Universidad Abierta y a Distancia de México

Licenciatura en matemáticas

2° semestre

Geometría analítica I

Unidad 1. Introducción a la geometría analítica

Clave:
05141211/06141211

Índice

Presentación de la unidad

Bienvenidos al curso de Geometría Analítica, una de las ramas más interesantes de las matemáticas, pues en ella se unifican dos grandes líneas de pensamiento: el álgebra y la geometría. El propósito es estudiar un objeto geométrico asociándole una ecuación. Esta idea de apariencia tan sencilla le tomó mucho tiempo al ser humano llegar a construirla, para ello fue necesario poner la curva en un plano con un sistema de referencia. En este curso utilizaremos el sistema de coordenadas rectangulares, pero existen otros, como el sistema de coordenadas polares.

El sistema de coordenadas rectangulares es un sistema de referencia conformado por dos ejes perpendiculares, el plano con éste sistema particular se denomina plano cartesiano, en honor al filósofo y matemático René Descartes, fundador de la geometría analítica, cuyo origen se remonta solamente al siglo XVII, cuando en 1637, Descartes publica el apéndice La Geometría como un ejemplo de su obra El Discurso del Método.

En el primer tema definiremos el sistema de coordenadas rectangulares, el cual será el sistema de referencia con respecto al cual realizaremos las deducciones de otras fórmulas que nos serán útiles durante la resolución de problemas, por ejemplo, la distancia entre dos puntos o el punto medio de un segmento. Además, te presentaremos las convenciones que se utilizan en geometría analítica para que te familiarices con su lenguaje.

En el segundo tema introduciremos un concepto nuevo, el “lugar geométrico”, y lo ilustraremos con algunos ejemplos basados en nociones de geometría que te son familiares. Este será un primer acercamiento, después continuaremos con el estudio de otros lugares geométricos más complejos e interesantes, como son la línea recta o las secciones cónicas, en las unidades 2 y 3, respectivamente.

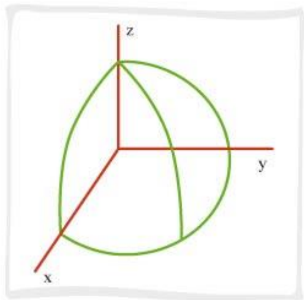
Competencia específica

Resolver problemas geométricos utilizando el concepto de sistema de coordenadas rectangulares y lugar geométrico, para analizar, describir e interpretar las relaciones entre las características de un objeto en el espacio mediante su representación en el plano.

Logros

- Identificar conceptos básicos de la geometría analítica.
- Resolver problemas geométricos.

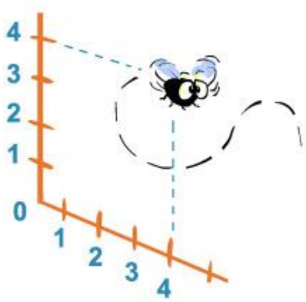
Conceptos básicos



La geometría analítica tiene la finalidad de estudiar un **objeto geométrico asociado a una ecuación**. Esta idea, en apariencia sencilla, le tomó mucho tiempo al ser humano llegar a construirla. Para ello fue necesario poner la curva en un plano con un sistema de referencia.

Existe en geometría dos sistemas de coordenadas utilizados con mucha frecuencia: el **sistema de coordenadas rectangulares** y el **sistema de coordenadas polares.** En este curso sólo nos ocuparemos del estudio del primero, el cual está conformado por dos ejes perpendiculares denominado **Plano cartesiano**, en honor al filósofo y matemático francés **René Descartes**.

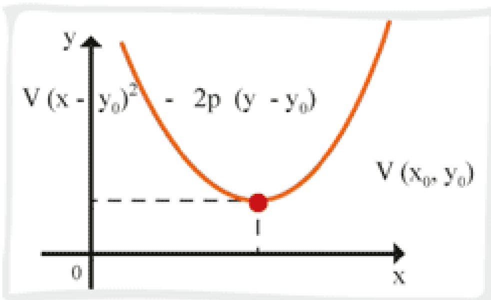
Descartes, quien fuera fundador de la geometría analítica, pública en 1637 el apéndice La Geometría, como uno de los ensayos de su obra *El discurso del método.*



Debido a su delicada salud, René Descartes pasaba mucho tiempo tumbado en la cama. En cierta ocasión viendo volar una mosca en el dormitorio, se le ocurrió que era posible determinar en cada instante la **posición** del insecto. Para ello bastaba **conocer su distancia con respecto a dos superficies perpendiculares**: la pared y el suelo.
Excitado por la idea, Descartes dibujó en una hoja, dos **rectas perpendiculares**, cualquier punto del folio, o sea, del plano, quedaba determinado por sus distancias a los dos ejes.

