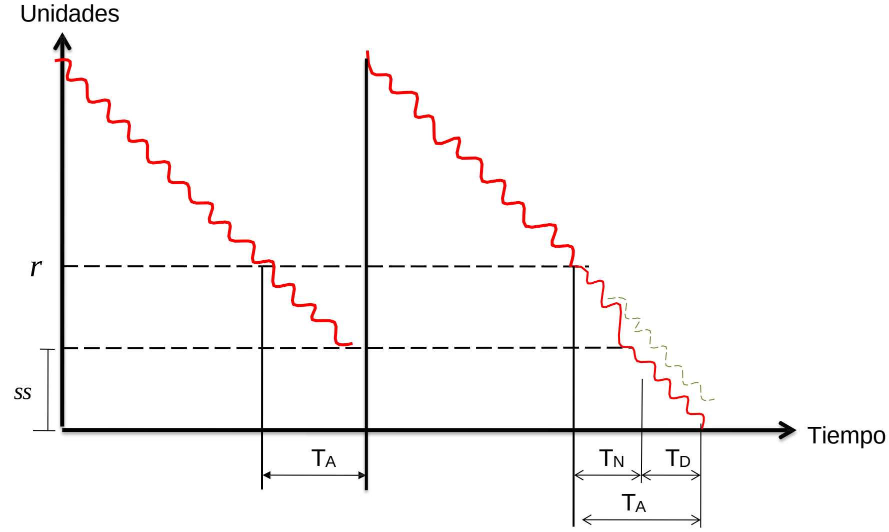
El problema de la gestión de los inventarios

En la figura siguiente, puedes observar la evolución del inventario en un consumo regular. Sea *r* el punto de reorden en que se solicita el reabastecimiento y ($\boldsymbol{TA}$) el tiempo necesario (conocido) que tarda en llegar el pedido; el cual llega en el momento en que el inventario se está terminado; sin embargo, no todos los sistemas son tan precisos y puede esperarse que durante el tiempo de llegada del nuevo pedido se hubiese presentado un mayor consumo, ocasionando que las existencias se agotarán antes de la llegada del mismo, quedando un parte de la demanda insatisfecha.



Consumo regular del inventario
Fuente: Pau i Cos y Navascues (1998)

En caso de disponer *stock* de seguridad, la demanda no satisfecha del caso anterior puede atenderse de manera más eficiente, como lo puedes observar en la siguiente figura:



T_A: Tiempo de reposición

T_N : Tiempo en el que el consumo es mayor que el habitual.

T_D : Tiempo de demora en que no hay existencias

r : Punto de reorden

ss : Stock de Seguridad

Consumo regular del inventario con *stock* de seguridad
Fuente: Pau i Cos y Navascues (1998)

El problema planteado en el párrafo anterior refleja fielmente el modelo de r**evisión continua**, dado que en éste, el monitoreo del inventario es permanente y una vez que se alcanza el punto de reorden *r* se emite una orden de compra. El punto *r* se determina en función de dos parámetros de control: a) nivel de seguridad aceptado y b) por la cantidad consumida durante el tiempo que demora la reposición.

Matamoros y García (2010) explican que la aplicación del sistema de revisión continua generalmente se presentan las siguientes situaciones:

- ✓ La demanda y el plazo de entrega son constantes
- ✓ El plazo de entrega es aleatorio y la demanda constante
- ✓ La demanda es aleatoria y el plazo de entrega constante
- ✓ Son aleatorios tanto la demanda como el plazo de entrega

En resumen, un modelo de revisión continua se caracteriza porque el tamaño del pedido se establece en cantidades fijas, mientras que los plazos de entrega se definen de acuerdo con las necesidades de reabastecimiento, por lo que no tienen que coincidir necesariamente en el tamaño del período de tiempo.

Sistema de revisión continuo en el proceso de consumo

Su característica principal es que la posición de las existencias se monitorea después de cada transacción en forma continua. La filosofía es la misma, cuando la posición del inventario está por debajo de un nivel predeterminado, o sea, se alcanza el punto de reorden, se lanza un nuevo pedido por una cantidad fija. Este sistema es muy utilizado en algunos productos que son vendidos en tiendas departamentales. Para ello, se utilizan sistemas sofisticados de información para el registro y control permanente. Bellini (2004), identifica las siguientes ventajas y desventajas de este sistema.

Ventajas del modelo de revisión continua

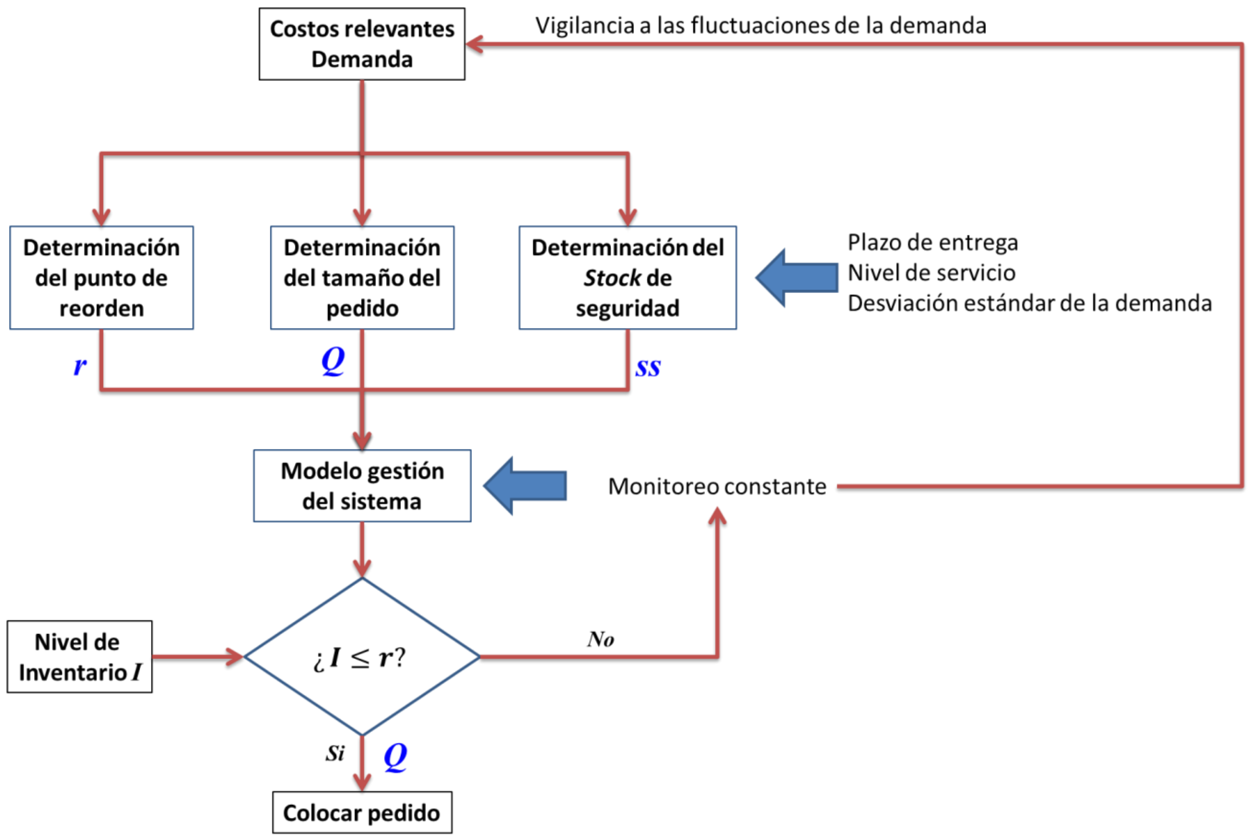
- ✓ Se aprovechan mejor los recursos utilizados.
- ✓ El nivel de servicio se incrementa, debido a que los pedidos normalmente se abastecen con el inventario existente.
- ✓ El reabastecimiento se hace de manera dinámica.
- ✓ • Presenta un elevado costo de equipos (escáneres, etcétera).
- ✓ • Es capaz para aportar el mismo nivel de servicio con menor *stock* de seguridad.

Desventajas del modelo de revisión continua

- ➢ Se incurre en costo mayor porque se invierte más tiempo en la verificación de existencias de los productos.
- ➢ Se realiza un reporte continuo de las transacciones.
- ➢ Se recopilación información constante para la toma de decisiones y ello puede llegar a tener un costo.

Diseño del sistema de revisión continua

El sistema de revisión continua requiere conocimiento detallado de los costos relevantes y la demanda, dado que son el insumo principal del diseño de un sistema de revisión continua. Sin embargo, el corazón del sistema se basa en el modelo de gestión aplicado para evaluar constantemente el inventario cuando éste llega al punto de pedido ($\boldsymbol{r}$) para lanzar el pedido al proveedor sobre la cantidad fija $\boldsymbol{Q}$ y hacer una vigilancia estrecha de las fluctuaciones de la demanda, para prevenir los cambios o rediseño del sistema.



Sistema de revisión continua de inventarios
Fuente: elaboración propia con base en Matamoros y García (2010)

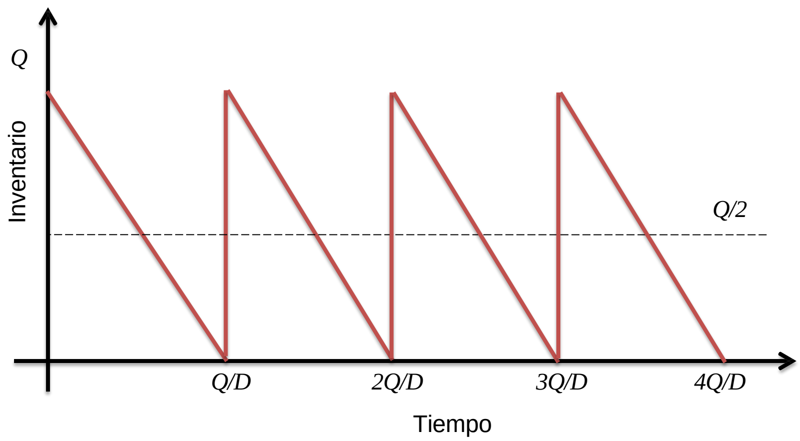
3.2. Cantidad económica del pedido (EOQ)

Por su relevancia histórica y aportación científica a la gestión de inventarios, el modelo de la cantidad económica de pedido, conocido como EOQ (por sus siglas en inglés: *Economic Order Quantity*) o CEP y publicado por Ford Witman Harris en 1913, se ha convertido en un requisito indispensable de estudio para todos aquellos que aspiran a ser profesionales de la logística moderna. El modelo CEP representa las bases elementales de la administración de inventarios, pues a partir de éste se han desarrollado y afinado las técnicas cuantitativas para apoyar la toma de decisiones.

Por lo anterior, en el subtema 3.2.1, revisarás el modelo de la cantidad económica de pedido, que tiene como propósito que reconozcas cómo Harris determinó el tamaño del pedido a través del equilibrio de los costos relevantes de la gestión de inventarios, por ejemplo, costos por ordenar contra los costos de manutención, involucrando los niveles de demanda. En este mismo contexto, en el subtema 3.2.2 analizarás algunas de las extensiones o ampliaciones que diferentes autores le han hecho a este modelo, dando paso a la revisión de diversas políticas de inventario que se utilizan actualmente, mismas que se estudian en el subtema 3.2.3.

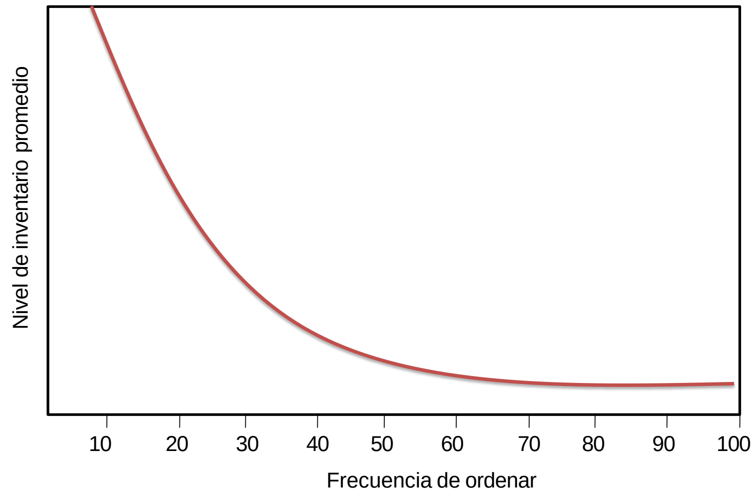
3.2.1. El modelo básico de cantidad económica de pedido

Según Hopp (2004), el nivel de inventario involucra la necesidad de elegir entre *costo y servicio* (*tradeoff*). En términos del costo, el modelo básico de gestión de inventarios permite evaluar la decisión (*tradeoff*) de frecuencia de pedido y el nivel de inventario. La base técnica establece que una mayor frecuencia de pedido (o producción) de un producto, resulta en un menor nivel de inventario en el sistema. Es decir, si un producto experimenta una demanda constante a una tasa de unidades por año D y es surtido instantáneamente en lotes de tamaño Q, será surtido con una frecuencia $F = D/Q$ veces por año y el nivel de inventario promedio será $Q/2$, como puede observarse en la figura siguiente:



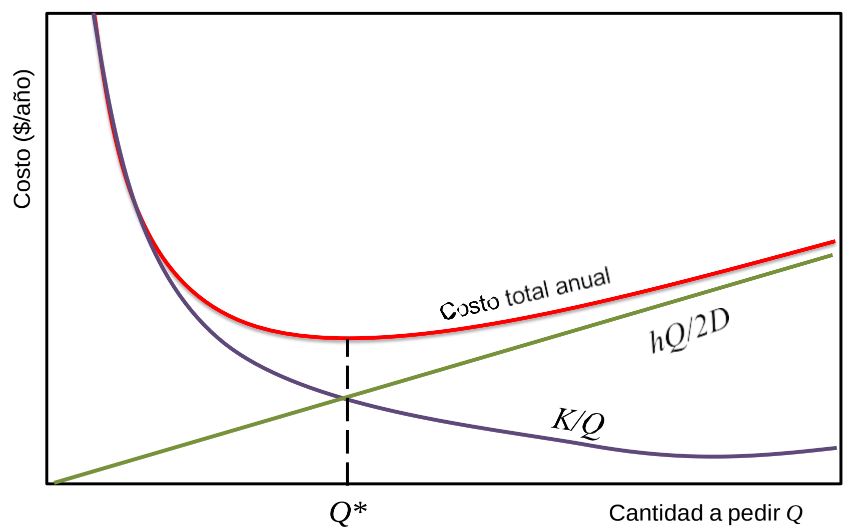
Disponibilidad de inventario con demanda constante
Fuente: Hopp (2004)

Lo anterior significa que cada vez que se duplique la frecuencia de pedido (para disminuir Q) se reducirá a la mitad el nivel de inventario. Por lo tanto, la relación entre el nivel de inventario y frecuencia de pedido mostrará un comportamiento como el que se observa en la figura Nivel de inventario vs frecuencia de ordenar.



Nivel de inventario versus frecuencia de ordenar
Fuente: Hopp (2004)

No obstante, lo anterior, a pesar de que el abasto más frecuente de un producto tiene un gran efecto en el inventario, se ha demostrado también que los beneficios de esta política de inventario disminuyen rápidamente (Jiménez, 2006). Para comparar lo anterior, basta considerar los costos de manutención de inventario y de colocación de órdenes de resurtido, a partir de la relación mostrada en la figura Inventario anual y costos. Por ejemplo, si h es el costo de mantener una unidad de inventario por año y K el costo por colocar una orden de surtido, entonces sus costos anuales serán: $hQ/2$ y KD/Q, respectivamente.



Inventario anual y costos por ordenar como
una función del tamaño del pedido
Fuente: Hopp (2004)

En términos del valor de Q (la cantidad a pedir), en la figura Inventario anual y costos por ordenar, las curvas de costo de manutención y por ordenar acusan un equilibrio económico y minimizan el costo total en el punto donde los costos marginales de manutención son iguales a los costos marginales por ordenar, es decir:

$$\frac{hQ}{2} = \frac{KD}{Q} \quad \rightarrow \quad hQ = \frac{2KD}{Q} \quad \rightarrow \quad Q = \frac{2KD}{Qh}$$

$$Q^2 = \frac{2KD}{h} \quad \rightarrow \quad Q^2 = \frac{2KD}{h}$$

Lo cual implica que el tamaño del lote se calcule con:

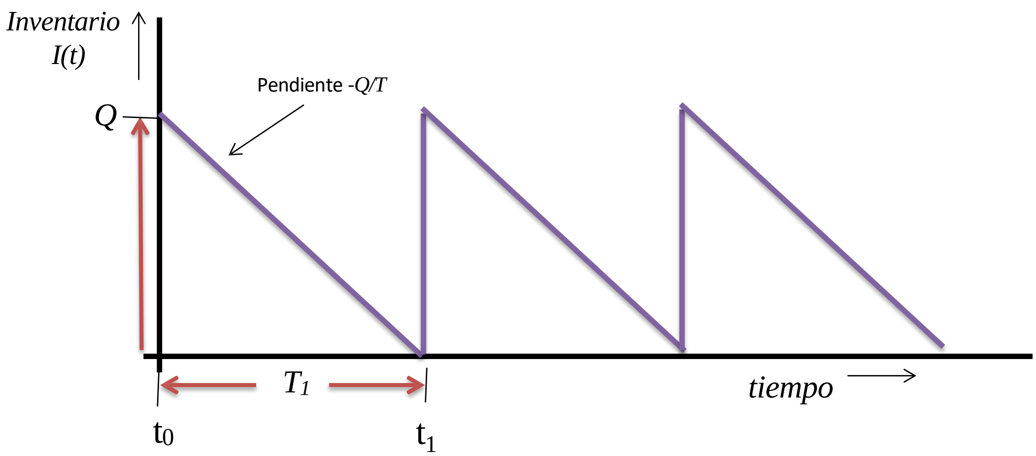
$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Esta fórmula, muy conocida, representa el modelo básico de la cantidad económica de pedido EOQ y establece las bases para integrar el almacenaje y los costos por ordenar en el momento de determinar el tamaño de los lotes a producir o comprar.

Este modelo describe la relación entre los costos fijos y los costos de mantener el inventario, siendo la base principal del estudio de sistemas más complejos. McKeown (2000), Winston (2005) y Nahmias (2007) reconocen que los supuestos de este modelo son los siguientes:

1. La tasa de demanda se conoce y es una constante igual a $\boldsymbol{D}$ unidades por unidad de tiempo y sea por día, semana, mes, etcétera. Por convenientica en lo sucesivo se supondrá que la unidad de tiempo es un año, salvo que se afirme otra cosa.
2. No se permiten faltantes, de modo que cuando el tiempo es cero habrá que colocar un pedido.
3. No hay tiempo de demora de pedido.
4. Los costos incluyen:
   a. Costo de preparación $\boldsymbol{K}$ por pedido colocado.
   b. Costo proporcional de pedido $\boldsymbol{c}$ por unidad pedida.
   c. Costo de mantener el inventario $\boldsymbol{h}$ por unidad mantenida por unidad de tiempo.
5. Se supondrá, sin pérdida de generalidad, que el inventario disponible en el tiempo cero es cero.

Revisemos la siguiente figura:



Niveles de inventario para el modelo de cantidad optima de pedido

En la figura anterior, en el tiempo $\boldsymbol{t_0}$ se coloca un pedido de tamaño $\boldsymbol{Q}$ que hace crecer el inventario en forma instantánea desde cero hasta $\boldsymbol{Q}$. Durante el primer período $\boldsymbol{T_1}$, existe una tasa de consumo que al final de este período ($\boldsymbol{t_1}$) tendremos que colocar otro pedido. En este caso, podremos esperar un excedente, faltante o llegar a tener cero inventarios otra vez, pensemos que este fuera el caso. Con base en ello, podemos observar que podemos reducir el costo de manutención de inventarios si esperamos hasta que su nivel llegue hasta cero antes de colocar otro nuevo pedido.

Dado que volvimos a tener cero inventarios como en $\boldsymbol{t_0}$, podremos decir que fue óptimo colocar un pedido de $\boldsymbol{Q}$ unidades en ese momento, entonces seguirá siendo óptimo pedir $\boldsymbol{Q}$ unidades en los subsecuentes periodos, conformando a través del tiempo la forma familiar diente de sierra que muestra la figura Niveles de inventario para el modelo de cantidad optima de pedido.

