



Matemáticas

Introducción al Álgebra Superior

Primer Semestre

Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

Clave

05141106

Universidad Abierta y a Distancia de México





Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

Índice

<i>Presentación de la unidad</i>	2
<i>Competencia específica</i>	2
<i>Logros</i>	2
1.1. Teoría de conjuntos	3
1.1.1 <i>Noción intuitiva y ejemplos de conjuntos</i>	3
1.1.2. <i>Distintas formas de expresar conjuntos</i>	4
1.1.3. <i>Pertenencia y Contención</i>	5
<i>Aprende observando</i>	6
1.2. Operaciones con conjuntos	6
1.2.1. <i>Unión, intersección y complementos</i>	7
1.2.2. <i>Diferencia y diferencia simétrica</i>	8
1.2.3. <i>Producto cartesiano</i>	8
<i>Aprende observando</i>	9
1.3. Relaciones	11
1.3.1. <i>Dominio, codominio e imagen</i>	11
1.3.2. <i>Relaciones de equivalencia y particiones</i>	11
1.4. Funciones	14
1.4.1. <i>Dominio, codominio e imagen</i>	14
1.4.2. <i>Composición de funciones</i>	15
1.4.3. <i>Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas</i>	15
1.4.4. <i>Función inversa</i>	16
1.4.5. <i>Cardinalidad y funciones entre conjuntos</i>	17
<i>Aprende observando</i>	18
<i>Cierre de la unidad</i>	19
<i>Para saber más</i>	19
<i>Fuentes de consulta</i>	20



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

Presentación de la unidad

En esta unidad comprenderás el concepto matemático de **conjunto** desde un punto de vista intuitivo y lo integrarás al lenguaje matemático. Asimismo, integrarás de manera transversal el conocimiento adquirido en cursos paralelos y anteriores para construir los conceptos de las operaciones básicas de la teoría de conjuntos: unión, intersección, complemento y producto cartesiano, que te permitirán construir nuevos conjuntos a partir de conjuntos conocidos. De igual forma, a partir del producto cartesiano, construirás el concepto de función entre conjuntos, conocerás y manejarás funciones, así como algunas de sus propiedades y la básica operación de composición entre funciones.

Competencia específica

Aplicar los conceptos algebraicos para resolver problemas matemáticos de manera analítica, utilizando las operaciones de conjuntos, funciones y relaciones.

Logros

- Identificar las propiedades algebraicas de conjuntos, funciones y relaciones.
- Utilizar las propiedades de conjunto para resolver problemas.
- Resolver problemas por medio de funciones.



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

1.1. Teoría de conjuntos

En este tema estudiarás los conceptos básicos de la Teoría de conjuntos, estos incluyen la definición de elemento, conjunto y la relación de pertenencia entre elementos y conjuntos. Todas las áreas de matemáticas utilizan de alguna u otra manera, implícita o explícitamente, las operaciones básicas con conjuntos, es decir: la unión, la intersección entre conjuntos, el complemento de un conjunto, la diferencia y su diferencia simétrica.

1.1.1 Noción intuitiva y ejemplos de conjuntos

La Teoría de conjuntos se ha desarrollado desde un punto de vista axiomático desde finales del siglo XIX y principios del siglo XX hasta nuestros días, en el que tiene muchas aplicaciones, sin embargo, para nuestro fin, se presenta desde un punto de vista intuitivo, pero tendiendo hacia la formalidad matemática.

En nuestra vida cotidiana se usan términos sinónimos de conjuntos como colección, clase, agrupación, entre otros. Una axiomatización se basa en términos primitivos que en nuestro caso serán: **conjunto**, **elemento** y la relación **pertenece a**, que se usarán como sigue:

Si un objeto elemento **e** pertenece a un objeto conjunto **C** lo denotaremos $e \in C$ y se lee: **e pertenece a C**.