A estas distancias las llamó **coordenadas del punto** y le permitieron representar cualquier ecuación algebraica en forma de curva, mediante una ecuación.
Así, relacionó la geometría y el álgebra en lo que se llamó geometría analítica.

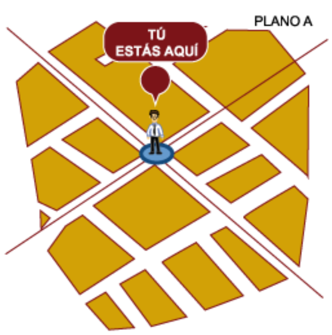
Desde la perspectiva de la geometría analítica, cuando se estudia un objeto geométrico, por ejemplo, un punto, una recta, la mediana, una circunferencia, etc., se desea encontrar una relación algebraica entre las coordenadas de los puntos que lo conforman. De manera inversa, cuando se tiene una ecuación, es posible estudiarla a través de su gráfica en el plano cartesiano, asociando a cada pareja de números que la integran un punto en dicho plano.



En síntesis, estudiando la expresión algebraica, es posible obtener información del objeto geométrico y viceversa; analizando el objeto geométrico es posible deducir la información del objeto algebraico, éste es, a grandes rasgos, el método que nos propone la geometría analítica.

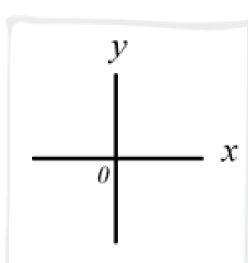
Sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas

El **plano cartesiano** forma **parte de nuestra vida diaria**. Por ejemplo, para llegar a un punto de reunión o ubicar un establecimiento, consultamos la dirección en un plano.



A **cada par ordenado de números reales** (x,y) **le corresponde un punto en el plano cartesiano**, de la misma manera cada punto está definido solamente por un par ordenado, a esta relación entre los puntos del plano y los pares de números reales se le denomina **correspondencia uno a uno**.

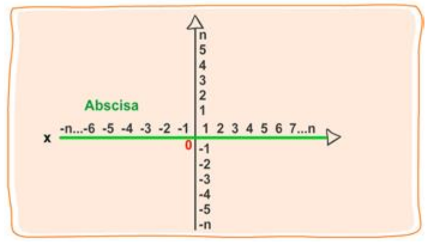
x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4



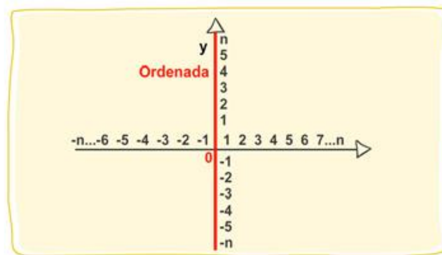
El par ordenado está definido por la **abscisa** del punto x, seguido de la **ordenada** del punto *y*.

Ejes de coordenadas

La coordenada *x*, o abscisa, de un punto *P* es la distancia dirigida del eje *y* al punto.



La coordenada *y*, u ordenada de un punto *P* es la distancia dirigida del eje *x* al punto.



Existen diferentes maneras para denominar a un punto, una de ellas es asignarle una letra, por ejemplo P, o escribir solamente sus coordenadas (x, y). Sin embargo, es muy común presentar tanto el nombre como las coordenadas del punto al mismo tiempo, $P(x, y)$. Por otra parte, algunos autores prefieren la notación $P = (x, y)$, lo que quiere decir que P es el nombre del punto y este punto es igual a las coordenadas (x, y), por la correspondencia uno a uno. A lo largo de este curso emplearemos las diversas notaciones porque es importante que te familiarices con todas ellas.