Por lo anterior, Winston (2005) así como Render, B. y Hanna, M. (2006) establecen las siguientes condiciones:

- El objetivo es elegir $\boldsymbol{Q}$ de manera que minimice el costo promedio por unidad de tiempo; si este es de un año, entonces minimizaremos el costo anual promedio.
- Como se asume que las órdenes llegan instantáneamente, no se efectuará ninguna orden a menos que el nivel de inventario sea nulo para no incurrir en un costo de inventario innecesario.
- El objetivo es evitar que ocurra un faltante (*stockout*). Supondremos que la cantidad Q ordenada cada vez que se efectúa una orden (cuando $\boldsymbol{I = 0}$) es constante.
- Cualquier intervalo de tiempo que comienza con la llegada de una orden y termina antes de la llegada de la orden siguiente se denomina ciclo.

Para determinar el valor óptimo $\boldsymbol{Q}^*$ que minimiza los costos totales de inventario $\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{Q})$, se plantea que, en cada ciclo, el costo total de pedido fijo más el proporcional es:

$$\boldsymbol{Costo\ total\ de\ pedido\ (Q)\ =\ costo\ por\ ordenar + costo\ de\ compra}$$
$$\boldsymbol{Costo\ total\ de\ pedido\ (Q) = K + cQ}.$$

Para obtener el <u>costo de pedido por unidad de tiempo</u> se divide entre longitud del ciclo $\boldsymbol{T}$.

$$\boldsymbol{Costo\ del\ pedido} = \frac{\boldsymbol{K + cQ}}{\boldsymbol{T}}$$

Debido a que se consumen $\boldsymbol{Q}$ unidades en cada ciclo a una tasa $\boldsymbol{D}$, podemos decir que la longitud del tiempo de ciclo es:

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{D}}.$$

Donde:

$\boldsymbol{T}$ = Tiempo de ciclo
$\boldsymbol{Q}$ = Cantidad económica del pedido
$\boldsymbol{D}$ = Tasa de demanda

Este resultado también puede obtenerse si se observa que la pendiente de la curva de inventario que se ilustra en la Figura. Niveles de inventario para el modelo de cantidad optima de pedido, $-\boldsymbol{D}$, es igual a la relación $-\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{T}$.

Por lo que respecto al costo de manutención de inventarios, observa en la figura anterior cómo el nivel de inventario decrece linealmente desde $\boldsymbol{Q}$ hasta $\boldsymbol{0}$ en cada ciclo; por tal motivo, el inventario promedio durante un ciclo de pedido es $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{2}$. Como todos los ciclos son idénticos, el nivel promedio de inventario durante un horizonte de tiempo formado por muchos ciclos también es $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{2}$, por lo tanto:

$$\textbf{Costo de manutención de inventarios} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{h}$$

Por lo tanto, el costo anual promedio $\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{Q})$, se componen del costo total de pedidos más el costo de manutención de inventarios y se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{CT(Q)} = \frac{\boldsymbol{K + cQ}}{\boldsymbol{T}} + \frac{\boldsymbol{hQ}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{K + cQ}}{\boldsymbol{Q/D}} + \frac{\boldsymbol{hQ}}{\boldsymbol{2}}$$

$$\boldsymbol{CT(Q)} = \frac{\boldsymbol{KD}}{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{cD} + \frac{\boldsymbol{hQ}}{\boldsymbol{2}}.$$

Los tres términos que forman $\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{Q})$ son el costo anual de preparación, el costo anual de compra y el costo anual de mantener el inventario, respectivamente.
Para obtener el óptimo basta derivar respecto de la única variable *Q*:

$$\frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = \frac{KD}{Q} + cD + \frac{hQ}{2}$$

Se tiene:

$$-\frac{KD}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad Q = \pm\sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Debido a que se está hablando de cantidades, sólo interesa la solución positiva:

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Para demostrar que *Q* es mínimo, basta considerar la segunda derivada:

$$\frac{d^2CT}{dQ^2} = \frac{2c_0D}{Q^3} \geq 0 \qquad \forall\, Q > 0$$

Como $\frac{d^2CT}{dQ^2} \geq 0$, se comprueba que $CT(Q)$ es una función convexa de Q. Además, como $CT'(0) = -\infty$ y $CT'(\infty) = h/2$, entonces $CT(Q)$ se comporta como se ilustra en la Figura Niveles de inventario para el modelo de cantidad optima de pedido.

Dado que Q^* es la cantidad económica de pedido EOQ. Por lo tanto, existen varias cosas interesantes que se pueden notar: observa que el componente proporcional del costo de pedido, c, no aparece explícitamente en la ecuación de Q^*. Esto se debe a que el término cD que aparece en la definición de $CT(Q)$ es independiente de Q; esto es, el precio a pagar no depende del tamaño de la orden y por lo general no se tiene en cuenta cuando se calculan costos promedio. Observa que c sí afecta indirectamente al valor de Q^*, porque h aparece en la fórmula de cantidad económica de pedido y $h = Ic$.

Ejemplo:
Una empresa internacional de productos para el hogar ubicada en México vende focos ahorradores de luz de 70 watts con una tasa constante de 100 piezas por semana. La tienda trae los focos de importación a un costo de 15.0 pesos cada uno *y* los vende a 45 pesos por pieza. Cuando coloca un pedido incurre en un costo de 2,500 pesos y los costos de manutención de inventario se basan en una tasa anual de interés de 25%.

Calcularemos la cantidad óptima de focos; que debe comprar la tienda y cada cuándo debe colocar los pedidos; de igual modo, determinaremos los costos anuales de manutención de inventarios y por ordenar para los focos.

Solución:
En primer lugar y para hablar el mismo idioma, convertiremos la demanda semanal a anual y así manejar las mismas unidades de tiempo con los cargos por intereses que se hacen cada año. La tasa anual de demanda es $D = (100) * (52) = 5{,}200$. El costo por manutención de inventarios h se obtiene multiplicando la tasa de interés anual por el costo variable del artículo; es decir, $h = I * c = (0.25) * (15) = 3.75$. Sustituyendo en la fórmula de la cantidad económica de pedido se obtiene:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{(2)(2500)(5{,}200)}{3.75}} = 2633.12 \text{ focos.}$$

El tiempo del ciclo es $T = Q/D$ = 2633/5200= 0.51 años, o sea cada seis meses habrá que colocar un pedido; por su parte, el costo anual promedio por manutención de inventarios es $h\ (anual) = h\left(\frac{Q}{2}\right) = 3.75\left(\frac{2633.12}{2}\right) = 4{,}937.10$ pesos. El costo anual promedio de preparación es $\bar{K} = K\left(\frac{D}{Q}\right)$ que también es 4,937.10 pesos; es decir, que el costo total óptimo es de $CT(Q)$ = 9,874.2 pesos.

Podemos observar que la solución óptima que nos arrojó el modelo de lote económico no depende del precio de venta de los focos (45 pesos); es decir, aun cuando cada foco se vendiera en 100 pesos el modelo seguiría arrojando la misma cantidad de pedido, porque supone que los focos se venden con una tasa de 100 por semana, independientemente de su precio. Obviamente, en la realidad ello no es así. Por ejemplo, supongamos que subimos el precio de los focos a 80 pesos, es posible que tenga una elasticidad alta y la demanda semanal se vea reducida sustancialmente, por tanto, el tamaño del pedido cambiará obligadamente. Por ello, es preciso tener presente que la demanda sólo tendrá un comportamiento estable en ciertos intervalos de precios. Nahmias (2007) dice que “Los modelos de inventario incorporan explícitamente el precio de venta en la formulación sólo cuando el establecimiento del precio se incluye como parte de la optimización”.

Por otro lado, la consideración de que las órdenes llegan de manera instantánea en el modelo de *Lote Económico de Pedido* requiere de cierta reflexión y análisis, dado que en la realidad ello no es así. Lo ideal sería colocarlos con el tiempo suficiente para que llegue exactamente al final de cada ciclo, cuando el tiempo de demora sea cero; sin embargo, Nahmias (2007) señala que más que estipular cuándo debe hacerse un pedido con relación al final del ciclo del pedido, conviene indicar el resurtido en función del inventario disponible, esto es definir el punto de reorden.

¿Qué es el punto de reorden?
Se define el punto de reorden como el nivel del inventario que determina el instante en que debe colocarse un pedido y se expresa con la siguiente fórmula (Render y Hanna, 2006):

$$\boldsymbol{r = D\tau}$$

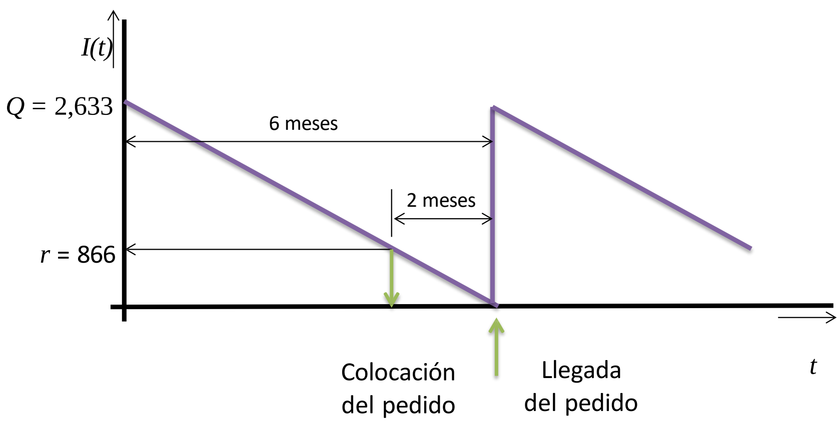
Donde:

$\boldsymbol{r} =$ Punto de reorden
$\boldsymbol{D} =$ Tasa anual de demanda
$\boldsymbol{\tau} =$ Tiempo de demora

Ejemplo:
Supongamos que deseamos pedir los focos con dos meses de anticipación ($\tau = 0.1666$ años) con el fin de que el pedido llegue exactamente antes del fin de cada ciclo; es decir, en el tiempo de demora igual a cero, con D = 5,200 de consumo anual, tenemos:

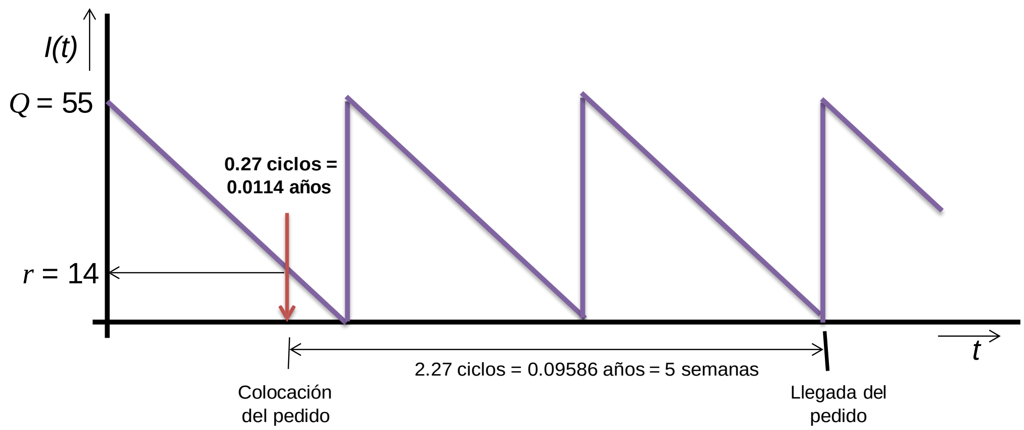
$$\boldsymbol{r = 5200 * 0.1666 = 866}$$

El tiempo óptimo de colocación del pedido se ilustra en la figura siguiente:



Cálculo del punto de reorden
Fuente: elaboración propia con base en Nahmias (2007)

¿Qué pasa cuando el tiempo de demora (τ) es mayor que un ciclo (T)?
Revisemos el caso de un producto con un tamaño de pedido económico de 55 unidades, que tiene una tasa de demanda de 1,300 unidades por año y un tiempo de demora τ = 5 semanas. La longitud del ciclo es $T = Q/D = 55/1300 = 0.04223$ años, es decir, $0.04223\, x\, 52 = 2.2$ semanas; formalizando la relación $\frac{\tau}{T} = \frac{5}{2.2}$ podemos definir que existen exactamente 2.27 ciclos en el tiempo de demora; en otras palabras, cada pedido debe colocarse 2.27 ciclos por adelantado, como se muestra en la figura siguiente:



Punto de reorden con tiempo de demora mayor a un ciclo
Fuente: Elaboración propia con base en Nahmias (2007)

Observa que el punto de reorden así calculado es exactamente igual que colocar el pedido 0*.27 ciclos por adelantado*. Esto sucede porque el nivel de inventario disponible es igual si estamos en el punto 2.27 ó 0.27 ciclos antes de la llegada de un pedido. En este caso, 0.27 ciclos equivale a (0.27 x 0.04223)= 0.0114 años, con lo cual podemos calcular un punto de reorden $r = (0.0114) * (1300) = 14$. En general cuando $\tau > T$, se usa el siguiente procedimiento:

a. Formar la relación $\boldsymbol{\tau/T}$.
b. Tener en cuenta sólo el residuo fraccionario de la relación. Multiplicar el residuo fraccionario por la longitud del ciclo, para regresar a las unidades de años.
c. Multiplicar el residuo del paso $\boldsymbol{b}$) por la tasa de demanda, para obtener el punto de reorden.

Las aplicaciones y reflexiones que hemos realizado sobre el modelo de cantidad económica de pedido han manifestado la necesidad de tener ciertos cuidados en su uso debido a su supuestos; por ello, a continuación revisaremos un método para llevar a cabo las evaluaciones de los resultados a través de un análisis de sensibilidad.

Análisis de sensibilidad

Un análisis de sensibilidad nos ayuda a “jugar” con las variables de un modelo con el propósito de conocer las variaciones e efectos que se producen por modificarlas. Por ejemplo, McKeown (2000) señala que a veces el tamaño óptimo del pedido debe modificarse porque los proveedores imponen restricciones sobre las cantidades de los mismos, con efecto en el costo de las empresas. Para evaluar dichos efectos, este autor comenta que es necesario disponer de una técnica.

Por lo anterior, en este caso centraremos nuestra atención a examinar cuán sensible es la función del costo total anual por cambiar la cantidad económica de pedido ($\boldsymbol{Q}^*$) óptima. Partamos de un ejemplo para explicar esta situación: supongamos que la compañía trasnacional que vende focos ahorradores no coloca el pedido de 2,633 focos que calculamos con el modelo EOQ y decide colocar pedidos en lotes de 800 piezas. ¿Cuál sería el efecto en los costos?

Para llevar a cabo esta evaluación, es útil usar la ecuación que relaciona el cociente entre el costo subóptimo y el costo óptimo, en función del cociente entre las cantidades óptima y subóptima de pedido, la cual se deriva a continuación considerando a $\boldsymbol{CT^*}$ como el costo promedio anual de mantener inventario y de preparación en la solución óptima, esto es:

$$\boldsymbol{CT^* = KD/Q^* + hQ^*/2 = \frac{KD}{\sqrt{2KD/h}} + \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2KD}{h}} = 2\sqrt{\frac{KDh}{2}} = \sqrt{2KDh}}$$

Por consiguiente, para cualquier $\boldsymbol{Q}$:

$$\boldsymbol{\frac{CT(Q)}{CT^*} = \frac{\frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2}}{\sqrt{2KDh}} = \frac{1}{2Q}\sqrt{\frac{2KD}{h}} + \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{h}{2KD}} = \frac{Q^*}{2Q} + \frac{Q}{2Q^*} =}$$

$$\boldsymbol{CT = \frac{1}{2}\left[\frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*}\right].}$$

Utilizando este resultado y sustituyendo valores, tenemos:

$$\boldsymbol{\frac{CT(Q)}{CT^*} = \frac{1}{2}\left[\frac{2633.12}{800} + \frac{800}{2633.12}\right] = 1.79}$$

Este resultado no indica que modificar el tamaño del pedido en 800 unidades en lugar de solicitar los 2,633 focos calculados con el modelo EOQ, costará a la empresa 1.79 más caro. Pero ¿cuáles son los costos que se verán afectados?

Para dar respuesta a esta pregunta consideraremos la función del costo total anual promedio $\boldsymbol{CT(Q)}$ y sustituyamos $\boldsymbol{Q = 800}$. Bajo este nuevo contexto, estimar el costo anual y compararlo contra el óptimo calculado, sea:

$$\boldsymbol{CT(Q) = \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2}}$$

$$\boldsymbol{CT(Q) = \frac{(2500)(5200)}{800} + \frac{(3.75)(800)}{2} = 16,250 + 1,500 = 17,750}$$

Como podemos comprobar, el costo subóptimo de 17,750 es mayor al costo óptimo de 9,874 en 79 por ciento; además podemos notar un mayor efecto en los costos por ordenar.

Render y Hanna (2006) señalan que debido a que el modelo EOQ supone que todos los valores de entrada son fijos y que se conocen con certeza, debemos tener en cuenta que estos datos pueden ser aproximaciones y que frecuentemente cambian a lo largo del tiempo; por tanto, es importante comprender cómo podrían cambiar la cantidad del pedido, los costos u otras variables; en tal virtud los análisis de sensibilidad para estos casos es un herramienta muy útil.

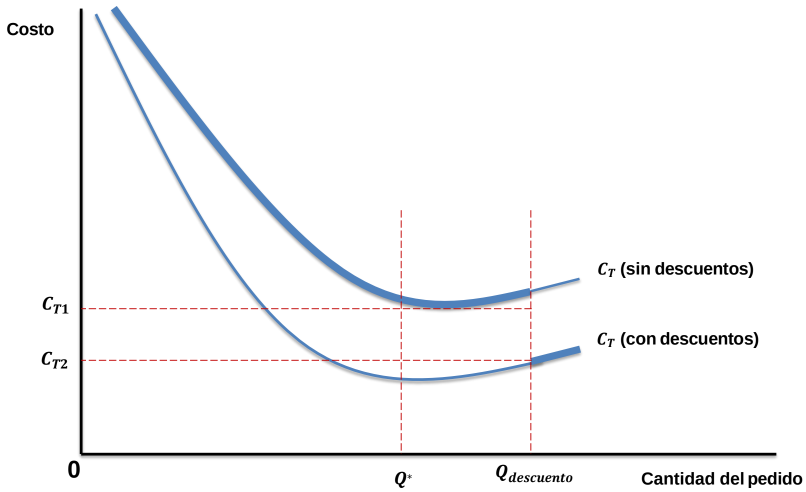
3.2.2. Formas de cálculo del lote económico

Las formas de cálculo del lote económico se refieren a las extensiones a las que ha sido objeto el modelo clásico EOQ. Los investigadores se han dado a la tarea de estudiar el modelo clásico en diferentes situaciones. En este subtema, te presentamos los modelos de inventarios que te permitirán obtener las bases teóricas y prácticas necesarias para entender modelos más complejos. En particular, esta sección está organizada en modelos con demanda determinística y probabilística. Cabe señalar que este subtema se basó en diversos autores que tratan el tema, como Nahmias (2007), Anderson y Sweeney (2004), Render y Hanna (2006), Chary (2004), Taha (2004), Gaither y Frazier (2000) y otros. Si necesitas profundizar en este tema consúltalos.*EOQ*

Modelos de inventarios con demanda determinista
A. Modelo de la cantidad económica de pedido (EOQ, por sus siglas en inglés: *Economic Order Quantity*) con descuentos por cantidad

En la práctica no es raro encontrar que los proveedores otorguen descuentos en los precios si los pedidos son suficientemente grandes (McKeown, 2000), lo que implica al cliente hacerse de inventario, el cual muchas veces el costo de manutención adicional queda compensado con la reducción del costo de compra. La forma más simple de evaluar esta situación es comparando el incremento de los costos de inventario con el ahorro en el costo de compra. El costo de cada unidad se considera independiente del tamaño del pedido (Nahmias, 2007).

Las relaciones de compensación de costos que ocurren cuando se consideran descuentos se muestran en la figura siguiente. Como puedes observar, la curva de costos sin descuentos se desarrolla más arriba que la curva de costo con descuento, debido a que el precio del producto es mayor sin el descuento. La cantidad mínima de pedido que se requiere para recibir el descuento se denomina $Q_{descuento}$, nosotros la denominaremos en esta sección Q_1.