Los términos primitivos carecen de significado por sí mismos, en realidad resultan ser sólo nombres (algo así como recipientes), lo importante es que son la base para abstraer ciertas experiencias tanto de la realidad circundante como de la matemática. El modelo de axiomatización de la Teoría de Conjuntos se inspiró en la axiomatización euclidiana de la geometría donde los términos **punto** y **línea** no son definidos aunque los relacionamos con un modelo visual; los axiomas se aceptan como ciertos y de ahí se construye toda una teoría. Por ejemplo, si se considera como elemento a México y conjunto al Continente Americano decimos



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

que México pertenece al Continente Americano, y si se toma como elemento al Estado de México y conjunto a México, decimos que el Estado de México pertenece a México, con lo cual se observa que ser elemento o ser conjunto es relativo, en este caso estamos trabajando con abstracciones de objetos de nuestra realidad circundante, donde se debe tener conocimiento de lo que significa país, continente, estado, etc. De la misma manera se hace con el conocimiento matemático, se proponen teorías y éstas son aceptadas, rechazadas o modificadas por la comunidad matemática, en la Teoría de Conjuntos existen varias axiomatizaciones, los elementos básicos son comunes a las más aceptadas.

1.1.2. Distintas formas de expresar conjuntos

Para denotar un conjunto utilizaremos dos formas que corresponden a dos axiomas de la mayoría de axiomatizaciones de la Teoría de Conjuntos:

- Por extensión
- Por especificación

En la primera utilizaremos llaves y dentro de ellas enlistaremos a los miembros del conjunto, por ejemplo, el conjunto de las cinco vocales del alfabeto español: {a,e,i,o,u}. Mientras que en la segunda expresaremos dentro de las llaves a qué conjunto pertenecen los miembros del conjunto que se quiere especificar y enseguida cuál propiedad deben cumplir para ser miembros, por ejemplo:

$A = \{x \in \mathbb{N} / x = 2n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$, este mismo conjunto se puede denotar como:

$$A = \{2,4,6,8,10, \dots\}$$

Por las propiedades de sus elementos, al conjunto A descrito anteriormente se le denomina $2\mathbb{N}$, es decir, $2\mathbb{N} = \{2,4,6,8,10, \dots\}$.



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

1.1.3. Pertenencia y Contención

La relación de igualdad entre conjuntos está basada en el axioma de extensión: Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos, lo denotamos como $A = B$. Así los conjuntos A y $2\mathbb{N}$ del subtema 1.1.2 son iguales.

Si A y B son dos conjuntos y todo elemento de A pertenece a B, decimos que A es subconjunto de B o que B incluye a A y lo denotaremos como $A \subset B$ o $B \supset A$, así podemos decir que A y B son iguales si: $A \subset B$ y $B \subset A$.

Los ejemplos que hemos usado pertenecen a nuestra experiencia cotidiana, un conjunto muy importante en las matemáticas y que no depende de nuestra experiencia es el conjunto vacío, este conjunto se puede definir como: $\{x \in A / x \neq x, \text{ con } A \text{ conjunto}\}$, se puede demostrar que este conjunto cumple la propiedad de ser subconjunto de cualquier conjunto, denotaremos al conjunto vacío como \emptyset o $\{\}$.

En los inicios de la Teoría de Conjuntos y con el axioma de especificación, surgieron las paradojas dentro de la teoría, tal como la paradoja de Russell, para evitar estas paradojas se pide como requisito en el axioma de especificación que los elementos de los que se habla pertenezcan a algún conjunto, en algunos casos nombraremos a este conjunto distinguido como conjunto universo y lo denotaremos como U , conjunto universo o universal. Con el axioma de especificación podemos definir un conjunto muy especial, el conjunto potencia: $\mathcal{P}(A) = \{X / X \subset A\}$ donde A es un conjunto, por ejemplo $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$, si $A = \{a, b, c\}$ entonces $\mathcal{P}(A) = \{A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{c, a\}, \emptyset\}$, se nota que si A no tiene elementos $\mathcal{P}(A)$ tiene un elemento, si A tiene un elemento su potencia tiene dos, si A tiene tres elementos su potencia tiene ocho elementos, es decir la potencia de un conjunto tiene 2 elevado al número de elementos que tiene A, lo que justifica el nombre.



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

Aprende observando

En este vídeo se dan los primeros fundamentos sobre teoría de conjuntos, tomado Universidad Particular de Loja, recuperado

Universidad técnica particular de loja. (4 de enero de 2013).