Para dar un orden, muchas veces usamos subíndices. Por ejemplo, si se tienen dos puntos diferentes, se pueden nombrar

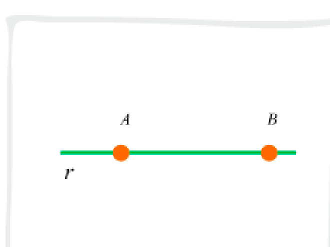
$$A(x_1, y_1) \text{ y } B(x_2, y_2)$$

O también,

$$P_1(x_1, y_1) \text{ y } P_2(x_2, y_2)$$

Cuando dos puntos son iguales, tanto sus abscisas como sus ordenadas son iguales entre sí.

A lo largo de este curso emplearemos diversas notaciones geométricas, es importante que te familiarices con todas ellas.



Distancia entre dos puntos

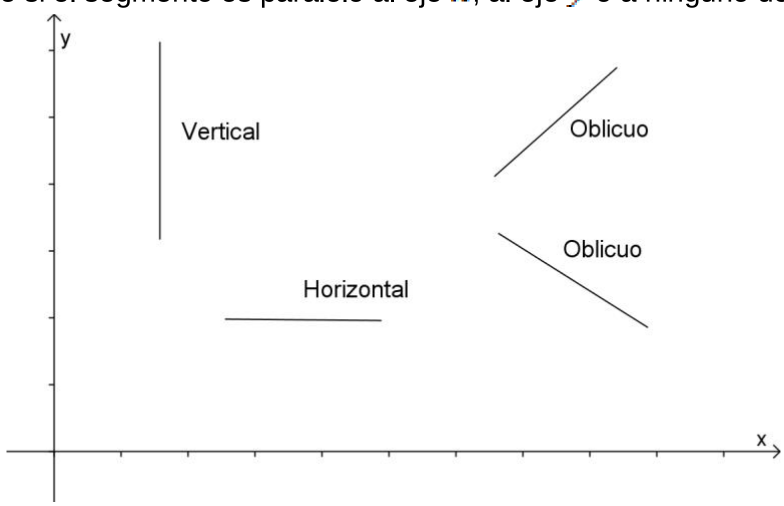
En muchos problemas se requiere conocer la distancia entre dos puntos cualesquiera o la longitud del segmento de recta que los une, lo cual se puede calcular a partir de las coordenadas de los puntos o las coordenadas de los extremos del segmento, respectivamente.

La clave para deducir una fórmula que nos permita hacerlo con facilidad consiste en ubicar en el plano dos puntos cualesquiera, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, después formar un triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{AB}$ y emplear el Teorema de Pitágoras*.

Lee con atención la deducción de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos. Conforme estás leyendo analiza con cuidado paso a paso para asegurarte que comprendes lo que se está haciendo y que eres capaz de realizar las operaciones que allí se muestran.

En la siguiente escena, verifica que la relación encontrada se cumple para cualquier segmento (horizontal, vertical u oblicuo) sin importar en qué cuadrante se encuentren sus extremos.

Un segmento de recta se clasificará como **horizontal**, **vertical** u **oblicuo** (inclinado), dependiendo de si el segmento es paralelo al eje x, al eje y o a ninguno de los ejes.



Distancia entre dos puntos
La distancia d entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del plano se denota por la expresión $d(P_1, P_2)$ y está dada por la fórmula: $$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Donde P_1 es el punto inicial y P_2 es el punto final.

Tip. Observa que en la fórmula es importante el orden. En la expresión $d(P_1, P_2)$ primero se nombre el punto 1 y luego el punto 2, mientras que, al sustituir en las diferencias, primero va la abscisa (u ordenada) del punto 2 y se resta la abscisa (u ordenada) del punto 1. Ten cuidado con esta convención; para evitar errores siempre define cuál es el punto que consideras como inicial P_1 y cuál es el punto final P_2.

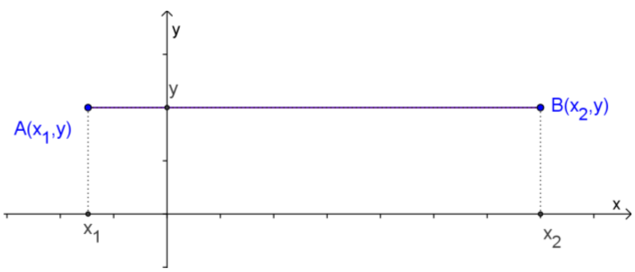
Analicemos dos casos particulares de la distancia entre dos puntos.

a) Segmento horizontal.