Modelo de lote económico con descuento
Fuente: McKeown (2000)

Las ecuaciones a utilizar en este caso son las siguientes:

Modelo *EOQ*:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Costo total del pedido:

$$CT(Q) = \frac{D}{Q}K + \frac{hQ}{2}$$

McKeown (2000) señala que las ecuaciones del costo total para evaluar los descuentos deben incluir el costo de las compras por período; por tanto:

Costo total con precio actual (P)

$$CT(Q) = \frac{D}{Q^*}K + \frac{hQ^*}{2} + DP$$

Costo total con precio de descuento (P_1) y cantidad ofertada (Q_1):

$$CT(Q_1) = \frac{D}{Q_1}K + \frac{hQ_1}{2} + DP_1$$

Q^* = Cantidad óptima sin descuento.
Q_1= Cantidad que se compra al precio con descuento.
P = Precio actual del artículo.
P_1 = Precio del artículo con descuento.

Procedimiento de cálculo:

1. Determina el tamaño del pedido óptimo: Q^*.
2. Calcula el costo total anual de inventario para la cantidad Q^* y considerando el precio de compra sin descuento P.
3. Calcula el costo anual de inventario considerando la cantidad Q_1 que se compra al precio con descuento P_1.

4. Compara el costo total anual del inventario calculado en el paso 2, con el costo total anual del inventario calculado en el paso 3.
5. Finalmente se ordenará la cantidad Q de artículos que presente menor costo total anual de inventario.

Ejemplo de aplicación
Soichiro Honda estaba terminando la evaluación de su política de pedidos para la adquisición de cilindros para el modelo Civic Gama, el fabricante lo llamó y le ofreció un descuento de 3% sobre el costo normal unitario de $10,500 pesos si la empresa compraba en cantidades de 30 o más. Esto emocionó mucho a Soichiro H., puesto que era exactamente la cantidad de cilindros que había adquirido el mes anterior.

Utilizando los valores de $P = \$10{,}500$ por unidad, $D = 547$ unidades por año, $Q^* = 14.79$ unidades (redondeando a un tamaño práctico de lote, $Q^* = 15$), $K = \$420$ pesos por pedido y $h = \$2{,}100$ pesos por unidad por año, Soichiro Honda, calculó el costo total en el punto óptimo de pedido, quedando:

$$CT_1 = \frac{(420)(547)}{(14.79)} + (2{,}100)\left(\frac{14.79}{2}\right) + (547)(10{,}500) = 5{,}774{,}562.96$$

Esto significa que si Soichiro utiliza una política del EOQ sin descuentos, la compañía incurriría en costos de $5,774,562.96 al año.

Utilizando la ecuación con $P = \$10{,}490$ y $Q = 30$ (la cantidad mínima del pedido que permite lograr el descuento), Soichiro calculó el costo total bajo la política de descuento.

$$CT_2 = (30)\left(\frac{547}{30}\right) + (2{,}100)\left(\frac{30}{2}\right) + (547)(10{,}490) = 5{,}770{,}077.00$$

Puede observarse que la reducción en el costo de pedido no compensó el aumento en los costos de conservación, pero el descuento de 3% en el precio más que compensa ese aumento en los costos. El resultado neto es un ahorro de $4,485.96.

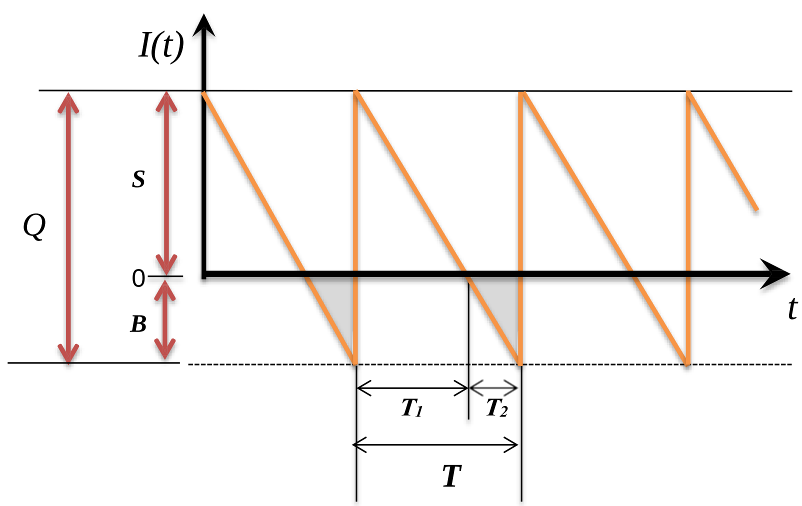
Para el caso de que existan precios de descuentos múltiples, el procedimiento anterior debe repetirse para cada precio de descuento con el fin de encontrar la cantidad que debe ordenarse.

B. Modelo de la CEP o modelo EOQ con faltantes
Como ya hemos venido comentando, la ruptura o faltantes de inventario es una gestión no deseable, sin embargo, Soret (2004) afirma que tienen ventajas, sobre todo si son bien planificadas. Autores como Izar (1996) señalan que existen compañías que manejan políticas de pedidos retroactivos, que consiste básicamente en permitir que exista faltantes en sus inventarios y colocar pedidos de reabastecimiento hasta el momento en que algunos de sus clientes lo demandan. Moya (1991) sin embargo, apunta que si el cliente decide no esperar por el inventario

y se va a buscarlo a la competencia, esta situación implica ya un costo, el cual, como ya vimos en la sección 3.1.1, representa la pérdida de utilidad. Por el contrario, si el cliente decide esperar, también se incurre en un costo, pero sólo por el tiempo que esperó por esa mercancía.

Cuando estamos hablando de abastecimiento con faltantes, significa que el cliente y comprador están aceptando entregas retroactivas, desde luego, ello significa gastos adicionales de administración y de oficina, tiempos extras, embarque, transporte y otros (McKeown, 2000). La pregunta que debemos hacernos es ¿por qué un cliente adopta una política de pedidos retroactivos si eso le cuesta dinero? Veamos el porqué.

El modelo de faltantes se ilustra en la figura Comportamiento de los inventarios. Dado que se permiten los pedidos retroactivos, el nivel de inventarios puede caer a cero. El tamaño del pedido retroactivo se denota como B (B = número de unidades que se ordenaron retroactivamente por ciclo de inventario). El nivel de inventario es siempre inferior a la cantidad de pedidos Q, puesto que se surten los pedidos atrasados al recibir los pedidos retroactivos. El nivel máximo de inventario, es S, que es igual a $Q - B$. El tiempo del ciclo del inventario, T , se subdivide como sigue: T_1 = tiempo de ciclo en el que hay inventario disponible; T_2= tiempo de ciclo en el que existen faltantes.



Comportamiento de los inventarios. Modelo *EOQ* con faltantes o pedidos pendientes
Fuente: elaboración propia con base en Mckeown (2000)

A partir de la Figura Comportamiento de los inventarios. Modelo EOQ con faltantes o pedidos pendientes, el costo total de inventario comprende:

$$CT(Q) = costo\ por\ ordenar + costo\ manutención\ de\ inventarios + costo\ por\ faltantes$$

Se supone también que, los reabastecimientos se reciben todos juntos. En este modelo se deben calcular dos cantidades: Q^* y S^*.

Sea:

T_1 = tiempo de ciclo cuando hay existencias.

T_2 = tiempo de ciclo cuando no hay existencias.

B = artículos que no están en existencia que se surtirán posteriormente.

K = costo por ordenar.

k = relación critica. Factor que denota al tiempo de que el costo por faltante sobrepasa el costo de manutención de inventarios (h); donde k tiende a la unidad, lo que hace que reduzca los faltantes. Sí c_u y h son iguales, entonces $k = 1/2$.

$$B = Q^* \left[\frac{h}{h + c_u}\right]$$

Relación crítica:

$$k = \frac{c_u}{h + c_u}$$

c_a = costo de tener una unidad como pedido pendiente durante un año.

El componente de costos de pedidos se define como en el modelo clásico; esto es:

Costo por pedir = $\frac{D}{Q} K$

El inventario promedio se deriva de la porción del ciclo de inventario y queda como sigue:

Nivel promedio de inventario por ciclo= $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(S)(T_1)}{T}$

Por triángulos semejantes:

$$\frac{T_1}{D} = \frac{T_1 + T_2}{Q} = \frac{T}{Q} \quad \rightarrow \quad T_1 = \frac{(T)(S)}{Q}$$

Sustituyendo la ecuación del inventario promedio, tenemos:

Nivel promedio de inventario por ciclo = $\left(\frac{1}{2}\right)(S)\frac{[(T)(S)]/Q}{T} = \frac{S^2}{2Q}$

El tercer componente del costo es de los faltantes. Sea *Cs* el costo por faltantes por unidad por período.

Nivel promedio de unidades faltantes por ciclo = $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(B)(T_2)}{T}$

Por triángulos semejantes:

$$\frac{T_2}{D} = \frac{T_1 + T_2}{Q} = \frac{T}{Q} \quad \rightarrow \quad T_1 = \frac{T}{Q} \quad \rightarrow \quad T_2 = \frac{TB}{Q}$$

Nivel promedio de unidades faltantes por ciclo = $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(B)\left(\frac{TB}{Q}\right)}{T} = \frac{B^2}{2Q}$

Por tanto, el costo por faltantes es $= \left(\frac{B^2}{2Q}\right) c_u$

En resumen, el coto total es:

$$CT(Q) = \frac{D}{Q}K + \frac{S^2}{2Q}h + \frac{B^2}{2Q}c_u$$

Dado que $B = Q - S$, el modelo es entonces:

$$CT(Q) = \frac{D}{Q}K + \frac{S^2}{2Q}h + \frac{c_a(Q-S)^2}{2Q}$$

Para calcular Q y S, derivamos esta ecuación con respecto a estas dos variables y podemos obtener su solución óptima siguiente:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}\ x \sqrt{\frac{h+c_u}{h}}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}\ x \sqrt{\frac{c_u}{h+c_u}}$$

Las soluciones óptimas para el número de pedidos (N^*), el tiempo de entre pedidos (T^*) y el costo total (CT^*), son:

$$N^* = \sqrt{\frac{Dh}{2K}}\ x \sqrt{\frac{c_u}{h+c_u}}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{hD}}\ x \sqrt{\frac{h+c_u}{c_u}}$$

$$CT^* = \sqrt{2KhD}\ x \sqrt{\frac{c_u}{h+c_u}}$$

Ejemplo de aplicación

Para ilustrar el modelo *EOQ* con faltantes, considérese el siguiente caso: Laiting S. A. de C. V. es una compañía que vende todo tipo de lámparas. La demanda de lámparas para lectura tiende a ser constante en 1,500 unidades al mes (18,000 unidades por año). El costo unitario de conservación por concepto de almacenamiento y manejo es de $80 pesos al año. El fabricante está ubicado en la Ciudad de México, en donde el costo de colocar un pedido es de $420. Los administradores de Laiting S. A. de C. V. consideran que su clientela es relativamente estable en la adquisición de ese tipo de lámpara, puesto que existe una competencia limitada. Debido a esta situación, a la empresa no le preocupan demasiado los agotamientos, puesto que es posible satisfacer en forma retroactiva la demanda pendiente. Los administradores estiman que el costo de los agotamientos es de $10.50 por unidad por año aproximadamente.

Donde la cantidad óptima de pedido es:

$$Q^* = \left(\sqrt{\frac{2KD}{h}}\right)\left(\sqrt{\frac{h+c_a}{c_a}}\right)$$

$$Q^* = \left(\sqrt{\frac{(2)(420)(1{,}500)(12)}{(80)}}\right)\left(\sqrt{\frac{80+10.50}{10.50}}\right) = (434.74)(2.93) = 1{,}273.78$$

Por lo tanto: $Q^* = 1{,}274$

Dado que Q^* para el modelo *EOQ* con faltantes es simplemente:

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \quad \text{multiplicada por:} \quad \sqrt{\frac{h+c_a}{c_a}}$$

Entonces, puede determinarse con facilidad el efecto de la política de faltantes. En este caso, la cantidad de pedido es aproximadamente 1,274 unidades, que es 2.93 veces más grande que la cantidad del EOQ clásico, de aproximadamente 435 unidades.
Donde el nivel máximo de inventario, S^*, es:

$$S^* = \left(\sqrt{\frac{2KD}{h}}\right)\left(\sqrt{\frac{c_a}{h+c_a}}\right)$$

$$S^* = \left(\sqrt{\frac{(2)(420)(1{,}500)(12)}{80}}\right)\left(\sqrt{\frac{10.50}{80+10.50}}\right) = (434.74)(0.34) = 147.81$$

Por lo tanto $S^* = 148$

Por ello, el nivel máximo de inventario se reduce de 435 unidades para el *EOQ* clásica a aproximadamente 148 unidades para el modelo de faltantes. En este ejemplo, resulta evidente que el número máximo de unidades que no se tienen disponibles, B^* será muy grande. Bajo la política de pedidos retroactivos, Laiting S. A. de C. V. ordenaría aproximadamente 1,274 lámparas, pero el nivel máximo de inventarios sería de sólo 148 unidades. Esto significa que se ordenarán retroactivamente:

$$148(1{,}274 - 148)$$

También se observa que el costo total relacionado con la política de pedidos retroactivos es el costo asociado con el método clásico del *EOQ* multiplicado por:

$$\sqrt{\frac{c_a}{h + c_a}}$$

Puesto que se calculó que este factor es igual a 0.34 (al estar calculando S^*) el costo total de los pedidos retroactivos sería sólo 34% del costo del modelo clásico. Esto es:

$$CT^* = (\sqrt{2KhD})\left(\sqrt{\frac{c_a}{h + c_a}}\right)$$

$$CT^* = (\sqrt{(2)(420)(80)(1{,}500)(12)})\left(\sqrt{\frac{10.50}{80 + 10.50}}\right) = = (34{,}779.30)(0.34) = 11{,}824.96$$

Por lo tanto: $CT^* = 11{,}825$

El tiempo entre pedidos, T^* y el número de pedidos, N^*, se calculan de la siguiente forma (expresando el periodo en días donde, 1 año =365 días):

$$T^* = \left(\sqrt{\frac{2K}{Dh}}\right)\left(\sqrt{\frac{h + c_a}{c_a}}\right)$$

$$T^* = (365)\left(\sqrt{\frac{(2)(420)}{(1{,}500)(12)(80)}}\right)\left(\sqrt{\frac{80 + 10.50}{10.50}}\right) == (365)(0.02)(2.93) = 21.38$$

Por lo tanto son: 21 días.

Ahora utilizando la siguiente ecuación, tenemos:

$$N^* = \left(\sqrt{\frac{Dh}{2k}}\right)\left(\sqrt{\frac{c_a}{h + c_a}}\right)$$

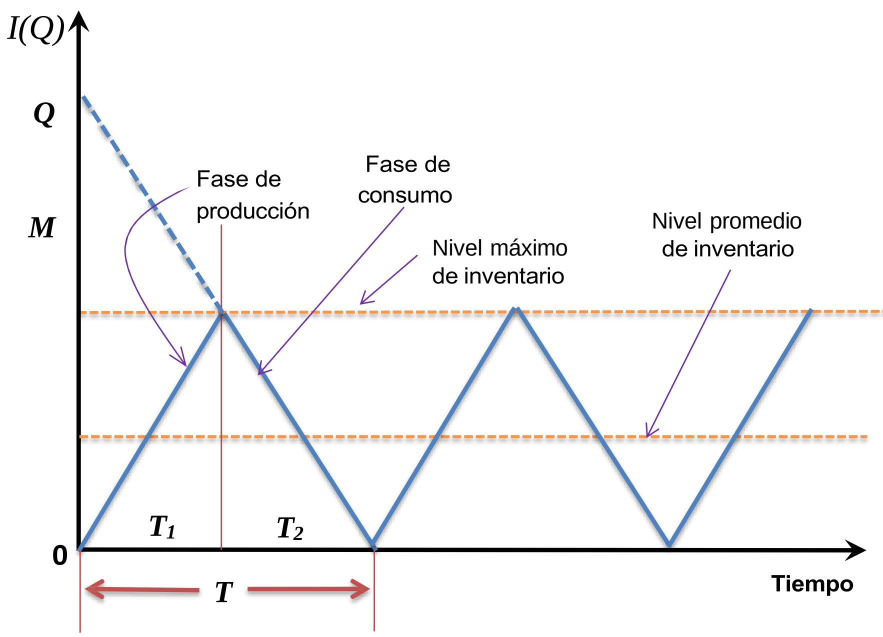
$$N^* = \left(\sqrt{\frac{(1{,}500)(12)(80)}{(2)(420)}}\right)\left(\sqrt{\frac{10.50}{80 + 10.50}}\right) = (41.40)(0.34) = 14.07$$

Por lo tanto se tiene: N^*= 14 pedidos por año.

Con base en estos resultados, Laiting S. A. de C. V. debe ordenar aproximadamente de uno a dos pedidos por mes, cercano a 1,274 unidades. Esta política da como resultado un agotamiento máximo de 148 unidades, pero reduce el costo total de los inventarios de la lámpara en casi 70%. En términos de la satisfacción de la demanda de los clientes, la política significa que un cliente puede esperar que se le surta su orden cuando más 45 días.

C. *EOQ* con reabastecimiento uniforme. Modelo del tamaño económico de lote de producción

En los modelos analizados hasta este momento, se ha supuesto que el pedido se recibe completo en un instante. Desde luego, este supuesto es válido para la mayor parte de las empresas comerciales; pero en un sistema productivo el reabastecimiento se suministra a una tasa constante a lo largo de varios días o varias semanas dentro de un proceso de producción o corrida (Anderson y Sweeney, 2004). La figura 22, presenta el comportamiento del consumo de la demanda y los inventarios en una operación productiva, en la que la producción pasa al inventario de productos terminados y los bienes que se demandan se extraen de aquí (Mckeown, 2000). En esta figura se muestra el caso de una operación de reabastecimiento de inventario a través de la fase de producción, con tiempo de adelanto de cero y en la que no se permiten faltantes.



Comportamiento de los inventarios: Reabastecimiento no instantáneo
Fuente: McKeown (2000)

Planteamiento

Observando la figura anterior, se deduce que el nivel máximo de inventario M es menor que el tamaño del pedido Q; entonces el inventario promedio será menor que $Q/2$ y por lo tanto, puede deducirse que el costo de manutención será menor que del modelo clásico.

En general, el costo total de este modelo es:

$$CT(Q) = costos\ de\ prepración + costos\ de\ manutención\ de\ inventarios$$

Ya habíamos mencionados que los costos de pedidos se podrían llamar también costos de preparación o *setup*. Pues bien, este concepto se utilizará en este modelo y su cálculo será el mismo, es decir:

$$Costos\ de\ preparación = \frac{D}{Q}K$$

Para calcular el costo promedio de manutención de inventarios, tenemos que calcular el inventario máximo M.

Sea:

- D = Demanda de unidades por año.
- T = Periodo de reabastecimiento o tiempo de ciclo (indica cada que tanto tiempo se deberán hacer cada corrida de producción).
- Q^* = Cantidad óptima o económica de pedidos o lote económico de producción, es la cantidad de productos que se deben de fabricar en cada corrida de producción al costo total mínimo.
- h = Costo de mantenimiento anual de inventario por unidad anual.
- K = Costo de preparación de cada corrida de producción.
- M = Nivel de inventario máximo.
- R_1= número de unidades fabricadas por período.
- R_2= número de unidades que se demandan por periodo.

Si $R_1 > R_2$ es un modelo factible.

Como R_1 es la tasa de producción, $\frac{Q}{R_1}$ es igual a T_1, es decir, el período invertido de fabricación.

Número de unidades demandadas durante $T_1 = R_2\, x\, T_1$.