Teoría de conjuntos i [(Asistencia gerencial y relaciones públicas) (Matemática básica). [Video]. YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=I7C1L-rZs80>

Teoría de conjuntos



Teoría de conjuntos

1.2. Operaciones con conjuntos

En este tema estudiarás las operaciones básicas que se pueden realizar utilizando conjuntos.

Las operaciones básicas de los conjuntos serán las abstracciones de nuestra experiencia de unir e intersectar, más otras operaciones que no tienen referente inmediato con nuestra experiencia cotidiana pero que serán fundamentales para entender conceptos que aparecerán en nuestra vida profesional.



1.2.1. Unión, intersección y complementos

Las operaciones básicas con conjuntos se definen por medio de la siguiente especificación:

Dados dos conjuntos A y B , y un conjunto universo C del cual son subconjuntos.

- La unión de A y B la definimos como: $\{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$ y se denota $A \cup B$.
- La intersección de A y B se define como $\{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$ y se denota $A \cap B$
El símbolo se usará como una relación entre conjuntos, el de la izquierda y el de la derecha.
- El complemento con respecto a un conjunto A es $\{x \in U / x \notin A\}$, y lo denotamos A^c .
- Algunas propiedades interesantes que se pueden probar utilizando las definiciones dadas son las siguientes:

- $A \cap A = A, A \cup A = A$
- $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cup U = U, A \cap U = A.$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Para demostrar las identidades del punto anterior debemos probar que los dos lados de la igualdad tienen los mismos elementos, por ejemplo, si queremos probar que $A \cap B = B \cap A$, probamos dos contenciones: Sea $x \in A \cap B \rightarrow x \in A \wedge x \in B$ (por definición) $\rightarrow x \in B \wedge x \in A$ (conmutatividad del conectivo \wedge) $\rightarrow x \in B \cap A$ (por definición). Con esto probamos que $A \cap B \subset B \cap A$, la contención inversa se prueba de manera similar.



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

1.2.2. Diferencia y diferencia simétrica

Dados dos conjuntos A y B definimos la diferencia $A \setminus B = A \cap B^c$, lo que equivale a $\{x \in A / x \notin B\}$.

Por otro lado, la diferencia simétrica de dos conjuntos A y B se define como $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Si A, B y C son conjuntos entonces:

- $A \Delta B = B \Delta A$
- $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- $A \Delta A = \emptyset, A \Delta \emptyset = A$
- $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

1.2.3. Producto cartesiano

Un concepto básico en las matemáticas es el de **par ordenado**, dados dos objetos a y b denotamos el par ordenado (a,b) que satisface la siguiente propiedad: $(a,b)=(c,d)$ si y sólo si $a=c$ y $b=d$. Una definición conjuntista es: La pareja ordenada de a y b, con primera coordenada a y segunda coordenada b, es el conjunto (a,b) definido por $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$, con esta definición se puede probar que satisface la propiedad requerida, y aunque esta definición es muy importante una vez comprendida en este curso nos quedamos con nuestra idea intuitiva de par ordenado, ésta es la base para definir producto cartesiano de dos conjuntos A y B como $A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$. Algunas propiedades interesantes son:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
- $A \times B = \emptyset$, si y sólo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

Algunos ejemplos muy usados son $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, llamado el plano cartesiano y también denotado como \mathbb{R}^2 donde \mathbb{R} es el conjunto de los números reales, en general si $A=B$ escribimos A^2 por $A \times A$, nótese que en general $A \times B \neq B \times A$, si $A \neq B$.

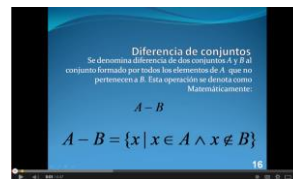
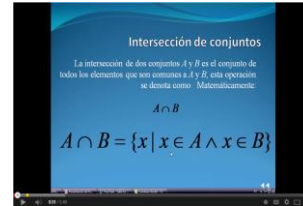
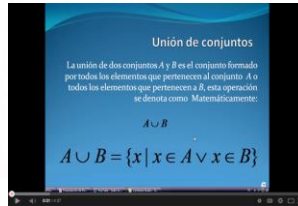
Aprende observando

Operaciones de conjuntos

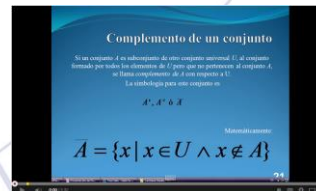


Los siguientes vídeos te darán una idea más clara sobre las operaciones de conjuntos, y la forma de cómo resolverlas. Tomada de bishop700.