Si el segmento que une los dos puntos es horizontal, las coordenadas de sus extremos serán:

$$P_1 = (x_1, y)$$
$$P_2 = (x_2, y)$$

Analiza la siguiente figura y date cuenta de que la ordenada de ambos puntos tiene el mismo valor.



Sustituyendo en la fórmula de distancia entre dos puntos.

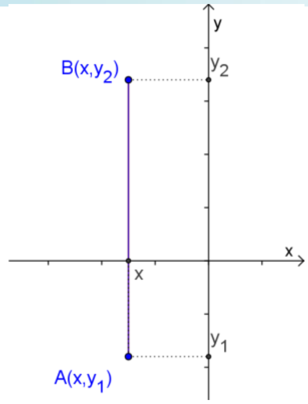
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y - y)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (0)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$
$$\boldsymbol{d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1|}$$

b) Segmento vertical.

Si el segmento es vertical, las coordenadas de sus extremos serán:

$$P_1 = (x, y_1)$$
$$P_2 = (x, y_2)$$

Ahora es la abscisa de los puntos la que tiene el mismo valor.



Siguiendo un procedimiento similar al desarrollado en el segmento horizontal, obtenemos que la distancia es:

$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1|$$

Recuerda la estrategia de leer-haciendo. Sería una buena práctica para ti el verificar este resultado siguiendo como modelo lo mostrado en el segmento horizontal.

División de un segmento en una razón dada

Lee con atención la siguiente definición:

División de un segmento en una razón dada

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento dirigido de recta $\overrightarrow{P_1P_2}$, y $P(x, y)$ es un punto que divide a dicho segmento en una razón dada por la fórmula

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

Razón: una razón se puede expresar por medio de un cociente o por la siguiente igualdad $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$

entonces las coordenadas del punto C están determinadas por:

$$P\left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r}\right)$$

Donde

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}; \qquad \forall r \neq -1$$

$\forall r \neq -1$: se lee como: "Para todo valor de r diferente de -1"

Un caso particular que encontramos es cuando $r = 1$, por lo que, al sustituir en las ecuaciones anteriores, se reducen a lo siguiente:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

De esta forma se encuentran las coordenadas del punto medio (P_m) de un segmento.

$$P_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Transformemos a palabras la expresión para determinar las coordenadas del punto medio: la abscisa del punto medio es el promedio (o semisuma) de las abscisas de los extremos; su ordenada es el promedio de las ordenadas de los extremos.

Lugar geométrico

Cuando se nos presenta un enunciado con la intención de encontrar el lugar geométrico, es una buena estrategia realizar un diagrama de la situación, primero de un caso particular, como el mostrado con la distancia fija de $5\,cm$, y después pensar en la generalización, tal es el caso de considerar la distancia fija de N unidades, donde N puede ser un número cualquiera.

Como seguramente ya has descubierto, el lugar geométrico que se forma corresponde a dos rectas paralelas que se encuentran a N unidades de distancia de la recta de referencia.

En otros casos, el lugar geométrico nos permite definir de una nueva manera objetos ya conocidos.

Probablemente la siguiente definición te es muy familiar:
La **mediatriz** es la "recta perpendicular que corta un segmento en su punto medio".[1]

Otra definición es:
La mediatriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan* de **dos puntos fijos**.

O de manera más formal:

[1] https://dle.rae.es/?w=mediatriz&origen=REDLE

La mediatriz de un **segmento** de extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de **A** y **B**.

¿Son equivalentes estas dos definiciones? Vuélvelas a leer con atención. Si consideras que los puntos fijos pueden unirse por un segmento, entonces los extremos de dicho segmento serían justamente los puntos fijos, por lo tanto, ambas definiciones establecen la misma propiedad geométrica que se debe cumplir.