Sustituyendo $T_1 = Q/R_1$,

Demanda durante el período = $T_1 = \left(\frac{Q}{R_1}\right) R_2$

Por tanto, el inventario máximo es:

$$M = Q - \left(\frac{Q}{R_1}\right) R2 = Q - Q\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Con M definida:

El inventario promedio es:

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) MT_1 + \left(\frac{1}{2}\right) MT_2}{T_1 + T_2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) Q - Q\left(\frac{R_2}{R_1}\right) T_1 + \left(\frac{1}{2}\right) Q - Q\left(\frac{R_2}{R_1}\right) T_2}{T_1 + T_2} =$$

$1 \quad R_2 \quad ($

$$\frac{{}_{2}) \, [Q - Q \, ({}_{R_1}) \, (T_1 + T_2)]}{T_1 + T_2} = \left(\frac{Q}{2}\right) \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Entonces, el costo de manutención de inventarios es= $\left(\frac{Q}{2}\right)\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)h$

En resumen, la función del costo total, es la siguiente:

$$CT(Q) = \frac{D}{Q}K + \left(\frac{Q}{2}\right)\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)h$$

Aplicando cálculo diferencial, determinamos Q^* que minimiza CT^* y calculamos $N^*\ y\ T^*$:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h[1-(R_2/R_1)]}}$$

$$CT^* = \sqrt{2KhD[[1-(R_2/R_1)]]}$$

$$N^* = \sqrt{\frac{hD[1-(R_2/R_1)]}{2K}}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{hD[1-(R_2/R_1)]}}$$

Ejercicio de aplicación

Una empresa fabricante de autopartes instalada en México, decidió comenzar a producir una refacción que antes adquiría de un proveedor externo, con una demanda de 1,500 unidades al mes; calculando que el costo de preparación por corrida es de $420 pesos, con un costo de manutención de inventario de $105 pesos por unidad al año. Una vez que la máquina está operando, puede fabricar 3,750 unidades por mes. Por lo general la empresa opera aproximadamente 320 días hábiles al año. A los administradores de la empresa les gustaría saber cuál es el lote de producción con el que deben trabajar, con qué frecuencia deben realizarse las corridas y el costo total asociado con el tamaño recomendado de la corrida.

Datos del problema:
$K = \$420$
$h = \$105$
$R_1 = 3{,}750$
$R_2 = D = 1{,}500\ por\ mes\ (o\ sea, 1{,}500\ x\ 12 = 18{,}000\ \text{piezas por año}).$
Donde, el tamaño óptimo del lote, Q^*, es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h[1-(R_2/R_1)]}}$$

$$Q^{*} = \sqrt{\frac{(2)(420)(18000)}{(105)\left[1-\left(\frac{1{,}500}{3{,}750}\right)\right]}}$$

$$Q^{*} = 490\ unidades\ por\ lote.$$

Como puedes observar la demanda se multiplicó por 12 con objeto de expresarla en forma anual. Por lo que respecta al tiempo que transcurre entre dos corridas sucesivas de producción, se tienen:

$$T^{*} = \sqrt{\frac{2K}{hD[1-(R_2/R_1)]}}$$

$$T^{*} = (320)\sqrt{\frac{(2)(420)}{(105)(1{,}500)(12)\left[1-\left(\frac{1{,}500}{3{,}750}\right)\right]}}$$

$$= (300)(0.0272) = 8\ días$$

Por su parte, el costo total del sistema de inventario, asociado con un tamaño de lote calculado ($Q^{*} = 490$), es:

$$CT^{*} = \sqrt{2KhD[[1-(R_2/R_1)]]}$$

$$CT^{*} = \sqrt{(2)(420)(105)(1{,}500)(12)[[1-(1{,}500/3{,}750)]]}$$

$$\sqrt{952{,}560{,}000}$$
$$= \$30{,}863.57$$

Ahora bien, calculemos el nivel máximo de inventarios, M, de la siguiente manera:
La tasa de producción, $R_1 = 3{,}750$ unidades al mes, o 139 unidades diarias, considerando cada mes de 27 días (320/12= 27). Con un lote de 490 unidades, se requerirían 3.5 días para realizar una corrida de producción. La demanda R_2, es de, 1,500 unidades por mes o 56 unidades diarias (1,500/27=56). El nivel de inventario para los primeros 3.5 días aumenta entonces 83 unidades diarias (139 producidas – 56 usadas = 83 en inventario). Por ello, el nivel máximo de producción es de 3.5 x 83 o 294 unidades, como se puede observar en la ecuación:

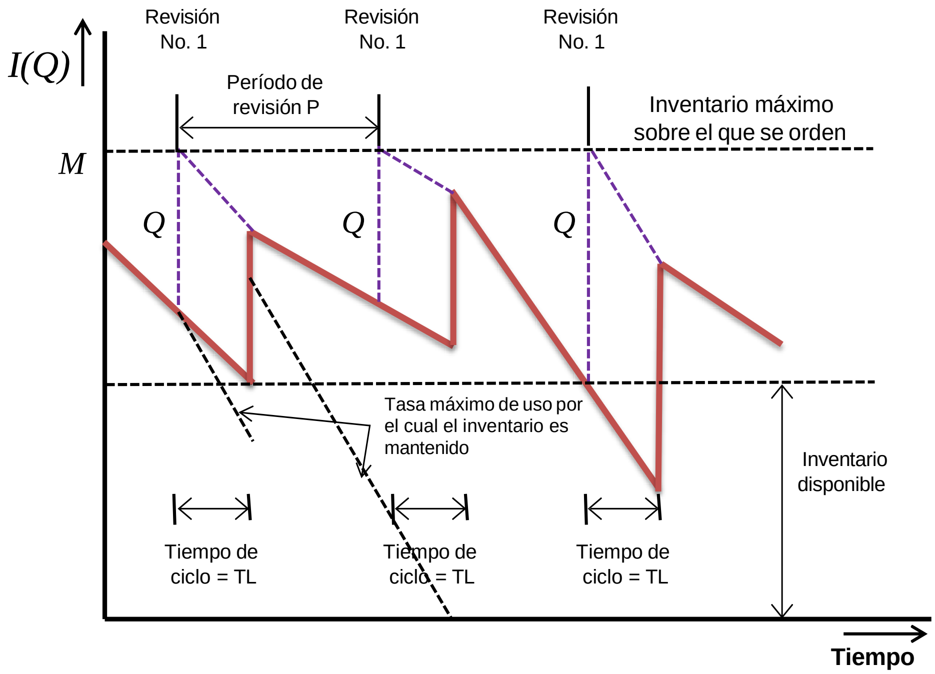
$$M = 490 - 490(1{,}500/3{,}750)$$
$$= 294\ unidades$$

D. Modelo de periodo fijo de reorden

Chary (2004) nos indica que, en muchas organizaciones, la política de compras radica en colocar un pedido en un período determinado específico, que puede ser un mes, semana, etcétera. En tales casos, cita el autor, los modelos utilizados se conocen como modelos de período fijo o de sistema de control *P*. Según Anaya (2000) esta clase de modelos son aplicables cuando los costos de manutención son bajos, es decir, a productos de bajos valores económico y de almacenamiento o, también, cuando varios elementos se ordenan del mismo proveedor, para ahorrar en costos por ordenar y en gastos de envío.

La principal desventaja de un sistema de periodo fijo de tiempo de inventario es que los niveles de inventario deben ser mayores para ofrecer la misma protección contra el desabastecimiento, como en caso del sistema de cantidad fija de orden.

Un sistema de esta naturaleza puede observarse en la figura Modelo de periodo fijo de reorden, en donde puedes notar que el período de reordenar es fijo, pero la cantidad de pedido puede ser variable. Como podrás observar, el inventario disponible se reduce en respuesta al consumo. Cuando se hace la revisión, se coloca un pedido por la diferencia entre M (el máximo) y la cantidad disponible. Al recibirse, el inventario se reabastece en su máximo. La primera tarea es encontrar el intervalo óptimo de reorden (T).



Modelo de periodo fijo de reorden
Fuente: Chary (2004)

El procedimiento del sistema P es el siguiente:

1. Determinar analíticamente el ciclo del pedido T o intervalo económico de reorden.
2. Determinar analíticamente el nivel máximo de inventario disponible y la orden y
3. Determinar la cantidad a ordenar en cada período, restando la cantidad actual disponible del nivel de inventario máximo menos el inventario disponible en almacén.

Sean:
$T =$ Intervalo económico de reorden (en unidades de tiempo).
$D =$ Demanda anual de unidades
$K =$ Costo del pedido.
$h =$ Costo de manutención de inventario.
$TL =$ Tiempo de entrega o tiempo de espera o tiempo de adelanto.
Nota: T, D, TL : deben tener las mismas unidades de tiempo.

Las ecuaciones a utilizar son las siguientes:

$$CT = \frac{K}{T} + h\frac{TD}{2}$$

$$T = \sqrt{\frac{2K}{(D)(h)}}$$

$$M = (T)(D) + (TL)\,D$$

$$M = D(T + TL)$$

$$Q = M - \text{ existencias en almacén al momento de efectuar el pedido}$$

Ejemplo de aplicación

Considérese un fabricante que necesita 2,000 partes pequeñas durante el año próximo, el costo de las unidades es de cinco pesos cada una. Se tiene disponible en la localidad con un tiempo de entrega en una semana (siete días), pero el costo de ordenar para el fabricante es de cinco pesos por orden. El costo de manutención es de dos pesos por unidad al año. Se considera que esta empresa trabaja 365 días hábiles al año. ¿Cuál es el intervalo económico de orden y cuál es el punto hasta el que se ordena?

Donde:

$$K = 5$$
$$h = 2$$
$$D = 2{,}000$$

$$T = \sqrt{\frac{2K}{(D)(h)}}$$

$$T = \sqrt{\frac{2(5)}{(2{,}000)(2)}}$$

$$T = 0.05$$
$$M = D(T + TL)$$
$$M = 2000(0.05 + 0.05 * 0.019) = 101.9 = 102$$

Modelos de inventarios con demanda incierta o probabilística

Como ya habíamos estudiado antes, en este tipo de modelos se asume que la demanda es impredecible pero que se conoce su distribución de probabilidad. En general, con una demanda caracterizada por la incertidumbre siempre existe la posibilidad de que en las órdenes se tenga faltantes o de quedarse definitivamente sin productos en *stock*; algunos reducen este riesgo acumulando grandes inventarios, sin embargo, se prevé que éste es muy difícil que pueda eliminarse y caer en grades costos de inventario y almacenamiento. Por este motivo, el reto de los modelos probabilísticos es equilibrar el riesgo de faltantes y el costo de los inventarios adicionales.

En esta sección, estudiaremos algunos de los modelos probabilísticos para la gestión de inventarios más utilizados.

A. Modelo de cantidad fija de reorden cuando no se conoce el costo por faltantes

En los modelos de demanda incierta la verdadera decisión que debe tomarse al seleccionar el punto de reorden es la correspondiente al inventario de seguridad. Tener mucho o poco inventario de seguridad implica ventajas y desventajas, entre el servicio al cliente y los costos de manutención de inventarios Krajewski y Ritzman (2000). En general podemos utilizar modelos para minimizar los costos para definir el stock de seguridad, pero para ello se requieren estimaciones del costo de los faltantes y por demoras, los cuales regularmente son muy difíciles de calcular. Nahmias (2007) afirma que a veces estos costos involucran componentes intangibles, como las pérdidas por voluntad y demoras potenciales. Ambos autores coinciden que el enfoque usual para determinar el punto de reorden consiste en que primeramente, la gerencia establezca una política sobre el nivel de servicio para el inventario y después, determine el nivel de inventario de seguridad que satisfaga esa política.

Basado en estos autores, a continuación, se explica el método de solución que calcula la cantidad Q, r y ss.

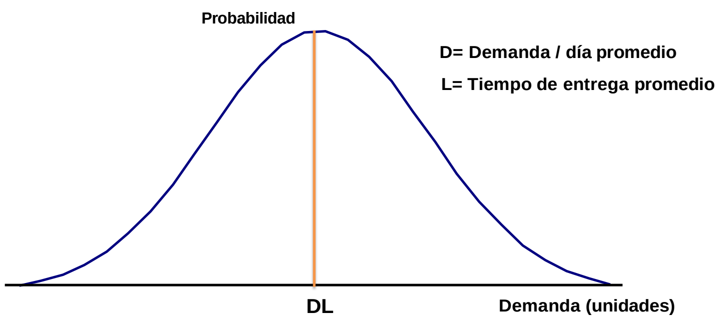
En primer lugar, debemos calcular la cantidad fija de pedido Q y el punto de reorden r, en función del nivel de servicio. Para ello se hace caso omiso de los faltantes y de la incertidumbre en la demanda, de tal manera que nos permita hace uso del modelo clásico de tamaño económico de pedido:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Donde:
$Q^* =$ Cantidad óptima o económica de pedido.
$D =$ Demanda promedio en unidades por año.
$K =$ Costo de cada pedido.
$h =$ Costo de mantenimiento por unidad por año.

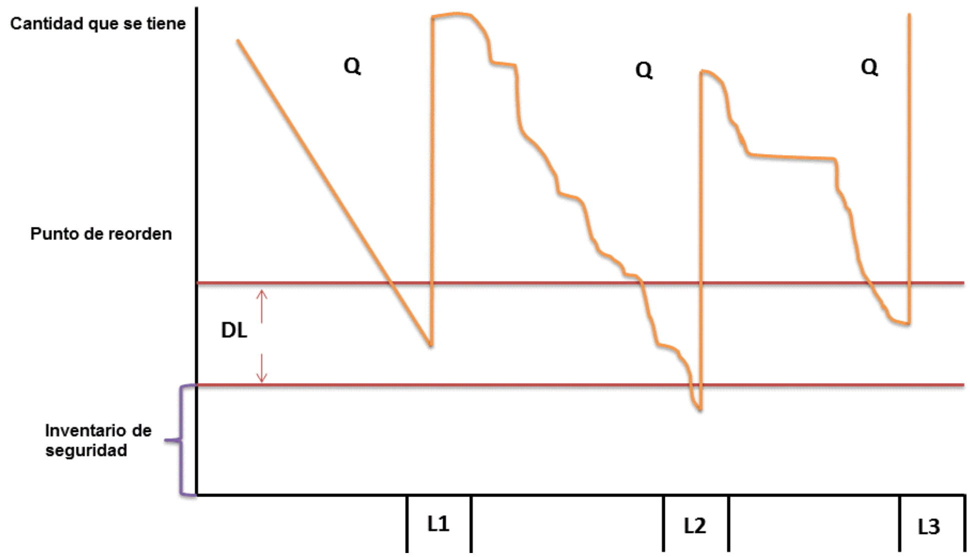
Debido a que desconocemos los costos por faltantes, no existe forma de encontrar el r^* óptimo, entonces, debemos aplicar los conceptos de: **Inventarios de seguridad y nivel de servicio.**

Debido a que los faltantes ocurren siempre que la demanda durante el tiempo de entrega excede el punto de reorden, podemos encontrar la probabilidad de faltantes usando la distribución de la demanda de tiempo de entrega para calcular la probabilidad de que la demanda excederá r (Anderson y Sweeney, 2004). En la figura siguiente se observa la curva de demanda del tiempo de entrega (Taha, H. 2004).



Distribución de la demanda del tiempo de entrega
Fuente: Taha (2004)

Como podrás notar, se muestra una distribución normal centrada en la demanda promedio del tiempo de entrega DL donde D es la demanda diaria promedio y L el tiempo de entrega.
Si el punto de reorden es igual a la demanda de entrega diaria $(r = D)$ el inventario que disponemos en el momento de recibir el pedido será cero $(I = 0)$; bajo estas circunstancias, 50% de las veces $I > 0$ y otro 50% de las veces $I < 0$, lo que significa que habrá faltantes. Por este motivo, dado 50% de posibilidades de quedar sin existencias, es mejor agregar un inventario de seguridad, que llevará hacia arriba el punto de seguridad, como puede observarse en la figura siguiente:



Efecto del inventario de seguridad
Fuente: Krajewski y Ritzman (2000)

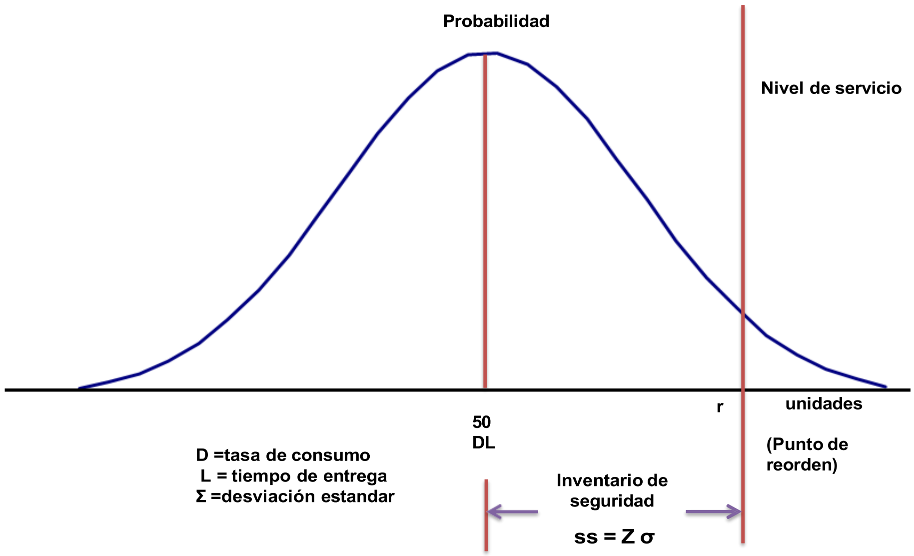
En la Figura. Efecto del inventario de seguridad, al elevar el punto de reorden, lo que estamos haciendo es protegernos contra los faltantes durante el tiempo o periodo de entrega, entonces la fórmula para el punto de reorden es la siguiente:

$$r = DL + ss$$

$r =$ Punto de reorden.
$D =$ Demanda diaria.
$L =$ Tiempo de entrega promedio en días.
$ss =$ Inventario de seguridad en unidades.

Como ya habíamos dicho, la cantidad de inventario de seguridad está basada en el **Nivel de servicio (**NS**)**, que es la probabilidad de tener un artículo en almacén cuando sea requerido. De acuerdo con Taha (2004) en la práctica es muy común que el NS en las empresas lo ubiquen entre 80 y 99%; esto es, se acepta que la posibilidad de quedar sin productos en almacén puede variar entre uno y 20%. De acuerdo con el NS que le proporciona la empresa.

Establecidos el NS y conocida la tasa de consumo promedio (D), el tiempo de entrega (L) y la desviación estándar (σ), puede calcularse la cantidad de inventario de seguridad ss requerido que puede caer en el rango que se muestra en la figura siguiente:



Cálculo del punto de reorden
Fuente: Taha (2004)

Por ejemplo, sean:
D = 8 unidades/día
L = 4 días
σ = 16 unidades
NS = 95%

Con una tabla para la distribución normal, se encuentra el valor de z que corresponde al nivel de servicio deseado, para un nivel de servicio de 95% el valor de z = 1.65.
El inventario de seguridad se calcula mediante la expresión:

$$ss = z\,\sigma$$

Donde:
$ss =$ Inventario de seguridad en unidades
$\sigma =$ Desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega o tiempo de adelanto.

Por ejemplo en la figura Cálculo del punto de reorden, el inventario de seguridad es:

$$ss = z\,\sigma = (1.645)(16) = 26.3\ unidades$$

Y el punto de reorden es:

$$r = (D)(L) + ss = (8)(4) + 26.3 = 58\ unidades$$

Procedimiento del modelo

1. Calcula la cantidad óptima o económica de pedido mediante la expresión.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

2. Calcula el inventario de seguridad con base en la distribución de la demanda durante el periodo de adelanto o de entrega y la selección intuitiva del nivel de servicio. Haciendo uso de:

$$ss = z\,\sigma$$

3. Calcula el punto de reorden mediante

$$r = DL + ss$$

Ejemplo de aplicación

Un comerciante de agua embotellada, cuenta con el proveedor Eriemsa, S. A de C. V., el almacén de éste se encuentra en un lugar alejado, pero aun así puede abastecer cualquier artículo que se le pida en cualquier cantidad. Uno de los artículos que vende es el envase de plástico, la demanda de los envases tiende a un promedio de ocho cajas por día y se distribuye normalmente. El tiempo de entrega varía un poco, con un promedio de cuatro días, la desviación estándar para la demanda del tiempo de entrega es 5.8. Los costos de ordenar se estiman en $2.30 por orden, el costo de mantenimiento es de $1.50 por caja por año, el comerciante quiere 97% de nivel de servicio en el aceite de motor.

Para encontrar la cantidad de reorden se necesita conocer la demanda anual promedio. Si la empresa trabaja 350 días hábiles al año.

Calcula:

a) La cantidad óptima de pedido, el inventario de seguridad y el punto de reorden.
b) Si el comerciante deseara trabajar con un nivel de servicio de 82% ¿cuál sería el inventario de seguridad, el punto de reorden y los costos de mantenimiento del inventario de seguridad?