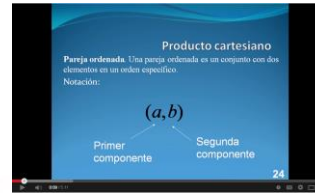
<https://www.youtube.com/user/bishop7000/videos>



Operaciones de conjuntos (unión, intersección y diferencia)



Complemento de un conjunto



Producto cartesiano

A continuación, te presento una aplicación java donde podrás realizar diversas operaciones de conjuntos a través del diagrama de Venn.

National Library of Virtual Manipulatives. (n.d.). Números racionales: Instrucciones. Utah State University.

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_153_g_2_t_1.html?open=instructions&from=topic_t_1.html



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

1.3. Relaciones

En esta sección estudiarás el concepto de relación construido a partir del producto cartesiano de conjuntos y hallarás una conexión en cuanto a significado entre el concepto común de relación y la definición matemática de relación.

1.3.1. Dominio, codominio e imagen

Todo subconjunto no vacío de un producto cartesiano está formado claramente por pares ordenados, ahora bien, si tomamos un conjunto formado por pares ordenados entonces será subconjunto de un producto cartesiano de dos conjuntos ¿De cuáles? Para contestar esta pregunta: sea $R = \{(a_{i1}, b_{i1}), \dots, (a_{in}, b_{in})\}$, ahora formemos los conjuntos $A_R = \{a / \exists b \text{ tal que } (a, b) \in R\}$ y $B_R = \{b / \exists a \text{ tal que } (a, b) \in R\}$ así $R \subset A \times B$, a cualquier subconjunto R de un producto cartesiano lo llamaremos una relación de A en B , donde A es el dominio y B el contradominio. Nos preguntamos ¿qué tiene que ver esta definición con el concepto de relación en el lenguaje común? Intuitivamente una relación entre dos objetos es hallar algo en común entre ambos, por ejemplo, “ser hermano de”, “ser padre de”, “ser hijo de”, “ser más alto”, etc. En estos ejemplos se ve la importancia de considerar par ordenado. Así, tomando el ejemplo Juan es padre de María, usaremos regularmente aRb en lugar de $(a, b) \in R$. En aritmética decimos a divide ab , a es menor que, etc. Dada una relación R de A en B al subconjunto de B definido por $\{b \in B / \exists a \in A \text{ tal que } (a, b) \in R\}$ lo llamaremos la imagen de R .

1.3.2. Relaciones de equivalencia y particiones

En matemáticas es común el uso de relaciones de equivalencia, de nuestra experiencia en secundaria tenemos fracciones equivalentes, así $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ que se lee “un medio equivale a dos



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

cuartos”, esta noción puede ser llevada a una abstracción más general, observando lo que caracteriza a una relación de equivalencia.

Consideremos una relación R sobre un conjunto A es decir $R \subset A \times A$, ahora analizaremos algunas propiedades que puede tener una relación.

Definición: Una relación R sobre un conjunto A es reflexiva si $(x, x) \in R$ para todo $x \in A$, esto es todo elemento de A se relaciona consigo mismo.

Definición: Una relación R sobre un conjunto A es simétrica si $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ para todos $x, y \in A$.