A partir de la condición de que el lugar geométrico está definido por el conjunto de puntos que satisfacen determinadas propiedades geométricas y con tus conocimientos previos de álgebra, te será posible responder a la pregunta ¿cuál es la ecuación de la mediatriz de un segmento?

Con lo que hasta ahora has estudiado tienes todas las herramientas para responder esa pregunta. ¡Inténtalo! Recuerda que no existe un único camino para obtener una respuesta. Compara tu solución (o los avances que hayas logrado) con la propuesta que a continuación te mostramos.

Para deducir la ecuación de un lugar geométrico es importante determinar lo que conocemos:

a) los datos (pueden estar implícitos en el enunciado)
b) y las relaciones (en este caso la definición de mediatriz como lugar geométrico y las relaciones que podemos deducir a partir de esta información).

Solución:
Definimos los extremos del segmento y las coordenadas del punto cualquiera:
Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ los extremos del segmento y $P = (x, y)$ un punto cualquiera.

Tip. Observa que los subíndices nos indican que los puntos están definidos (son valores fijos) y cuando las coordenadas del punto no tienen subíndices significa que dicho punto puede tomar cualquier valor.

Identificamos la condición descrita:
“los puntos $P(x, y)$ que **equidistan** de **A** y **B**.”
Esto quiere decir que la distancia de A a P debe ser igual que la distancia de B a P.

$$d(A, P) = d(B, P)$$

También conocemos la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, por lo que podemos escribir

$$d(A, P) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$d(B,P)=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

Desarrollamos y reducimos la expresión algebraica a su forma más simple.

Escribimos lo que conocemos, nuestro punto de partida	$d(A,P)=d(B,P)$
Sustituimos por la fórmula de distancia entre dos puntos	$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$
Eliminamos el radical (elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad)	$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$
Desarrollamos los binomios	$x^2-2xx_1+x_1{}^2+y^2-2yy_1+y_1{}^2=x^2-2xx_2+x_2{}^2+y^2-2yy_2+y_2{}^2$
Igualamos la ecuación a cero	$x^2-2xx_1+x_1{}^2+y^2-2yy_1+y_1{}^2-(x^2-2xx_2+x_2{}^2+y^2-2yy_2+y_2{}^2)=0$
Reducimos términos semejantes	$x^2-2xx_1+x_1{}^2+y^2-2yy_1+y_1{}^2-x^2+2xx_2-x_2{}^2-y^2+2yy_2-y_2{}^2=0$ $-2xx_1+x_1{}^2-2yy_1+y_1{}^2+2xx_2-x_2{}^2+2yy_2-y_2{}^2=0$
Factorizamos con respecto a x y a y porque son las coordenadas del punto P. Sabemos además que $x_1,x_2,\ y_1,y_2$, al ser coordenadas conocidas, en realidad son números.	$2xx_2-2xx_1+2yy_2-2yy_1+x_1{}^2-x_2{}^2+y_1{}^2-y_2{}^2=0$ $2x(x_2-x_1)+2y(y_2-y_1)+(x_1{}^2-x_2{}^2+y_1{}^2-y_2{}^2)=0$
Reescribimos la ecuación, para poder "despejar" y, es decir, resolver la ecuación para y.	$2x(x_2-x_1)+2y(y_2-y_1)+(x_1{}^2-x_2{}^2+y_1{}^2-y_2{}^2)=0$ $2y(y_2-y_1)=-2x(x_2-x_1)-(x_1{}^2-x_2{}^2+y_1{}^2-y_2{}^2)=0$ $y=\frac{-2x(x_2-x_1)}{2(y_2-y_1)}-\frac{x_1{}^2-x_2{}^2+y_1{}^2-y_2{}^2}{2(y_2-y_1)}$ $y=\frac{-x(x_2-x_1)}{(y_2-y_1)}-\frac{x_1{}^2-x_2{}^2+y_1{}^2-y_2{}^2}{2(y_2-y_1)}$

Escribimos un enunciado con nuestra **solución**	La ecuación de la mediatriz es $y = \frac{-x(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)} - \frac{{x_1}^2 - {x_2}^2 + {y_1}^2 - {y_2}^2}{2(y_2 - y_1)}$

Lo que nos quiere decir la ecuación anterior es que todos los puntos de coordenadas (x, y) que cumplan la igualdad pertenecerán a la mediatriz de un segmento cuyos extremos son $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

En ocasiones simplemente escribiremos los desarrollos, incluso omitiendo algunos pasos, pero será parte de tu aprendizaje que, al leer, completes de manera independiente los pasos faltantes y procures explicarte qué es lo que se está haciendo de un renglón a otro.