Procedimiento

Donde:

$D = (8)(350) = 2{,}800\ unidades\ por\ año.$

$K = \$2.30\ por\ cada\ pedido.$

$h = \$1.50\ por\ caja\ por\ año.$

Nivel de servicio = 97% Corresponde a un valor de z leído en tablas de distribución normal = 1.89

Días hábiles al año = 300

Para el nivel de servicio = 82%, z = 0.92

Por lo tanto, la solución para el inciso a) es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(2.30)(2{,}800)}{(1.50)}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{12{,}880}{1.50}} = 93\ cajas$$

$$ss = z\,\sigma = (1.89)(5.8) = 10.9\ \approx 11\ cajas$$

$$r = (D)(L) + ss = (8)(4) + 11 = 43\ cajas$$

Para el inciso b) se tiene un nivel de servicio = 82% el valor de $Z = 0.92$, por lo tanto:
El inventario de seguridad $ss = (0.92)(5.8) = 5.3 \approx 6\ cajas$.
El punto de reorden $r = (8)(4) + 6 = 36.93 = 38\ cajas$.
El costo de mantenimiento del inventario de seguridad =
$(h)(ss) = (1.50)(6) = \$9.00$

B. Modelo de cantidad fija de reorden cuando se conoce el costo por faltantes
El costo por faltantes se incurre cuando hay que abastecer unidades del inventario y no se tienen en existencia. No poder satisfacer los pedidos de los clientes inmediatamente es un factor que nos hace perder ventas e incluso imagen corporativa, de manera que los clientes insatisfechos comprarán en otro lugar y quizá ya no vuelvan (Gaither y Frazier, 2000). En este tipo de modelos de inventario, se incluye este elemento de costo por faltantes de manera directa, con estimaciones basada la información disponible.

En términos generales, en esta clase de modelos de inventarios podemos optimizar tanto la cantidad económica como el punto de reorden. El pedido óptimo se determina utilizando la expresión del modelo clásico *EOQ*, o sea:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

De acuerdo con Nahmias (2007), la base teórica señala que:

a) Cuando el valor de uno de los costos, ya sea de manutención de inventarios o por faltantes, se hace mucho más grande que el otro, Q^* (cantidad económica) y r (punto de reorden) se comportan de manera similar.
b) Esto es, la cantidad económica a ordenar tiende al modelo clásico, es decir, no se incurre en faltantes debido a los altos costos de éstos.
c) Similarmente ocurre cuando los costos de manutención son muy altos.
d) Es decir, no es económico tener niveles de inventario positivos por tanto cada lote de

Q^* no debe ser mayor que lo necesario para cumplir con los faltantes actuales.

En otras palabras, debido a que el costo por faltantes tiende a incrementar la cantidad a ordenar, debemos pedir una menor cantidad a la óptima, con el fin de reducir el número de órdenes; sin perder de vista que el costo de manutención de inventarios se eleva debido a que los productos permanecen mayor tiempo en almacén. El efecto final es que el valor óptimo es poco diferente al valor que arroja el modelo clásico *EOQ*.

En este tipo de modelos, se utiliza el concepto de costo marginal, de la siguiente manera:

> Al incremento de una unidad del punto de reorden corresponde un aumento en una unidad del costo de manutención de inventarios y el costo por faltante disminuye.

Por lo anterior, el mejor punto de reorden ocurre cuando ambos conceptos se cruzan; es decir, cuando los costos marginales de ambos son iguales.

$$Costo\ marginal\ de\ manutención\ de\ inventarios = costo\ por\ faltantes$$

Sea:
$DL =$ Demanda promedio durante el tiempo de entrega.
$r =$ Punto de reorden.
$P =$ Probabilidad $[dL \leq R]$: representa la probabilidad de que la demanda sea menor que el punto de reorden.

Entonces el **costo marginal de manutención de inventarios** = $(h)(P)$; cuando ocurre un faltante no hay costo de manutención. Luego, el **costo marginal por faltantes durante cada periodo de entrega** es igual que el costo del número de unidades que faltan por la probabilidad de un faltante, es decir:
El costo marginal por faltante = $(1 - P)c_u$
$c_u =$ costo unitario por faltante.

Debido a que puede ocurrir un faltante cada vez que colocamos una orden. Su costo anual estará en función del número de órdenes, de acuerdo con la demanda anual D y la cantidad Q que debe pedirse; entonces, el número promedio de órdenes $= D/Q$, por tanto:
El costo marginal por faltantes = $c_u\,(1 - P)\frac{D}{Q}$

Igualando los dos costos marginales y despejando P tenemos lo siguiente:

$$(h)(P) = c_u(1 - P)\frac{D}{Q}$$

$$(h)(P) = \frac{D}{Q}c_u - \frac{D\ P}{Q}c_u$$

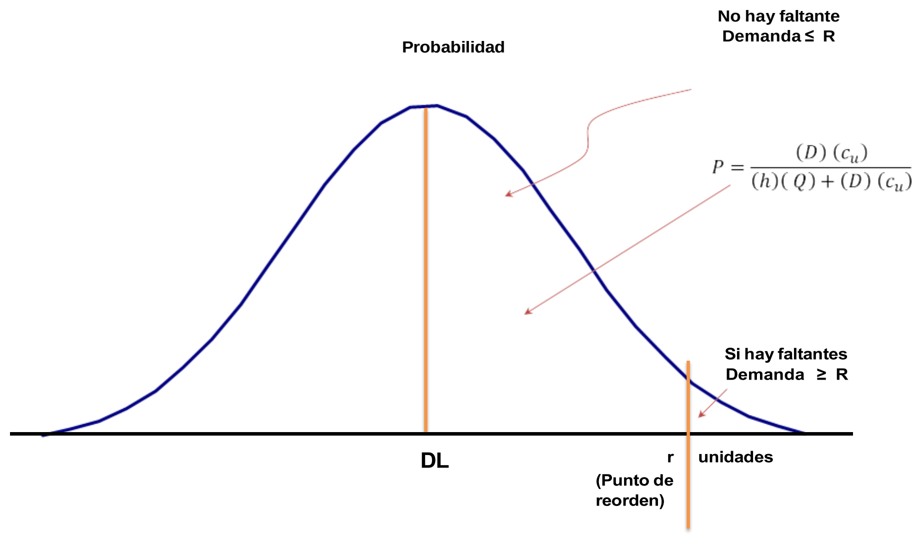
$$(h)(P) = \frac{D}{Q}c_u = \frac{D\ P}{Q}c_u$$

$$P[h + c_u] = \frac{DP}{Q}c_u$$

$$P\ [hQ + \frac{D}{Q}c_u] = \frac{DP}{Q}c_u$$

$$P = \frac{(D)\ (c_u)}{(h)(\ Q) + (D)\ (c_u)}$$

Esto nos proporciona la relación crítica de la probabilidad, que define el punto de reorden r dentro del rango de probabilidades como se muestra en la siguiente figura siguiente:



Punto de reorden con costo por faltantes conocido

Con la distribución de probabilidad de la demanda durante el tiempo de entrega se escoge r de tal manera:

$$P[DL\ \leq r] = P = \frac{Dc_u}{h\ Q +\ D\ c_u}$$

Procedimiento del modelo:

1. Calcula la cantidad económica de pedido mediante la expresión, ignorando los faltantes.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

2. Encuentra la relación crítica de la probabilidad; es decir, la probabilidad en la cual

podamos tener inventario en almacén con la ecuación:

$$P = \frac{D\, c_u}{h\, Q + Dc_u}$$

3. Busca en las tablas de distribución normal el valor de z que corresponda a la probabilidad calculada en el 2.

4. Calcula el inventario de seguridad de acuerdo con la distribución de la demanda durante el periodo de entrega y el valor de z determinado. Haciendo uso de:

   $ss = z\,\sigma$ o $ss = r - \mu$

   Donde: $\mu =$ demanda promedio durante el tiempo de espera.

5. Calcula el punto de reorden con:

   $r = DL + ss$ o $r = \mu + ss$

El costo total anual de inventario = Costo anual de pedidos + Costo anual de mantenimiento del inventario normal + Costo anual de mantenimiento de las existencias de seguridad.

$$CT = K\frac{D}{Q^*} + h\frac{Q^*}{2} + (h)(ss)$$

Ejemplo de aplicación

Un comerciante de Artesanías en Cerámica tiene una demanda anual promedio de tazas de 7,500 unidades a lo largo de los 305 días hábiles del año. Por lo tanto, el promedio diario de la demanda es de 7,500/305 = 25 unidades, se sabe que el tiempo de entrega varía con un promedio de tres días y se supone que la demanda durante el tiempo de entrega tiene una distribución normal con una desviación estándar $\sigma = 7.4$ unidades, el costo por cada pedido es de tres pesos por unidad, el costo de mantenimiento es de \$3.75 por unidad por año y el costo por agotamiento o por faltante es de \$1.50 por unidad por año. Se debe calcular, la cantidad óptima de pedido, el inventario de seguridad, el punto de reorden y el costo de mantenimiento del inventario de seguridad.

Se tiene:

$$D = 7{,}500\ unidades$$
$$d = 25\ unidades\ en\ promedio\ por\ dia$$
$$L = 3\ días$$
$$K = \$3.00\ por\ cada\ pedido$$
$$h = \$3.75\ por\ unidad\ por\ año$$
$$c_u = \$1.50\ por\ unidad\ por\ año$$
$$Días\ hábiles = 305\ días$$
$$\sigma = 7.4\ unidades$$

Por lo tanto, la cantidad óptima es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(K)(D)}{h}} = \sqrt{\frac{(2)(3.00)(7{,}500)}{3.75}} = 110\ unidades$$

Ahora, para calcular el inventario de seguridad ss se debe calcular la probabilidad de tener existencias con la siguiente expresión:

$$P = \frac{(D)(c_u)}{(h)(Q) + (D)(c_u)} = \frac{(7{,}500)(1.50)}{(3.75)(110) + (7{,}500)(1.50)} = 0.9646$$

Entonces, la probabilidad de tener existencia durante el tiempo de espera es de 96.46%, por lo tanto, la probabilidad de no tener existencias, es decir, de tener faltantes en almacén es de 3.54%.

Posteriormente se busca en las tablas de distribución normal el valor de z correspondiente a la probabilidad de 0.9646, resultando un valor de $z = 1.80$

Teniendo el valor de z y el valor de la desviación estándar (σ) ahora se calcula el inventario de seguridad de la siguiente manera:

$$SS = z\,\sigma = (1.80)(7.4) = 13.32\ unidades$$

Ahora, el punto de reorden r se encuentra utilizando la expresión:

$$r = (D)(L) + ss = (25)(3) + 13.32 = 88.32, es\ decir\ 88\ unidades$$

El costo de mantenimiento del inventario de seguridad se encuentra de la siguiente forma:

$$Costo\ de\ mantenimiento\ del\ inventario\ de\ seguridad = (h)(ss) = (3.75)(13.32) = \$49.95$$

C. Modelo de inventario de cantidad fija de reorden, "un solo periodo-un solo pedido" con demanda probabilística

Como su nombre lo indica, este modelo resuelve problemas para el caso de que se coloque un solo pedido en un período específico; pueden tenerse dos situaciones al final de período:

a) Que el producto se ha agotado y
b) que al final se tenga un excedente de productos que se han vendido y que deben ofrecerse.

Este tipo de modelo se aplica a un sinnúmero de situaciones con productos estacionales o perecederos que no pueden conservarse en inventario para su venta posterior, tales como: ropa de invierno, zapatos de moda, periódico, artículos deportivos, etcétera. En este sentido, las estrategias de logística deben ser explicitas utilizando este tipo de modelos para determinar con suficiente precisión las cantidades a pedir y evitar hacer crecer los inventarios que pueden llevarnos a costos de excedentes, dada la dificultad de conocer la demanda de este tipo de productos.

Por esto último, siempre es necesario disponer de información relacionada con las probabilidades de la demanda. En este modelo calculamos el tamaño del pedido (Q^*) haciendo uso del método del análisis de incrementos.

Dicho método consiste en definir la cantidad a pedir y comparar:

Costo o pérdida de solicitar una unidad adicional
vs
Costo o pérdida de no pedir tal unidad

Retomando los conceptos revisados en el subtema 3.1.2, estos costos se definen de la siguiente manera:

$\boldsymbol{c_0}$ = costo unitario por **sobrestimar** la demanda (costo por excedentes); representa la pérdida por ordenar de más y que no es posible venderla y se calcula de la siguiente manera:

$$c_o = Precio\ de\ compra\ - Precio\ de\ venta\ de\ oferta$$

$\boldsymbol{c_u}$ = costo unitario por **subestimar** la demanda (costo por faltantes); representa la pérdida por no ordenar una cantidad adicional que se hubiera podido vender.

$$c_u = Precio\ de\ venta\ normal - Precio\ de\ compra$$

Cálculo de la cantidad óptima de pedido $(\boldsymbol{Q^*})$

Determinar la probabilidad de tener existencias en función de los costos unitarios por **sobrestimar** y **subestimar** la demanda, a partir de su relación crítica, es decir:

$$\boldsymbol{F(Q^*) = P(D \leq Q^*) = \frac{c_u}{(c_0 + c_u)}}.$$

Calculada la probabilidad, determinar Q^* bajo alguna de las siguientes condiciones:

Si $c_u < c$	Entonces	$Q^* = \mu - z\,\sigma$
Si $c_u > c_o$	Entonces	$Q^* = \mu + z\,\sigma$
Si $c_u = c_o$	Entonces	$Q^* = \mu$

μ = representa la demanda promedio durante el tiempo de entrega o espera.
z = representa la probabilidad transformada a valores de z localizados en tablas de la distribución normal.

Como puedes notar, en el modelo de inventario de un solo periodo, un solo pedido, la relación crítica es fundamental para determinar la cantidad de pedido Q^*; de esta manera:

Cuando $\boldsymbol{c_u = c_o}$, el valor de la relación crítica es 0.50, como ya lo habíamos corroborado en la sección 3.1.2. En este caso, la cantidad del pedido es igual a la demanda media o promedio, lo que significa que tenemos 50% de probabilidad de tener un faltante o un excedente.

Si $\boldsymbol{c_u < c_o}$, significa que es mejor colocar un pedido menor que la demanda media, para evitar el costo más elevado de sobreestimar la demanda y tener excedentes.

Si $c_u > c_o$, significa colocar un pedido mayor que la demanda media para lograr una menor probabilidad de faltantes al intentar evitar el costo más elevado de subestimar la demanda y de llegar a tener faltantes.

Ejemplo de aplicación

La empresa Landin, S. A. de C. V. vende agendas para ejecutivos, las cuales solicita una vez al año en el mes de octubre; por experiencia, los administradores saben que la demanda de agendas se aproxima a la demanda de julio, por tanto, estiman que ésta se comporta como una distribución normal con una demanda promedio de 500 agendas y una desviación estándar de $120; las agendas cuestan $150 cada una y la empresa las vende en $300.

a) Si la empresa se deshace de todas las agendas que no se venden al final de julio; es decir, las obsequia a diversas empresas como estrategia de publicidad, su valor de liquidación sería cero, ¿cuántas agendas deberán pedir?

b) Si reduce el precio de la agenda a $100 al final de julio (mitad de año) y puede venderlas todas en ese precio ¿cuántas agendas deben pedir?

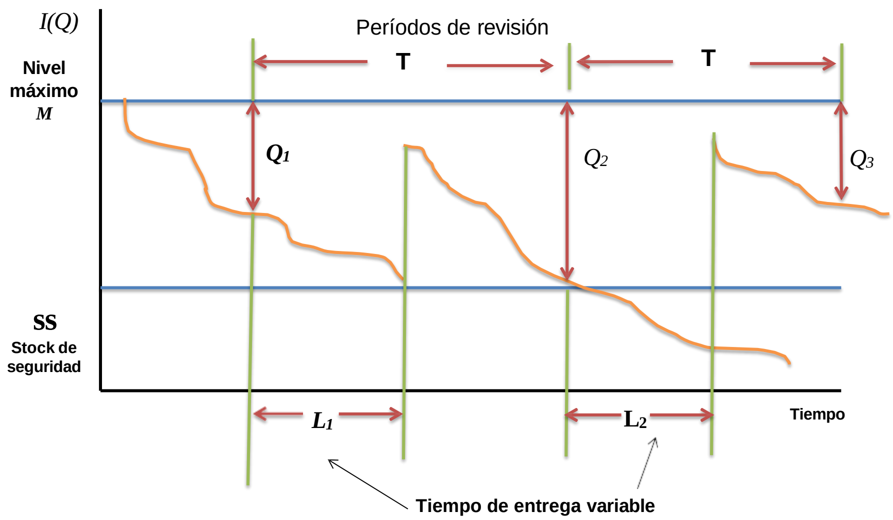
Datos:
μ = 500
z = 120
Precio de compra: 150
Precio de venta: 300

Caso a		Caso b
$$c_o = 150 - 0 = 150$$ $$c_u = 300 - 150 = 150$$ $c_o = c_u$; **entonces,** $Q^* = \mu$. **Por lo tanto, debe comprar 500 agendas.**		$$c_o = 150 - 0 = 150$$ $$c_u = 200 - 150 = 50$$ $c_o > c_u$; **entonces,** $Q^* = \mu - z\sigma$, **Con un nivel de servicio de 95%:** $$z = 1.65$$ $$Q^* = 500 - 1.65 * 120 = 302$$ **Debe comprar 302 agendas.**

D. Modelo de periodo fijo de reorden con demanda probabilística

Con un sistema de revisión periódica, el inventario se vigila y se colocan los pedidos en algunos cuantos puntos específicos en el tiempo. Cuando una empresa maneja múltiples productos, este sistema ofrece la ventaja de requerir que los pedidos para varios artículos se coloquen en el mismo tiempo prestablecido. Con este sistema podemos coordinar mejor nuestros embarques y recibos para múltiples productos (Anderson y Sweeney, 2004). En concreto, con este sistema podemos verificar el inventario a intervalos fijos de tiempo y colocar un pedido por la diferencia entre lo que se tiene y el punto hasta que se ordena. Desde luego, dado que el periodo es fijo, puede presentarse un faltante en algún momento dado.

La figura siguiente, muestra el comportamiento de la demanda y el tamaño del pedido que se coloca en cada momento de revisión. Como podrás apreciar, el tamaño del pedido y el tiempo de entrega son variables, debido a que la demanda es probabilística. En tal virtud, la cantidad a ordenar (Q) debe ser suficiente para regresar a la posición del inventario a su nivel máximo (M).



Modelo de periodo fijo de reorden con demanda probabilística

En este modelo se plantean los siguientes supuestos:

- La demanda tiene distribución normal
- Los costos de faltantes no se conocen y
- Para encontrar el periodo óptimo para ordenar se ignora toda incertidumbre.

Por lo anterior, utilizamos el modelo del intervalo económico de pedido (EOI) y con base en el nivel de servicio encontramos el nivel de inventario máximo al que se ordena. De tal manera que el cálculo del periodo fijo de reorden T se utiliza la siguiente ecuación:

$$T = \sqrt{\frac{2K}{(D)(h)}}$$

Con:

$$t = (T)(días\ hábiles\ al\ año) = periodo\ de\ reorden\ en\ días$$

Donde:

$T =$ Periodo de reorden en años.
$t =$ Periodo de reorden en días.
$D =$Demanda promedio anual.
$K =$ Costo de cada pedido.
$h =$ Costo de manutención de inventario (\$/u-año).

Por su parte, el inventario máximo M se determina como:

$$M = d(t + L)$$

Donde:
$d =$ Demanda promedio diaria.
$L =$ Tiempo de entrega promedio en días.
$t =$ Periodo de reorden en días.

Con demanda y tiempos de entrega inciertos, esta última ecuación debe agregarse el inventario de seguridad (ss) para reducir el riesgo por faltantes, calculado con:

$$ss = z\,\sigma$$

$ss =$ Inventario de seguridad en unidades
$z =$ Nivel de servicio transformado a valores de z leído en tabla de distribución normal.
$\sigma =$ Desviación estándar

Por lo tanto, el inventario máximo M estará calculado de la siguiente manera:

$$M = D(t + L) + ss$$

El costo total anual del inventario CT considera:
Costo total anual de los pedidos más el costo total anual de manutención de inventarios normales más el costo total anual de manutención de stock de seguridad; es decir:

$$CT = K\left(\frac{1}{T}\right) + h\left(\frac{TD}{2}\right) + (h)(ss)$$

La cantidad Q del pedido se determina con:

$$Q = M - \textit{existencia en almacén al momento de efectuar el pedido}.$$

Ejemplo de aplicación

Cierto artículo de inventario tiene una demanda promedio de ocho cajas de agua por día distribuida normalmente. El tiempo de entrega tiene un promedio de tres días, el costo de cada pedido es de $2.25, el costo de manutención es de $1.5 por caja por año. El comerciante deseaba un nivel de servicio de 97% de tener existencias durante el tiempo de entrega y se trabajaban 350 días hábiles al año. La desviación estándar durante el periodo de entrega es de ocho cajas.