Si $A = \{1,2,3\}$, tenemos:

- a) $R_1 = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$ es una relación simétrica pero no reflexiva sobre A
- b) $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3)\}$ es una relación reflexiva pero no simétrica sobre A .
- c) $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$ es una relación simétrica y transitiva sobre A .
- d) $R_4 = \{(1,1), (1,2)\}$ es una relación que no es simétrica ni transitiva sobre A

Definición: Dado un conjunto A , una relación sobre A se dice que es transitiva si:

Para todo $x, y, z \in A$, $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

Sea $A = \mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$ el conjunto de los números naturales, definimos la relación D sobre A como xDy si x divide a y , así $(2,4) \in D$ pero $(5,6) \notin D$, esta relación es transitiva y reflexiva pero no es simétrica ya que $(2,6) \in D$ pero $(6,2) \notin D$.

Definición: Una relación de equivalencia R sobre un conjunto A es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Si $A = \{1,2,3\}$ entonces $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\}$ es una relación de equivalencia sobre A .



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

Una partición de un conjunto A es una familia de subconjuntos de A que denotamos como A_1, A_2, \dots tal que satisface:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots = A \text{ y } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para todo } i \neq j.$$

Si $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ una partición de A es: $A_1 = \{1,3,5\}, A_2 = \{2,4,6\}, A_3 = \{7\}, A_4 = \{8,9\}$.

Una relación de equivalencia R sobre un conjunto A , genera una partición de A , cada elemento de la partición será definido por todos los elementos de A que están relacionados entre sí, es decir a y b elementos de A están en la misma clase de equivalencia si aRb .

Considérese $A = \mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales y definamos la relación aRb si a y b dejan el mismo residuo al dividirse entre 2, así $6R8$ y $3R7$, la partición obtenida son por una lado los pares que dejan residuo cero y por otro los impares que dejan residuo uno. Es claro que la relación así definida es de equivalencia.



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

1.4. Funciones

El concepto de función en matemáticas se usó intuitivamente durante varios cientos de años, al menos desde la primera mitad del siglo XVII hasta la formalización del Cálculo hecha por Cauchy en la primera mitad del siglo XIX, la definición que se usa actualmente fue presentada por Russell y Whitehead en los Principia Mathematica, ya que esta definición es conjuntista y totalmente formal, lo que permite tener certeza sobre sus fundamentos. En esta sección estudiarás el concepto de función de manera formal y desde el punto de vista de la Teoría de Conjuntos.

1.4.1. Dominio, codominio e imagen

Definición. Sea f una relación de A en B , una función es una relación que satisface la siguiente propiedad: si (a, b) y (a, c) pertenecen a f entonces $b = c$.

Como en las relaciones A es el dominio, B el codominio y la imagen de la función se define de la misma manera: el conjunto $\{x \in B / \text{existe } x \in A \text{ tal que } (a, x) \in f\}$, frecuentemente utilizaremos la notación $f(a) = b$ en lugar de afb o de $(a, b) \in f$.

Por ejemplo, si $A = \{1, 3, 4, 6\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$ entonces $R = \{(1, b), (4, c), (3, d), (6, c)\}$ es una función; la imagen de R es igual a $\{b, c, d\}$. En contraparte, tenemos que $R_1 = \{(1, a), (3, a), (1, c), (4, e)\}$ no lo es pues las parejas $(1, a)$ y $(1, c)$ no cumplen la definición.

Si $A = \mathbb{R}$ y $f = \{x, y / x^2 + y^2 = 1; x, y \in \mathbb{R}\}$ entonces f no es función pues las parejas $(0, 1)$ y $(0, -1)$ están en f , en cambio $g = \{x, y / y = 2x; x, y \in \mathbb{R}\}$ sí es función, y la imagen de g es todo \mathbb{R} . Una función importante es la función identidad, definida para todo conjunto A como $id(a) = a$ para todo a que pertenece a A . La imagen de id es todo A .



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

También denotaremos a la imagen de f como $Im(F)$. Se acostumbra usar las letras f, g, h para denotar a una función, aunque el contexto nos dará idea de que notación usar. También se acostumbra escribir $f: A \rightarrow B$ para la función f con dominio A y codominio B .

1.4.2. Composición de funciones

Una operación de funciones que sólo depende de los conjuntos es la composición, esta operación nos permite obtener nuevas funciones a partir de otras.

Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones, definimos la composición de f y g como la función $h: A \rightarrow C$ dada por $h(a) = g(f(a))$ para todo $a \in A$, y la denotaremos como $(g \circ f): A \rightarrow C$.