Leer la solución que otro propone hace que todo parezca sencillo y simple, pero para aprender necesitas aceptar el reto de resolver el problema (ejemplo o ejercicio) por ti mismo. Como dice un conocido proverbio chino:

Lo que escucho, lo olvido.
Lo que veo, lo recuerdo.
Lo que hago, lo comprendo.

Verifiquemos esta ecuación para un caso particular.
Sean los puntos $A(1,1)$ y $B(6, -3)$ los extremos de un segmento. Comprueba que el punto $P(4.3,0)$ pertenece a la mediatriz del segmento AB.

Solución:
Podemos asegurar que, si el punto P pertenece a la mediatriz, entonces al sustituir sus coordenadas en la siguiente ecuación se deberá cumplir la igualdad.

$$y = \frac{-x(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)} - \frac{{x_1}^2 - {x_2}^2 + {y_1}^2 - {y_2}^2}{2(y_2 - y_1)}$$

Por lo tanto, lo que debemos hacer es sustituir los valores dados en el problema y realizar las operaciones para verificar que la igualdad es verdadera.
Tip. Una estrategia para no confundirte al realizar la sustitución es escribir de manera explícita los datos del problema.
$A(x_1, y_1) = A(1,1)$. Por lo tanto, $x_1 = 1$ y $y_1 = 1$
$B(x_2, y_2) = B(6, -3)$, Por lo tanto, $x_2 = 6$ y $y_2 = -3$
$P(x, y) = P(4.3, 0)$, por lo que para este caso particular, $x = 4.3$ y $y = 0$

$$0 = \frac{-4.3(6 - 1)}{((-3) - 1)} - \frac{1^2 - 6^2 + 1^2 - (-3)^2}{2((-3) - 1)}$$

$$0 = \frac{-4.3(5)}{(-4)} - \frac{1 - 36 + 1 - 9}{2(-4)}$$

$$0=\frac{-21.5}{-4}-\frac{(-43)}{(-8)}$$

$$0=\frac{-21.5}{-4}-\frac{(-43)}{(-8)}$$

$$0=\frac{43}{8}-\frac{43}{8}$$

$$0=0 \quad QED$$

Quod erat demonstrandum es una locución latina que significa ‘lo que se quería demostrar’ y se abrevia **QED**.

Existen varias construcciones de lugares geométricos; en las siguientes unidades analizaremos la recta y las secciones cónicas desde esta perspectiva.

Evidencia de aprendizaje de la unidad

Instrucciones generales:
Entrega un reporte en el que incluyas tu procedimiento y un enunciado con tus resultados.

Cierre de la unidad

A lo largo de esta unidad hemos mostrado cómo se relaciona el álgebra con la geometría, por lo que podemos decir que en la geometría analítica “se hace geometría al hacer álgebra, y se ve el álgebra a través de la geometría” [2].

En cuanto a la necesidad de establecer un sistema de referencia, además del potencial que brinda para resolver problemas del ámbito estrictamente matemático, podemos darnos cuenta de su importancia, por su presencia en nuestro entorno, como es el caso de los husos horarios, que definen que en nuestro país tengamos tres zonas: centro, pacífico y noroeste. En cuanto a la ubicación espacial, está presente en las guías que muestran los planos de la ciudad o en sistemas tan sofisticados como el sistema de posicionamiento global, mejor conocido como GPS, que ya está integrado en los dispositivos de comunicación móvil o de navegación de los automóviles. ¿Se te ocurren otros ejemplos?

Fuentes de consulta

Básica

- Fuller, G. & Tarwater, F. (1995). *Geometría analítica*. (Séptima edición). México: Pearson Educación.
- IPN (2006). Geometría Analítica. Libro para el estudiante. México: IPN-Dirección de publicaciones. p. 132.
- School Mathematics Study Group (SMSG), (1967). *Geometría analítica: ¿qué es? y ¿por qué se estudia?*, Stanford University.