Calcular:

a) El periodo fijo de pedido (T) y el inventario máximo (M).
b) Si al momento de efectuar la revisión de nuestras existencias encontramos que tenemos 55 cajas de agua en nuestro almacén ¿Qué cantidad de cajas debemos pedir?

Datos:
$d = 8\ cajas\ por\ día\ \rightarrow\ D\ =\ 8 * 350\ =\ 2800\ demanda\ anual$

$$K = \$2.25\ por\ pedido.$$
$$h = \$1.5\ caja\ por\ año.$$
$$L = 3\ días$$
$$\sigma = 8\ cajas\ por\ día$$
$$días\ hábiles\ al\ año: 350$$

a. Cálculo de T y M

$$T = \sqrt{\frac{2\ K}{D\ h}}$$

$$T = \sqrt{\frac{(2)(2.25)}{(2800)(1.5)}} = 0.0327$$

$$t = (T)(días\ hábiles\ al\ año)$$

$$t = (0.0327)(350) = 11.45\ días\ del\ periodo\ de\ reorden$$

Se sabe que la demanda promedio diaria es de:

$$d = 8\ cajas\ por\ día$$

El inventario máximo M se determina con la expresión:

$$M = d(t + L)$$
$$M = 8\ (11.45 + 3\ ) = 115\ cajas\ de\ agua$$

Para un nivel de servicio de 97% corresponde un valor de 1.90 para z, por lo tanto:

$$ss = z\ \sigma$$
$$ss = (1.90)(8) = 15\ cajas$$

De tal manera que el punto hasta el que se ordena M está calculado de la siguiente manera:

$$M = d(t + L) + ss$$
$$M = 8\ (183 + 3) + 15 = 115 + 15 = 130$$

Por lo tanto, se deben pedir 130 cajas de agua.

b. Cálculo de Q. Si se tienen 55 cajas de agua en el inventario de seguridad.

$$Q = \ M - ss = 130 - 55 = 75$$

3.2.3. Políticas de inventarios

En la práctica las empresas han optado por modelos de gestión que les ha permitido lograr ventajas competitivas por medio de la satisfacción de las expectativas de sus clientes. Los inventarios no han sido la excepción y han formalizado técnicas para el establecimiento de su política de inventario, que les permite tomar decisiones ágiles y oportunas por medio de sistemas de control. Por lo anterior, el diseño adecuado de la política de inventarios es muy relevante para la empresa, toda vez que su aplicación tendrá un efecto clave en su desempeño.

La política de inventario se refiere al conjunto de normas o reglas técnicas establecidas por la dirección con la finalidad de regular el flujo de materiales y las finanzas de la empresa, pero debe orientar su gestión al logro de dos objetivos muy claros y específicos: Primero: mantener niveles de inventario suficientes y; segundo, mantener los costos de manejo lo más bajo posible. Por eso, Pau i Cos y Navascues (1998) indican que la política de inventarios debe centrarse en su manejo, pero también en las decisiones relacionadas con la ubicación de éstos a lo largo del sistema de aprovisionamiento, tanto primario como secundario.

La adecuada elección de una política de inventario contribuye a incrementar la rentabilidad de la gestión y reducir los costos logísticos en las áreas involucradas, por ejemplo: compras, transporte y almacenamiento.

Técnicamente la política de inventario debe considerar la demanda, los tiempos de entrega, las cantidades a pedir, los costos relevantes, como lo veremos más adelante. Sin embargo, es importante que de manera práctica en la definición de la política de inventarios se consideren algunos otros aspectos como los que señala Matamoros y García (2010):

a. Los procesos que participan en la producción o servicio.
b. La interacción entre procesos.
c. Los criterios y métodos necesarios para el control.
d. Los métodos de seguimiento, medición y análisis.

Estos autores recomiendan considerar, además, los objetivos de la empresa, la importancia de cada producto o servicio para el logro de los objetivos y definir sí los productos o servicios debe ser revisado periódica o continuamente. A su juicio, señalan que el control de inventario se definirá según:

- Los diferentes niveles de rentabilidad / utilidad.
- Los diferentes patrones de demanda y capacidad.

Justamente, estos dos criterios han propiciado la expansión de diferentes políticas del control de inventarios dentro de la gran diversidad de sectores industriales y necesidades particulares de los empresarios. A continuación, enunciaremos algunas para que las conozcas, con la finalidad de que profundices en ellas en su estudio o aplicación en la medida que tengas dominio de los modelos antes vistos.

Según las variables de interés, la nomenclatura empleada para identificar las políticas de inventario se sintetizan encerrando entre paréntesis las variables objeto de estudio. Así, las políticas que hemos venido trabajando son:

($\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{s}$): Punto de reorden y tamaño del pedido óptimos

($\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{S}$): Punto de reorden y nivel de orden óptimos

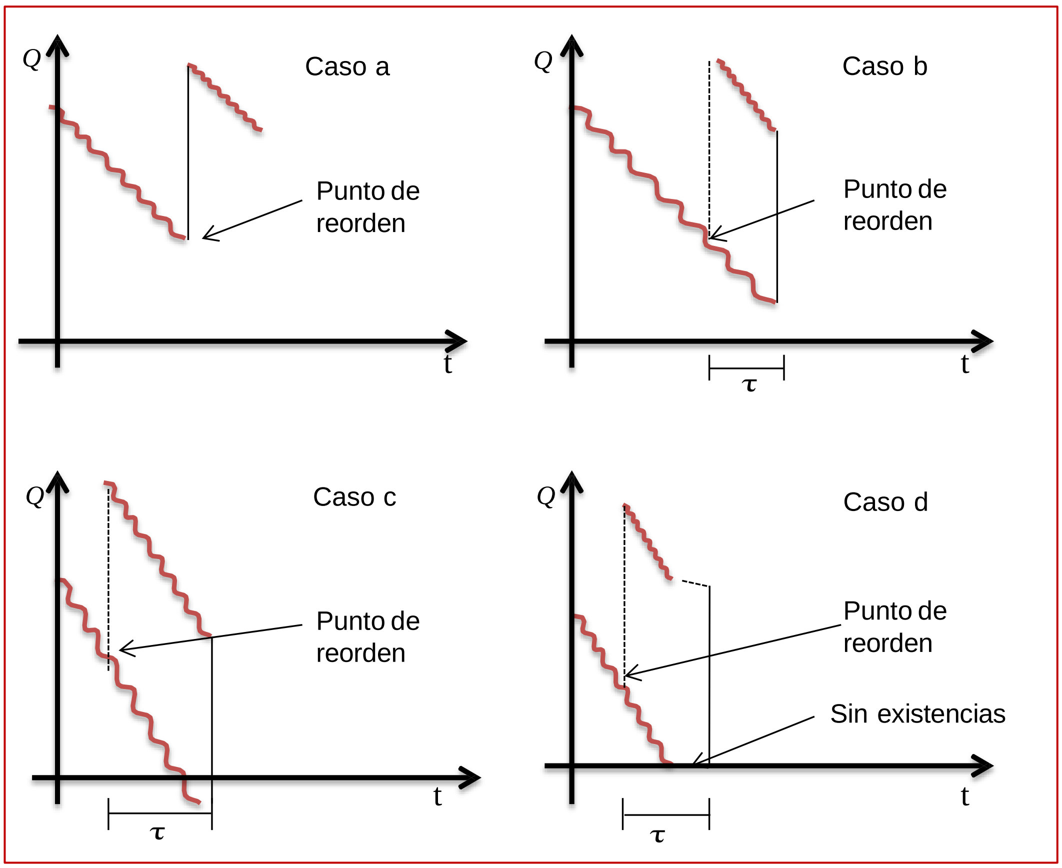
Basado en Peregrina (2000), se desarrolló el resumen de algunas de las políticas de inventario. En principio, podemos decir que cualquiera que sea la política que se adopte, puede presentar alguno de los siguientes cuatro casos:

a) Cuando el tiempo de aprovisionamiento es nulo.

b) Cuando se pretende satisfacer totalmente la demanda.

c) Cuando se permiten faltantes (*backorders*).

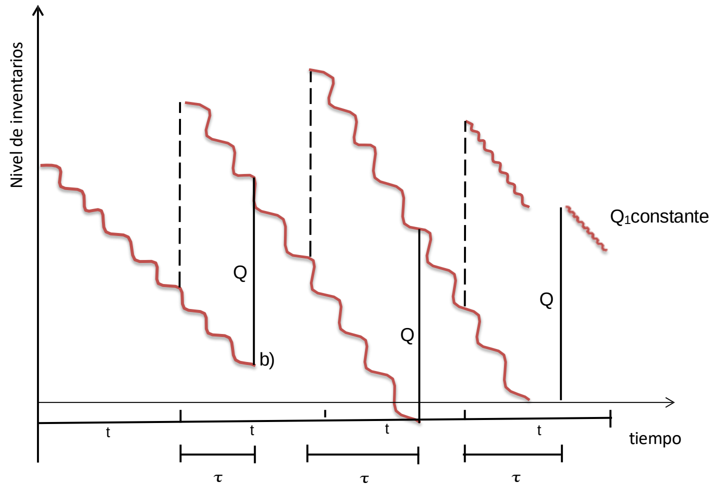
d) Cuando puede haber ventas perdidas.



Casos de estudio

Política ($\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{t}$).

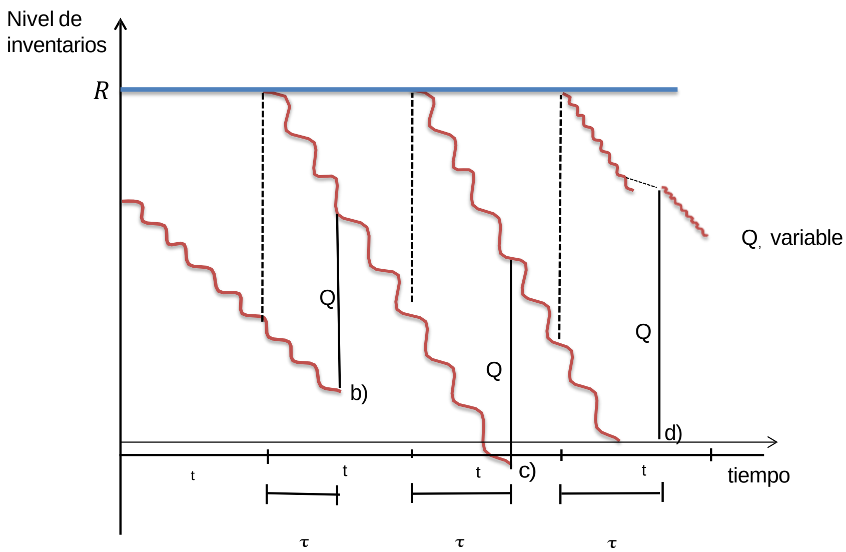
Este modelo es de revisión periódica e indica que cada cierto tiempo $\boldsymbol{t}$ predeterminado, se coloca un pedido de tamaño $\boldsymbol{Q}$ igual en todos los períodos. Las letras entre paréntesis representan el caso antes señalado.



Política ($\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{t}$)

Política ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{t}$)

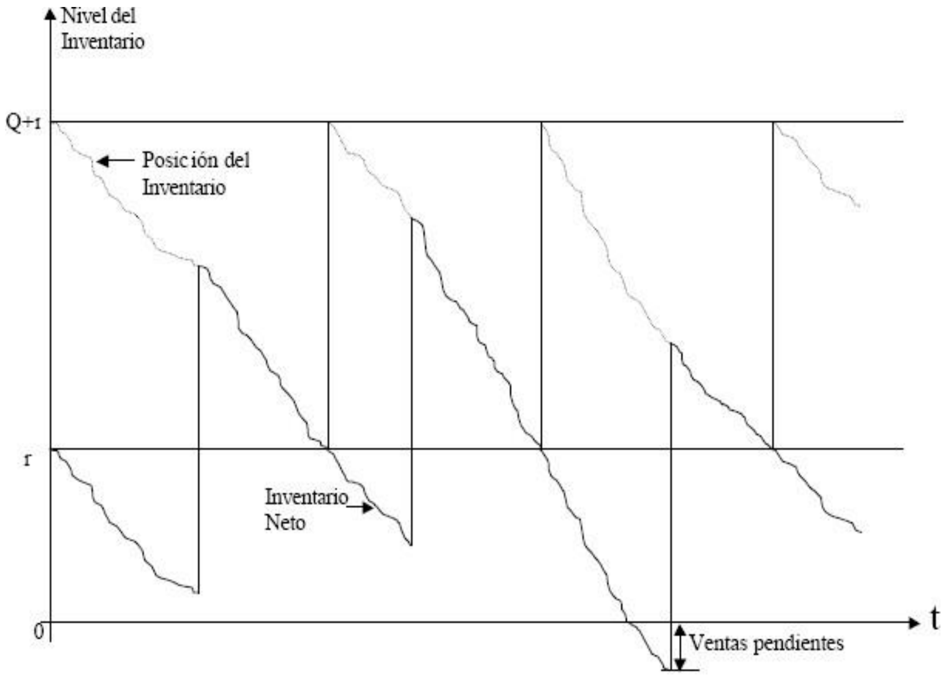
Este modelo es de revisión periódica e indica que cada cierto periodo $\boldsymbol{t}$ predeterminado, se coloca un pedido de tamaño tal, que se alcance el nivel $\boldsymbol{R}$. Las letras entre paréntesis representan el caso antes señalado.



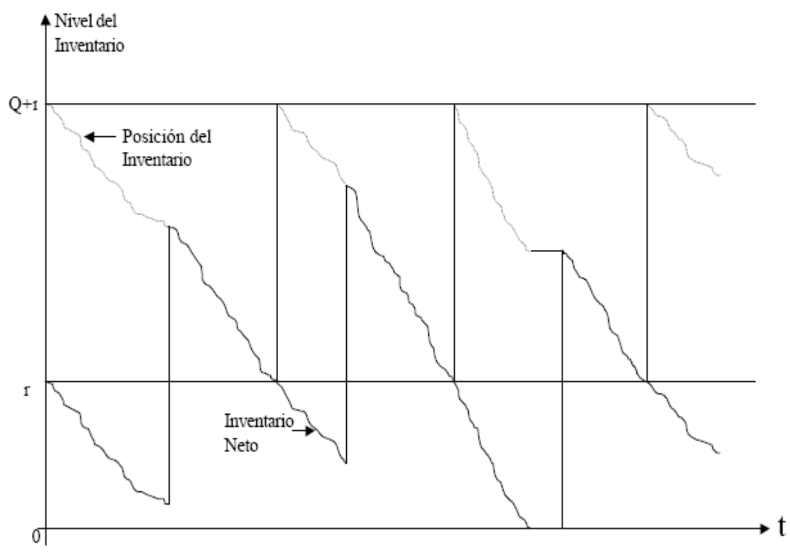
Política ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{t}$)

Política ($\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{r}$)

Este modelo es de revisión continua y plantea que colocar un pedido de tamaño $\boldsymbol{Q}$, cuando se ha alcanzado un punto de reorden $\boldsymbol{r}$, debe satisfacer la condición de que el tiempo de entrega sea distinto de cero.



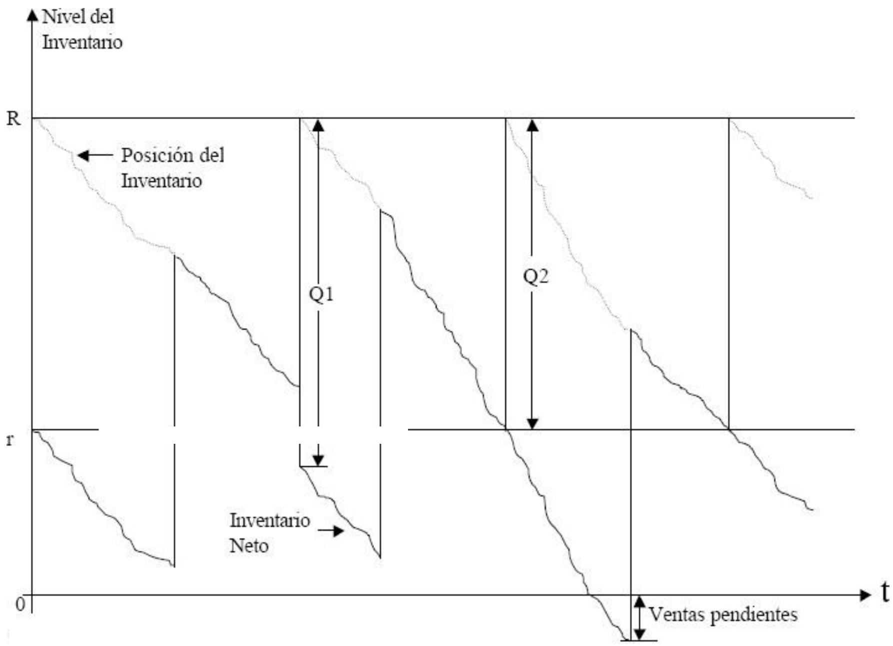
Política $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r})$. Caso de venta pendiente



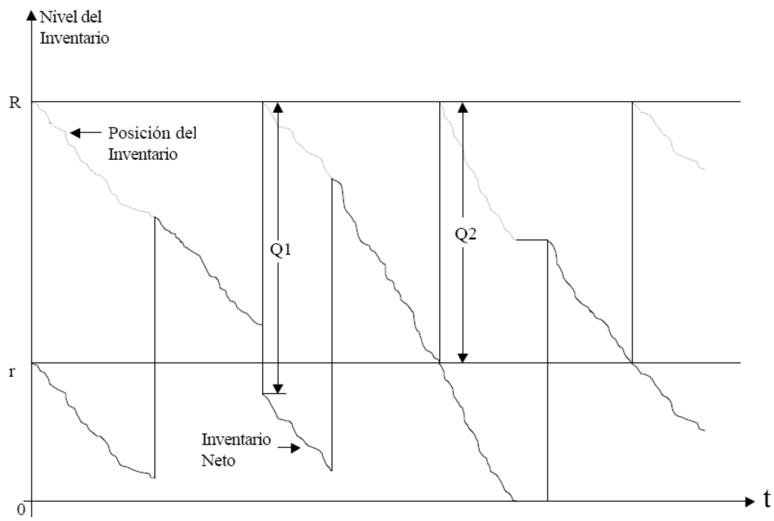
Política $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r})$. Caso de venta perdida

Política $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})$

Esta política consiste en colocar un pedido cuando el inventario sea igual o menor a $\boldsymbol{r}$ y la cantidad a pedir será la que permita llevar el inventario a nivel de $\boldsymbol{R}$.