Sean $A = \{a, b, c\}, C = \{1, 2, 3\}, B = \{x, y, z\}, f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}, g = \{(1, x), (2, y), (3, y)\}$ entonces la composición $(g \circ f): A \rightarrow B$ es $\{(a, x), (b, x), (c, y)\}$. Sean $A = B = C = \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ entonces $(g \circ f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2$ podemos definir también $(f \circ g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 3$ de donde se observa que la composición no es siempre conmutativa.

La función identidad definida en 1.4.1 se comporta como lo hace el uno en conjuntos numéricos con el producto. Sean id_A la función identidad para un conjunto A y id_B para B , y $f: A \rightarrow B$ función, $(id_B \circ f): A \rightarrow B$ entonces $id_B(f(a)) = f(a)$, y análogamente para id_A .

1.4.3. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

En los ejemplos de funciones dados en 1.4.1 se observa que el rango es subconjunto del codominio, un caso importante es en el que el rango es igual al codominio lo que nos da la siguiente:



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

Definición. Decimos que una función $f: A \rightarrow B$ es una función suprayectiva si el rango de f es igual al codominio.

La función $f(x) = 2x + 3$ definida en 1.4.2 es suprayectiva mientras que $g(x) = x^2$ definida en la misma sección no lo es. Otra propiedad importante es observar que algunas funciones envían elementos distintos a elementos distintos, esa propiedad la enunciamos en la siguiente forma:

Definición. Decimos que una función $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si envía elementos distintos a elementos distintos, es decir, si dados $a, b \in A, a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$. En la práctica, para demostrar que una función es inyectiva se prueba la proposición equivalente: $(f(a) = f(b)) \Rightarrow (a = b)$.

Probaremos que $f(x) = 2x + 3$ es inyectiva. Supongamos que $f(a) = f(b)$, es decir, que $2a + 3 = 2b + 3 \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$. Por otro lado, $g(x) = x^2$ no es inyectiva pues $g(-1) = g(1) = 1$.

La función $h: C \rightarrow D$ donde $C = \{a, b, c, d\}, D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $h(a) = 1, h(b) = 2, h(c) = 3, h(d) = 4$, es una función inyectiva pero no es suprayectiva. Sea $k: C \rightarrow E$, donde C es el mismo de $h, E = \{m, n\}$ y $k(a) = m, k(b) = n, k(c) = m, k(d) = n$, k es una función suprayectiva pero no es inyectiva. Las funciones que son inyectivas y suprayectivas las llamaremos funciones biyectivas. La función $f(x) = 2x + 3$ definida en 1.4.2 es ejemplo de una función biyectiva.

1.4.4. Función inversa

Dada una relación R de A en B definimos la relación inversa R^{-1} de B en A como $bR^{-1}a$ si aRb , una función biyectiva $f: A \rightarrow B$ tiene la propiedad de que su inversa (como relación) también es una función a la cual llamaremos la función inversa de f y la denotaremos como f^{-1} . $f^{-1}: B \rightarrow A$ está definida como $f^{-1}(b) = a$ donde $f(a) = b$, f^{-1} está bien definida dado que f es inyectiva y está definida para todo $b \in B$ por ser sobreyectiva.



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

Ahora operemos f y f^{-1} con la composición $(f^{-1} \circ f): A \rightarrow A$ donde $(f^{-1} \circ f)(a) = (f^{-1})(f(a)) = f^{-1}(b) = a$ es decir $(f^{-1} \circ f) = id_A$, de la misma manera $(f \circ f^{-1}) = id_B$

1.4.5. Cardinalidad y funciones entre conjuntos

¿Cuántos elementos tiene un conjunto? Los seres humanos han usado referencias para contar, comparar dos conjuntos y de manera intuitiva saber qué conjunto tiene más elementos que otro. Para este propósito, las funciones biyectivas nos serán útiles así como también los conjuntos distinguidos $I_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ formados con los primeros n números naturales.

Definición. Decimos que un conjunto no vacío A es finito si existe una biyección entre A y I_n para algún n , si no existe tal biyección diremos que el conjunto es infinito.

Así el conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$ es finito pues se puede dar una biyección con $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, mientras que el conjunto de los números naturales pares es infinito pues no existe una biyección con algún I_n .

Existen funciones inyectivas entre conjuntos infinitos, por ejemplo $f(n) = 3n$ definida para todo n natural, en este caso f es inyectiva y por lo tanto define una biyección entre los múltiplos de 3 y todos los naturales. Las funciones de un conjunto finito en uno infinito sólo aspiran a ser inyectivas, y las de un conjunto infinito a uno finito sólo pueden llegar a ser suprayectivas.

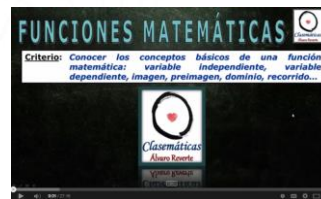


Aprende observando

Reverte. A. (17 de abril de 2013. (Funciones) - La Función: Conceptos Básicos (1500).). [Video]. YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=sZlCLmsFknM>

En este vídeo se presentan los conceptos básicos de funciones, dominio, codominio e imagen recuperada de clase maticas de Álvaro Reverte.



Planteamiento de problemas

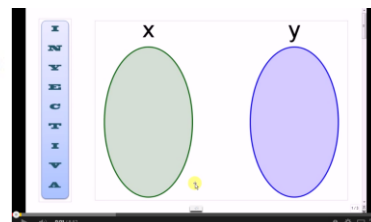


Funciones

Vídeo sobre los tipos de relaciones y funciones, tomada de Edgar Eden Cruz Sanchez.

Cruz. Sánchez. E. (1 de mayo de 2016). Tipos de relaciones y funciones 1 [Video]. YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=apmSJMDuOBI>



Tipos de relaciones y funciones

Vídeo sobre la cardinalidad y funciones entre conjuntos, tomada de

Tutorexpertos. (29 de julio de 2014). Cardinalidad y Tipos de Conjuntos. [Video]. Youtube.

<https://www.youtube.com/watch?v=-xKb6zmKxxA>



Cardinalidad y funciones entre conjuntos

Cierre de la unidad

Durante el desarrollo de esta unidad has conocido y aprendido a utilizar el lenguaje básico de las matemáticas, se han formalizado ideas que habías manejado de manera intuitiva, en todas las áreas aparecerán conjuntos, funciones y las operaciones que has estudiado, ya sea de una forma abstracta o en aplicaciones desde sencillas hasta complejas, estos son los elementos que permitirán pensar como matemático.

Para saber más

- Una breve reseña histórica de la Teoría de Conjuntos:
S.A. (S.f). Reseña histórica Conjuntos, Facultad de Ciencias UIS.
<http://ciencias.uis.edu.co/conjuntos/doc/Conjuntos-Historia-ahiguera.pdf>
- Historia de las matemáticas del siglo XVII a los comienzos del siglo XX, incluye unas secciones dedicadas al origen y desarrollo de la Teoría de Conjuntos:
Collete, Jean Paul. (2007). Historia de las Matemáticas II, México: Siglo XXI editores.
- Un libro completo y pequeño que incluye una axiomatización rigurosa de Teoría de Conjuntos:
Henle, James M. *An outline of Set Theory*. (2007). USA: Dover Publications.



Unidad 1. Conjuntos, relaciones y funciones

- En el siguiente libro Russell presenta de manera exhausta sus ideas acerca de teoría de conjuntos:

Russell, Bertrand. (2002). *Introducción a la Filosofía Matemática*. España: Paidós.

Fuentes de consulta

Básica:

- Bravo, A., Rincón, H., Rincón, C. (2011). *Algebra Superior*. México: Las prensas de Ciencias.
- Cárdenas, H., et al (1973). *Algebra Superior*. Editorial Trillas, México.
- Halmos, P. (1980). *Teoría Intuitiva de los conjuntos*. México: Editorial CECSA.

Complementaria:

- Amor, J. (2005). *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*. México: Las prensas de Ciencias.
- Grimaldi, R. (1994). *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. México: Addison Wesley.
- Henle, J. (2007). *An outline of Set*.