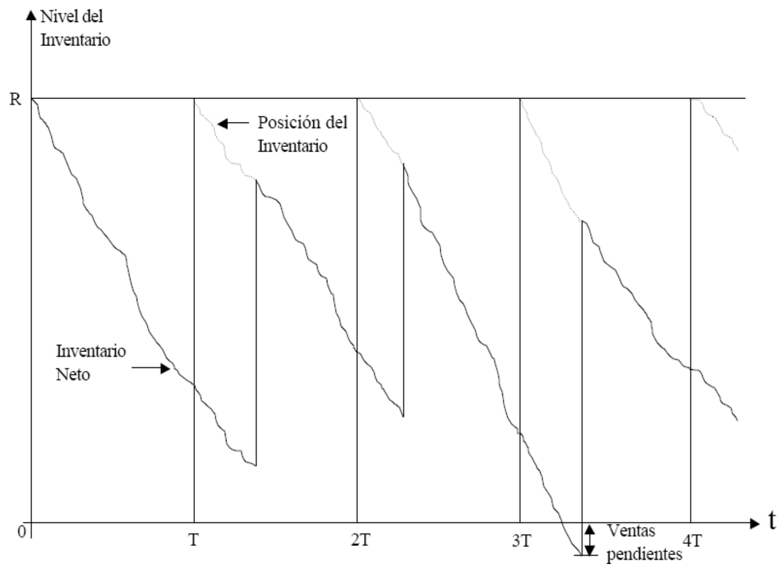
Política (R, r). Caso de venta pendiente



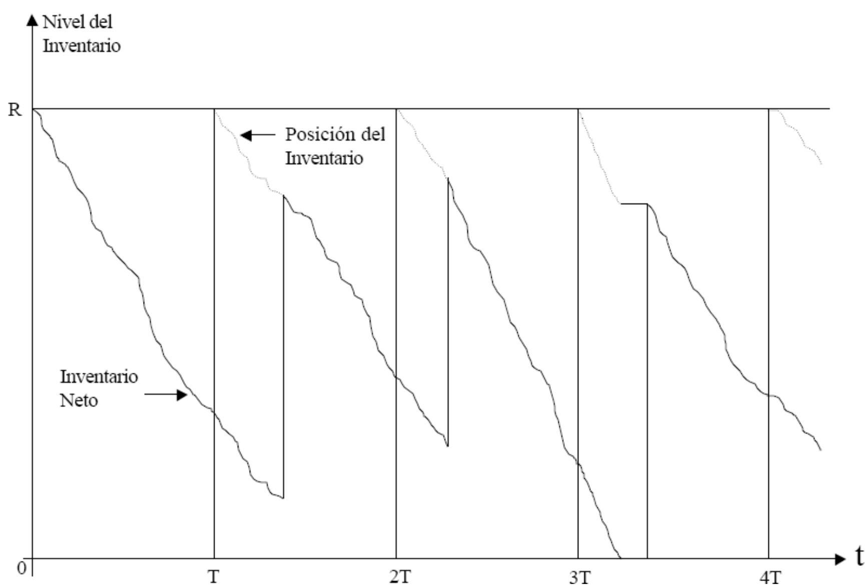
Política (R, r). Caso de venta perdida

Política (R, T)

Es un caso de revisión periódica, donde T es el tiempo que transcurre entre un pedido y otro, en cada revisión se pide una cantidad Q que permita llegar al nivel de R.



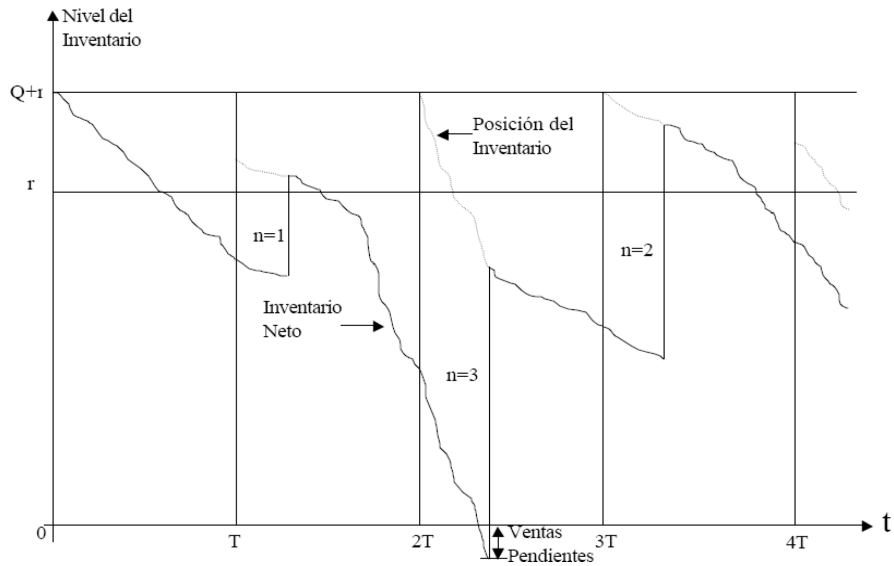
Política ($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{T}$). Caso de venta pendiente



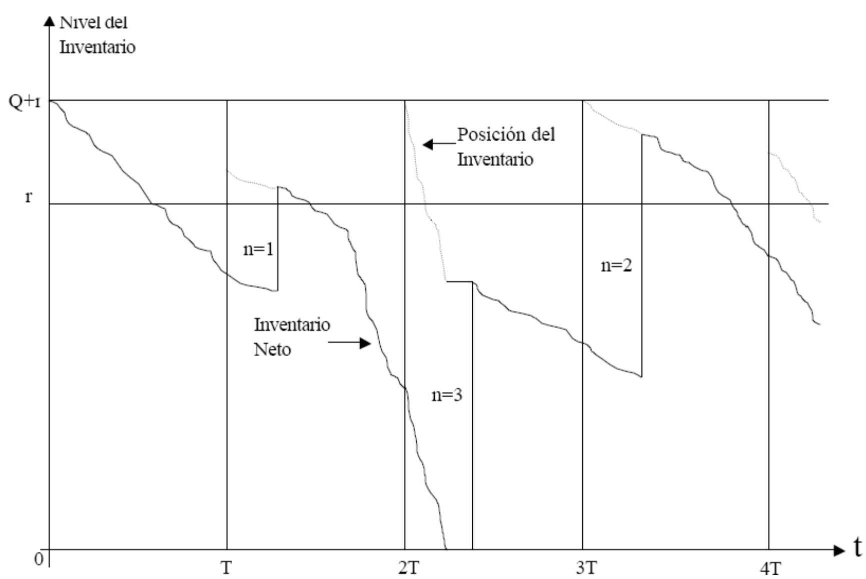
Política ($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{T}$). Caso de venta perdida

Política ($\boldsymbol{nQ}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{T}$)

Esta política de revisión periódica establece que la cantidad a pedir es un entero múltiplo de $\boldsymbol{Q}$. Donde $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ .... El valor de $\boldsymbol{n}$ es el entero que sea lo suficientemente grande que permita que, una vez colocado el pedido, el nivel de inventario se encuentre en el intervalo [$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}$+$\boldsymbol{Q}$].



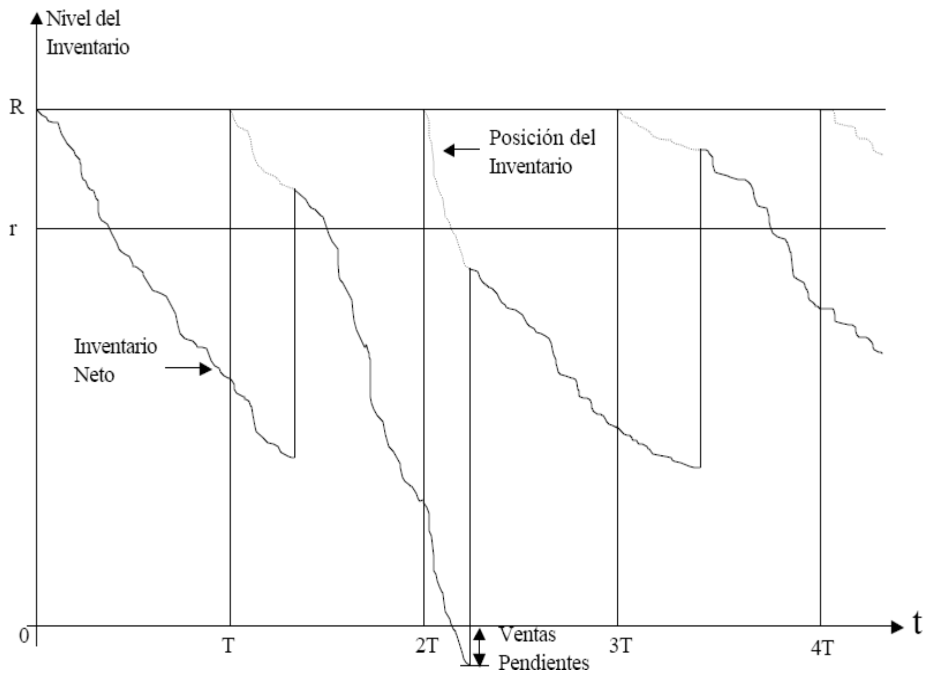
Política ($\boldsymbol{nQ}$, r, $\boldsymbol{T}$). Caso de venta pendiente



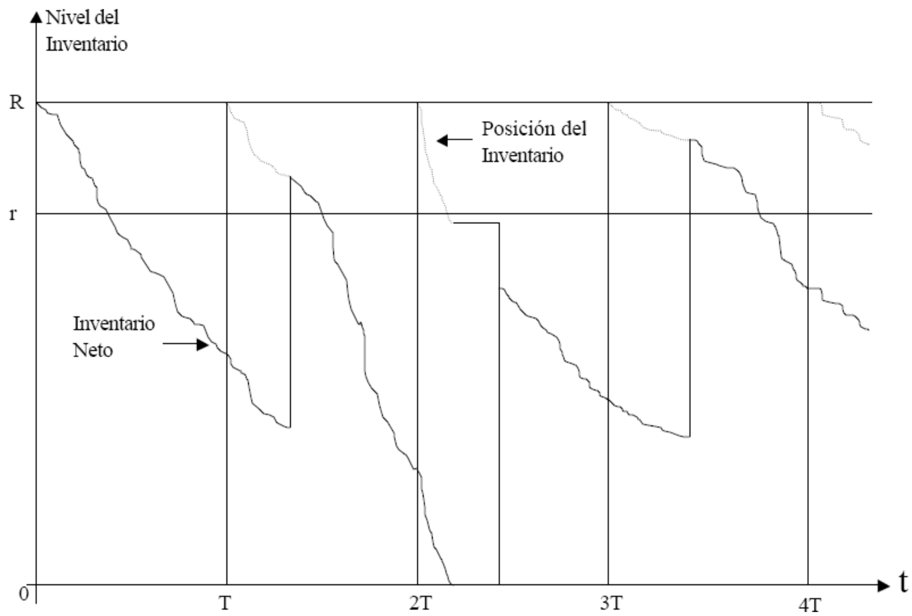
Política ($\boldsymbol{nQ}$, r, $\boldsymbol{T}$). Caso de venta perdida

Política ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{T}$)

Consiste de una política de revisión periódica $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$, en la cual se coloca una orden cuando el nivel de inventario es menor o igual a $\boldsymbol{r}$ y como resultando se tienen la cantidad a pedir $\boldsymbol{Q}$ que lleve al inventario a nivel de $\boldsymbol{R}$.



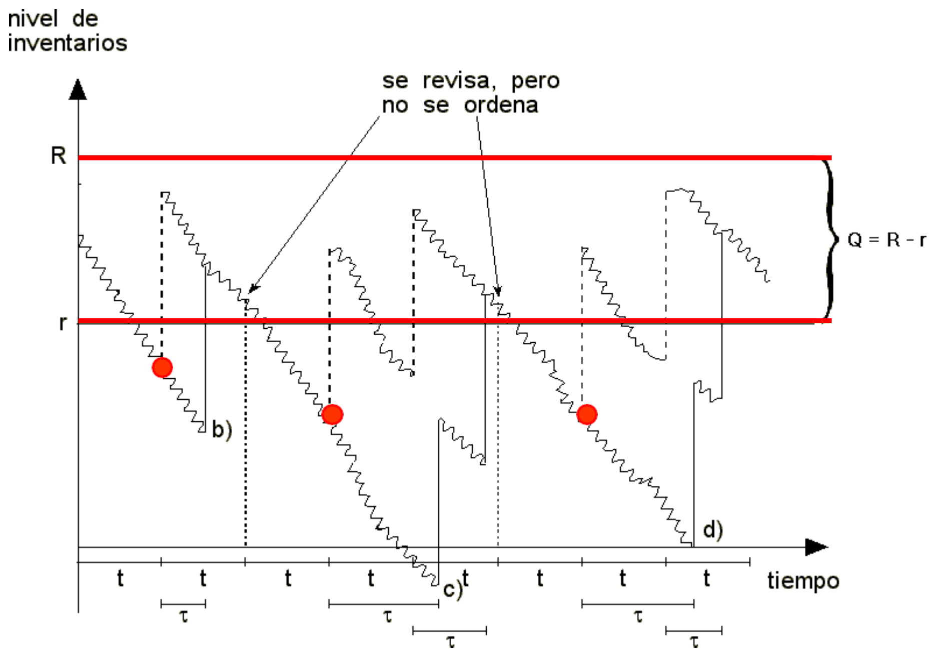
Política ($\boldsymbol{R}$, r, $\boldsymbol{T}$). Caso de venta pendiente



Política ($\boldsymbol{R}$, r, $\boldsymbol{T}$). Caso de venta perdida

Política ($\boldsymbol{nQ}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{t}$)

Cada cierto periodo $\boldsymbol{t}$ predeterminado, se revisa el nivel de existencias; si se ha alcanzado un nivel inferior o igual a $\boldsymbol{r}$ se coloca un pedido de tamaño $\boldsymbol{nQ}$ (múltiplo de $\boldsymbol{Q}$, donde ($\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}$), de manera que el nivel de existencias quede entre $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{R}$.



Política ($\boldsymbol{nQ}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{t}$). Caso de venta perdida

Como puede notarse en las políticas de inventarios presentadas, en la medida en que venimos avanzados, los modelos cada vez son más complejos, razón por la cual es importante dominar las bases teóricas de los modelos de gestión revisados en la sección anterior.

3.3. Administración de inventarios

La administración de inventarios es la eficiencia en el manejo adecuado del registro, de la rotación y evaluación del inventario de acuerdo con cómo se clasifique y qué tipo de inventario tenga la empresa, ya que a través de todo esto determinaremos los resultados (utilidades o pérdidas) de una manera razonable, pudiendo establecer la situación financiera de la empresa y las medidas necesarias para mejorar o mantener dicha situación.

La administración de inventario implica la determinación de la cantidad de inventario que deberá mantenerse, la fecha en que deberán colocarse los pedidos y las cantidades de unidades a ordenar. Ahora analizaremos algunos elementos de la administración de inventarios.

3.3.1. Gestión financiera de los *stocks*

En términos generales, la gestión financiera de stocks implica el establecimiento de las medidas más adecuadas para reducir el impacto financiero en la empresa por el capital inmovilizado debido a la posesión de inventarios. Ciertamente, las existencias representan una clase de inversión obligada que es necesario financiar, y que en el corto plazo formarán parte de su activo circulante.

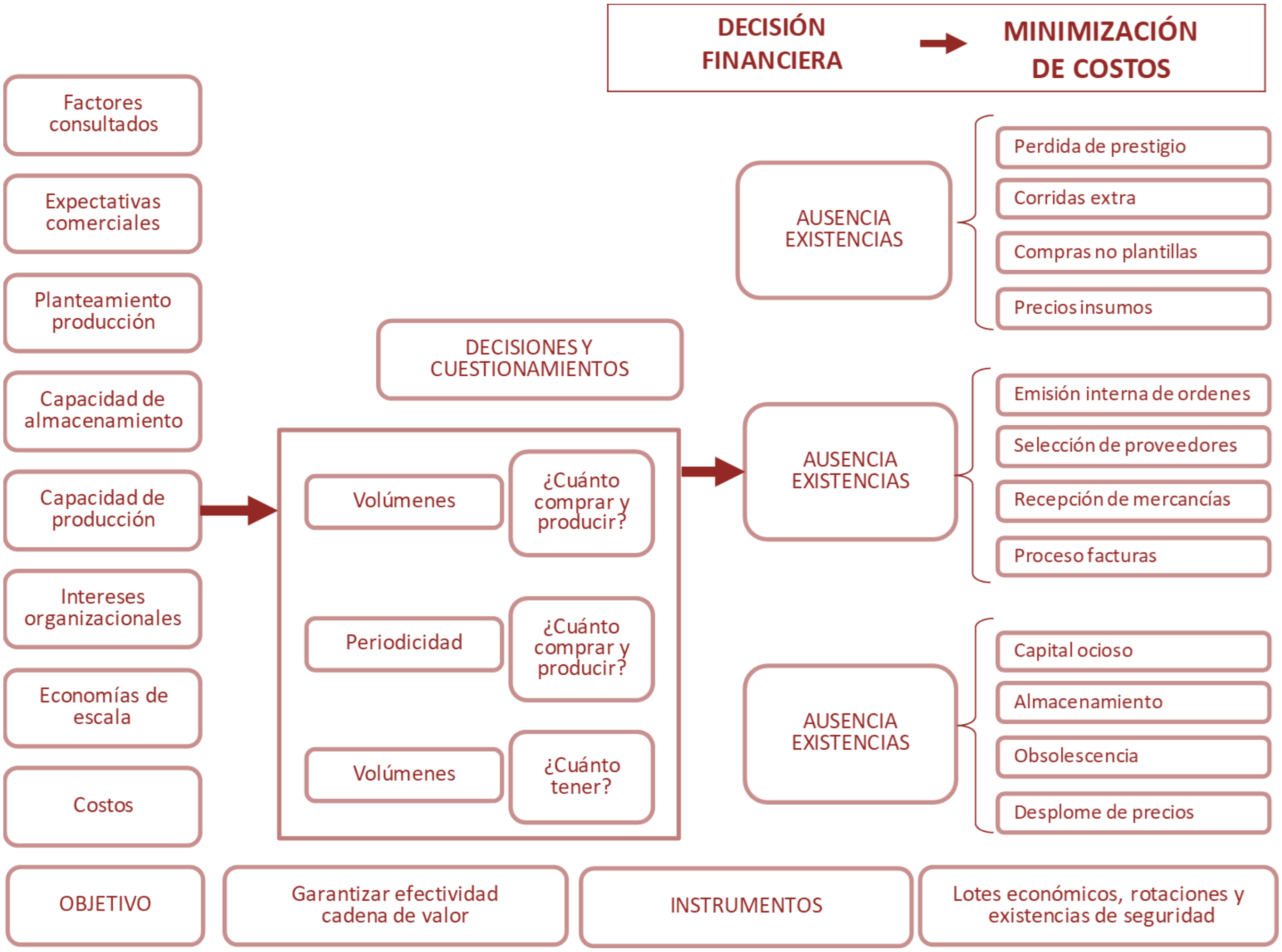
En efecto, los inventarios son la piedra angular de la producción y su manutención cuesta dinero que debe ser rotado con los índices más altos desde cualquier punto de vista e independientemente de los conflictos que se presentan en la arena logística, cuidando en todo momento el aspecto financiero de gestión de inventarios, pues aún y cuando el área de producción y venta marque el rumbo en la gestión de *stocks*, será fundamental que dicha área tengan en cuenta sus implicaciones financieras, pues "…la dirección financiera se enfrenta con el hecho de que el mantenimiento de los *stocks* absorbe unos fondos que tiene que procurar y administrar" (Faus, 1995).

Por ello, Hinestroza (2009) señala que en materia financiera es obligatorio consultar diversas categorías de costos para establecer el tamaño óptimo de pedidos de cada insumo o componente, los niveles óptimos de inventarios y el volumen apropiado de las corridas de producción; ciertamente la gestión financiera emplea los costos de inventarios como un método para el control y asignación de los recursos financieros. En tal virtud, debemos tener en cuenta que el aumento de materiales, mercancías o insumos, como parte del manejo del stock, puede ser un freno importante para el desarrollo financiero de la empresa.

Desde este punto de vista y con lo revisado hasta el momento, puede decirse que el estudio de los inventarios es muy importante, teniendo en cuenta que la inversión en activo circulante al final se transformará en ventas o producción mercantil de la empresa. Como ya lo habíamos comentado, en el ámbito financiero el inventario es el mayor de los activos circulantes, por este motivo sus problemas de gestión pueden ser los causantes del déficit financiero de la empresa; por un lado, porque es una inversión que hacen los empresarios, sobre todo, y aunque parezca una contradicción, para mantener el flujo continuo de los productos para abastecer al sistema de producción y consumo.

Por lo anterior, Faxas (2011) nos indica que "…el equilibrio financiero a corto plazo se logrará cuando, por una parte, se genera el dinero suficiente y en el momento oportuno; por otra parte el equilibrio anterior debe llevar aparejado que la empresa tenga una inversión de sus materiales e insumos corrientes en la medida adecuada, de forma que no mantenga un exceso que implique recursos ociosos o un defecto que no permita una posible expansión o el ahorro de costos adicionales". No obstante, Hinestroza (2009) señala que "…el equilibrio depende de la estimación de las economías reales del costo de mantener inventarios y de la eficiencia del control".

En el siguiente esquema, se observa cómo la política financiera de inventarios está orientada a determinar el equilibrio, a través de la evaluación de los siguientes conceptos: a) establecimiento de la política; b) prácticas de compras; c) niveles de inventarios; d) decisiones financieras; e) instrumentos matemáticos empleados para optimizar el capital invertido en inventarios y f) objetivos de la política.



Marco conceptual de la política de inventarios
Fuente: Hinestroza (2009)

"Puede concluirse que la política financiera de inventarios debe implementarse para obviar los fenómenos de insuficiencia o saturación de existencia, mediante el estudio detenido de los factores que intervienen en la formulación de la política y la aplicación de los instrumentos matemáticos explicados, tales como lotes económicos de pedido y producción, niveles promedio y máximo de inventarios, periodicidad de las compras y de las corridas de producción y punto de renovación de pedidos" (Hinestroza, 2009).

3.3.2 La inflación en la administración de inventario

En una situación ideal las empresas pueden protegerse de la inflación incrementando sus inventarios antes de que ocurra ésta. En tal virtud el tomador de decisiones deberá equilibrar el costo de manutención de altos inventarios con los beneficios que obtendrá al utilizarlos. Por este motivo, Paredes (1995) recomienda incluir en el modelo *EOQ* las siguientes dos variantes dentro de los procesos inflacionarios:

a) La modificación de los costos involucrados en la compra de inventario, y
b) La variación del costo de dinero en el tiempo.

Para dicho autor, la actualización constante de estos costos, debido a la inflación, incide directamente en los sueldos y salarios, los que a su vez influyen en consecuencia sobre el costo por ordenar; asimismo, debido a que la inflación incide sobre el precio de los artículos, el costo de manutención de inventarios también deberá ajustarse a la tasa de inflación de los mismos.

Por otro lado, debe tenerse en cuenta que el costo de oportunidad del dinero, que representa lo que se deja de ganar por tenerlo invertido en inventario y no en otra inversión, también se verá afectado por la inflación de la economía en general. Al respecto Paredes (1995) recomienda que "…si el valor del dinero esta subvaluado con relación a la inflación (tasas de interés negativas), es recomendable, trabajar con la masa de inflación, la cual dará un valor más representativo del dinero inmovilizado en el inventario".

El cálculo para la cantidad económica de pedido considerado la inflación sería la siguiente:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2DK(1+W_2)}{(h \times i) - (h \times W_1)}}$$

$$W_1 = Inflación\ específica\ del\ artículo$$
$$W_2 = Inflación\ de\ sueldos\ y\ salarios$$
$$i = Tasa\ porcentual\ de\ manutención$$

La aplicación práctica para esto lo podemos ver a través de un ejercicio:
Determinar la cantidad económica de pedido para una empresa que presenta la siguiente información:

- Costo del pedido: \$20,000
- Requerimientos anuales: 60,000 unidades
- Costo del artículo: 300
- Costo de mantener inventarios: 150%
- Inflación inherente al artículo: 130%
- Inflación de sueldos y salarios: 30%

Sin considerar la inflación nuestro resultado sería el siguiente:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}} = \sqrt{\frac{2(60{,}000)(20{,}000)}{(300 \times 1.5)}} = 2{,}309\ unidades$$

Al considerar la inflación nuestro resultado sería el siguiente:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2DK(1+W_2)}{(h\times i)-(h\times W^1)}} = \sqrt{\frac{2(60{,}000)(20{,}000)(1+0.3)}{(200\times 1.5)-(200\times 1.3)}} = 8{,}831.76$$

Aquí se observa que la cantidad corregida por inflación es mayor que el CEP tradicional. Cuando el costo de mantenimiento es menor que la inflación especifica del producto, no hay costo de mantenimiento sino una ganancia neta de inventario. En tal circunstancia, el denominador de la fórmula del lote óptimo se vuelve negativo y el modelo no es aplicable a la realidad. En estas condiciones se requiere trabajar con un modelo de compra especulativa.

Cuando la inflación específica del producto tiende a ser mayor que la inflación general de precios, en este caso, ante la posibilidad de una elevación de costos de dicho artículo, es conveniente incrementar el lote del pedido a fin de evitar costos mayores. A medida que dicho diferencial sea mayor, la magnitud del lote debe ser incrementado, considerando los demás factores constantes. Por el contrario, cuando la inflación del artículo tiende a ser menor que la inflación general y al esperar que los precios del artículo bajo estudio se eleven a ritmos menores que la inflación, el gerente de compras no percibe ganancias por aumentar su pedido y, por lo tanto, el lote a adquirir es menor (según Indacochea, citado por Paredes, 1995).

3.3.3. Estrategias de gestión de inventarios

En principio, puede definirse una estrategia de gestión de inventarios como “el plan de largo plazo que permite enfocar los esfuerzos y alinear los recursos de manera productiva de un conjunto de procesos de negocio, subordinados a la estrategia corporativa, con el fin de lograr una mejor administración de los inventarios” (Jiménez, 2006). En general, las estrategias más comunes para la gestión de inventarios son las que tienen un enfoque en la coordinación.

En términos generales, las estrategias de coordinación de inventarios plantean distintos escenarios en los que combinan diversos elementos de análisis. Los más comunes son: la demanda, que puede ser considerada como determinística (conocida) o estocástica, variable o constante; el inventario puede estar analizado bajo un entorno de revisión continúa o periódica y su coordinación, establecerse desde la estructura más simple, la cual comprende un solo proveedor con un solo cliente, hasta múltiples proveedores con múltiples clientes. En este entretejido, los estudios pueden considerar un solo producto o múltiples productos, con o sin faltantes o escasez permitida. Establecen horizontes de planeación finitos o infinitos. De acuerdo con Jiménez (2006), “los más complejos, involucran parámetros relacionados con el tipo de transporte empleado o elementos inflacionarios con carácter estocástico”.

Las variantes anteriores son combinadas utilizando el marco conceptual de las estrategias más comunes utilizadas para coordinar los inventarios. Con el propósito de ilustrar las características que distinguen a cada una de éstas, a continuación, se lleva a cabo una breve descripción de las más usuales.

A. Estrategia de desarrollo conjunto de órdenes (DCO)

Este tipo de estrategia fue el primer intento por estabilizar los desequilibrios entre la oferta y la demanda. Su objetivo busca uniformizar los lotes de producción del proveedor (fabricante) y el tamaño de las órdenes del cliente. La estrategia reside en que el eslabón de la cadena de suministro con mayor poder de negociación, imponga su fuerza a efecto de lograr el equilibrio. Fundamentalmente, este tipo de estrategia sigue el modelo clásico *EOQ*, el cual siempre es complementado con algún mecanismo de coordinación; siendo el más común, la compensación económica (descuento fijo en el precio).

B. Estrategia "Justo a Tiempo" (JIT: *Just in Time*)

Es la estrategia más popular y quizá una de las más empleadas en ciertos sectores industriales (por ejemplo, el automotriz). Su diseño está fundamentado en la mejora del flujo interno de las materias primas en las plantas de producción. Uno de los propósitos clave de la estrategia JIT es la eliminación del exceso de inventario en todas las partes del proceso de producción, calculando el movimiento de los materiales en cada estación de trabajo para que éstos lleguen justo en el momento que son necesarios para la siguiente operación. Esta práctica minimiza los inventarios en todas partes del proceso de producción, ayudando a las empresas manufactureras a reducir sus costos de almacenamiento y de obsolescencia, así como a mejorar el retorno de sus activos. Estas ventajas han conducido a una amplia adopción de la estrategia JIT en todas las industrias que usan técnicas de producción repetitivas (Taylor, 2004).

C. Estrategia "Respuesta Rápida" (QR, *Quick-Response*)

Proporciona la capacidad suficiente para hacer de la información de la demanda un elemento director para la toma de decisiones hasta el último momento posible en el tiempo, buscando: 1) asegurar que la oferta sea maximizada y 2) que exista una reducción al mínimo de los tiempos de ciclo y los costos de inventario, aprovechando las ventajas competitivas otorgadas por la tecnología de la información. En especial, la estrategia hace hincapié en la flexibilidad y velocidad del producto a fin de cumplir con las demandas cambiantes de un mercado competitivo, volátil y dinámico (Christopher y Towill, 2002). Básicamente, la estrategia se basa en compartir información entre los socios comerciales acerca de la oferta y la demanda de los productos, utilizando las tecnologías de la información.

D. Estrategia de Reaprovisionamiento Eficiente (ER: *Efficient Replenishment*)

El modelo de reaprovisionamiento eficiente consiste en integrar los diferentes ciclos de reaprovisionamiento desconectados (punto de venta-mayorista, mayorista-almacén distribuidor, almacén distribuidor-almacén proveedor) en un sistema integral, posicionando al consumidor final como el primer eslabón de la cadena. Su objetivo está enfocado a minimizar el tiempo, los inventarios y los costos incurridos a lo largo de este proceso.

E. Reaprovisionamiento Continuo (*CR: Continuous Replenishment*)

Reaprovisionamiento continuo es definido como "…la práctica asociada entre los diferentes miembros del canal logístico que modifican el procedimiento tradicional para la generación de órdenes, dirigida por el fabricante basado en la lógica del modelo *EOQ* (tamaño de lote económico), que introduce modelos de abasto administrados por él, apoyados en datos de la demanda actual y pronosticada…" (Cavalieri y otros*,* 2001). Trasladando la gestión del inventario directamente a los fabricantes, la estrategia *CR* permite a los proveedores: 1) eliminar costos por emisión de pedidos; 2) evitar envíos más frecuentes y 3) ganar una mayor rotación de inventarios.

F. Planeación, Pronóstico y Reabastecimiento Colaborativo (*CPFR: Collaborative Planning, Forecasting and Replenishment*)

Es un conjunto de prácticas de negocio nuevas o perfeccionadas, apoyadas en *Internet* y las tecnologías de la información. Reduce de forma drástica los inventarios globales por medio del desarrollo de técnicas de colaboración y de compartir información entre clientes y proveedores. Descansa en un conjunto de modelos basados en la tecnología y en los procesos de negocio aplicados a las actividades de la cadena de suministro. Todos los eslabones de la cadena introducen sus pronósticos y resultados en *Internet*. El *software* CPFR disponible, analiza dichos datos y alerta a cada socio sobre situaciones excepcionales que puedan afectar el pronóstico, promoviendo la búsqueda de soluciones en colaboración. Su misión es compartir información de forma dinámica integrando los procesos de "oferta" y "demanda".

G. Inventario administrado por el proveedor (*VMI: Vendor Management Inventory*)

El proveedor está autorizado a manejar los inventarios de acuerdo con las unidades de reserva convenidas en el almacén del cliente. Este tipo de estrategia es también conocida como "ventas a consignación". En términos generales, se puede considerar como una extensión de la estrategia *CR*. Zanoni y Zavanella (2003) consideran que una política de ventas a consignación está basada en las siguientes tres reglas: 1) el proveedor garantiza a su cliente un nivel mínimo (s) y máximo de inventario (S); 2) el inventario es ubicado cerca de la línea de producción del cliente y 3) la posibilidad de utilizar el material diariamente de acuerdo con sus necesidades. El proveedor es pagado por esos materiales de acuerdo con su contrato, hipotéticamente por arriba de la frecuencia diaria; así, la información relacionada con la tendencia del consumo es también actualizada e inmediatamente transferida al proveedor.

Estrategia épocas comunes de resurtido (CRE: *Common Replenishment Epochs*)

Busca coordinar los inventarios de proveedores y clientes por medio de un descuento en los precios y con el establecimiento de períodos específicos de abasto. El proveedor propone a sus clientes establecer períodos de surtimiento de acuerdo con su política óptima de resurtido y, con ello, buscar aprovechar las economías de escala de la producción, de la gestión de pedidos (consolidación) y del transporte. A cambio, propone a los clientes un descuento en los precios por aceptar dicha estrategia y con ello compensar los costos adicionales que les causa el sobre inventario. Por lo tanto, el cliente que acepte dicha propuesta sólo podrá hacer pedidos en los períodos y cantidades que el proveedor le indique, sin embargo, deberá asegurar que los ahorros ofrecidos por el proveedor sean más altos o al menos iguales que los costos de operación que le produce la estrategia (Piplani y Viswanathan, 2004).

El tema del control y gestión de inventarios, durante décadas ha sido uno de los temas de mayor interés para practicantes e investigadores y, sin duda hoy en día, sigue siendo un tópico de gran trascendencia. Por mucho tiempo, la importancia principal de los inventarios se sustentó para disponer de los insumos necesarios para mantener en operación las líneas de producción o para responder, con grandes volúmenes de inventario, a los requerimientos de los clientes por parte de las empresas. De acuerdo con el nuevo orden mundial, la gestión de inventarios ha dejado de ser una actividad funcional, para convertirse en un elemento estratégico de competitividad.

Cierre de la unidad

Antes que nada nos permitimos felicitarte ampliamente por haber llegado a esta instancia por tu disciplina y constancia. Como pudiste notar, los modelos de inventarios se agrupan en dos grandes vertientes, según las consideraciones que se la hagan a la demanda, ya sea determinística o probabilística. De igual modo, observaste que se destaca el modelo de cantidad económica de pedido conocido como EOQ, por ser el modelo de gestión de inventarios que detonó el estudio de esta importante área de la gestión logística, ya que como pudiste notar, dicho modelo se ha extendido hacia otros cada vez más complejos, los cuales también se clasifican de revisión periódica y revisión continua.

En particular, el estudio de estos modelos seguramente te ha dado la oportunidad de identificar las principales variables de costo que intervienen en la determinación del tamaño del pedido y los diferentes métodos para resolver problemas de inventarios, a partir de los cuales pudiste definir la política de inventario. En este sentido, los diversos modelos o políticas de inventarios revisados nos permiten tener presente diferentes maneras de establecer una estrategia de gestión de inventarios.

En un contexto más amplio, la gestión de inventarios es una de las Unidades Didácticas más importantes en la logística y la cadena de suministro por dos razones: 1) los inventarios son activos circulantes de la empresa, que coloca a la logística dentro del ámbito financiero, pues en la estructura del costo logístico es uno de los dos conceptos más relevantes y 2) los inventarios son el elemento que definen el desempeño de la cadena de valor y la competitividad. Recuerda, la escasez y los faltantes, crean costos en términos de pérdidas que deben ser evitadas al máximo, he ahí la importancia de la gestión de inventarios.

Pues bien, te invitamos a seguir adelante y tener presente lo aprendido en esta Unidad Didáctica, por la gran relación que existe por ejemplo con transporte y almacenamiento.

Para saber más

Para ampliar tus conocimientos sobre el tema 3.2.2, sobre las formas de cálculo de lote económico, te recomendamos leer el siguiente material, donde podrás encontrar una aplicación del modelo de periodo de tiempo fijo con un nivel de servicio específico en un sector industria.

- Ballesteros Riveros, D. P., & Ballesteros Silva, P. P. (2007). Aplicación del modelo de periodo de tiempo fijo con un nivel de servicio específico en una industria farmacéutica. *Scientia Et Technica*, *13*(35), 345–350. Universidad Tecnológica de Pereira. https://www.redalyc.org/pdf/849/84903560.pdf

De manera general, puedes consultar el siguiente libro que se especializa en el tema de los inventarios.

- Nahmias, S. (2007). *Análisis de la Producción y las Operaciones*. Mc Graw Hill, ISBN: 9789701062395.

Fuentes de consulta

- Abdul-Jalbar, B. (2005). *Distribution Systems: Advances in Inventory Management*.
- Alfalla, R. (2007). *Introducción a la dirección de operaciones táctico-operativa: un enfoque práctico*. Delta Publicaciones, 1.
- Anaya, J. (2007). *Logística integral. La gestión operativa de la empresa* (Tercera ed.). ESIC Editorial.
- Anderson, D., & Sweeney, D. (2004). *Métodos cuantitativos para los negocios. Soluciones empresariales* (Novena ed.). Cengage Learning Editores.
- Barfield, J., Raiborn, C., & Kinney, M. (2004). *Contabilidad de costos: tradiciones e innovaciones.* México: International Thomson Editores.
- Bellini M. F. (Marzo-Julio de 2004). *Teoría aplicable al Modelo de Inventarios*.
- Bellini, F. (2004). Una aproximación a los modelos de inventarios.
- Besley, S., & Brigham, E. (2008). *Fundamentos de administración financiera/ Essentials Of Managerial Finance.* Cengage Learning Editores.
- Cantalapiedra, M. (Julio-Agosto de 2006). *Claves para optimizar la gestión financiera de los stocks*. Estrategia Financiera.

- Cavalieri, S., Cesarotti, G., & Spandri, A. (2001). *Coordinated Planning Models for Managing Spare Parts Inventory in After Sales Service. Work Paper*.(Manuscrito no publicado). Bergamo, Italia.
- Chary, S. (2004). *Production and Operations Management* (Tercera ed.). N. Y., Estados Unidos: McGraw-Hill Education.
- Christopher, M., & Towill, D. (2002). *Developing Market Specific Supply Chain Strategies. International Journal of Logistics Management,* 13(1), 1-14.
- Faus, J. (Noviembre de 1995). *La gestión financiera de los stocks.* División de Investigación del IESE.
- Faxas, J. (2011). *Administración de inventario para el análisis económico financiero de la empresa.* Obtenido de http://www.eumed.net/cursecon/ecolat/cu/2011/pjft2.htm
- Gaither, N., & Frazier, G. (2000). *Administración de producción y operaciones. Soluciones empresariales* (Cuarta ed.). Cengage Learning Editores.
- Hinestroza, S. (2009). *Finanzas 1. Gestión del capital del trabajo.* Guía didáctica y módulo.
- Izar, J. (1996). *Fundamentos de Investigación de Operaciones* Vol. I,. San Luis Potosí, S.L.P.: Editorial Universitaria Potosina.
- Jiménez, E. (2006). *Coordinación de inventarios en una cadena de suministro a través de épocas comunes de resurtido bajo demanda dinámica considerando diversos modos de transporte y diferentes políticas de descuento en los precios de los productos y en las tarifas de transporte*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia. España.
- Jiménez, E. (2006). *Estado del arte de los modelos matemáticos para la coordinación de inventarios en la cadena de suministro.* Publicación Técnica, Instituto Mexicano del Transporte, Sanfandila, Pedro Escobedo, Querétaro.
- Krajewski, L., & Ritzman, L. (2000). *Administración de operaciones: estrategia y análisis.* México: Pearson Educación.
- Matamoros, I., & García, F. (2010). *Política de inventario, un aporte a la eficiencia*. (EUMED, Ed.) Obtenido de Número Internacional Normalizado de Publicaciones Seriadas: http://www.eumed.net/ce/2010b/mhgg.htm
- McKeown, D. (2000). *Modelos cuantitativos para la administración* (Primera ed.). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Moya, M. (1991). Control de Inventarios Investigación de Operaciones (Cuarta ed.). EUNED.

- Nahmias, S. (2007). *Análisis de la Producción y las Operaciones* (Primera ed.) España: Mc Graw Hill.
- Pau i Cos, J., & Navascues, R. (1998). *Manual de logística integral*. Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos.
- Peregrina, P. (2000). *Empleo de superficies de respuesta para la solución de problemas de inventarios estocásticos*. Tesis de Licenciatura Ingeniería Industrial.
- Piplani, R., & Viswanathan, S. (Junio de 2004). *Supply chain inventory co-ordination through multiple, common replenishment epochs and selective discount. International Journal of Logistics*, Publisher: Taylor & Francis, 7(2), 109-118.
- PriceWaterhouseCoopers. (s.f.). *Manual de consulta gestión de stocks*.
- Render, B., & Hanna, M. (2006). *Métodos cuantitativos para los negocios* (Noventa ed.). Pearson Educación.
- Rios, F., Martínez, A., Palomo, T., Cáseres, S., & Díaz, M. (2008). *Inventarios probabilísticos con demanda independiente de revisión continua. Modelos con nuevos pedidos.* Revista Ciencias Ergos Sum. UAEMEX. , 15(3), 251-258.
- Soret, I. (2004). *Logística comercial y empresarial*. ESIC.
- Taha, H. (2004). *Investigación de operaciones* (Séptima ed.). Pearson Educación.
- Taylor, D. (2004). *Supply Chains: A Manager's Guide.* Addison Wesley Professional.
- Winston, W. L. (2005). *Investigación de operaciones: aplicaciones y algoritmos* (Cuarta ed.). Cengage Learning Editores.
- Zanoni, S., & Zavanella, L. (2003). *A Strategy for Vendor Managed Inventory: Analytical Approach and Performance Evaluation*. Brescia: Università Degli Studi di Brescia - Facoltà di Engegneria, Dipartimento di Engegneria.