



Universidad Abierta y a Distancia de México

Licenciatura en matemáticas

2° Semestre

Geometría analítica I

Unidad 2. La recta

Clave:
05141211/06141211





Índice

UNIDAD 2. LA RECTA	3
Presentación de la unidad.....	3
Logros.....	4
Competencia específica	4
Condiciones que determinan una recta	5
La recta como una curva de pendiente constante	5
Ecuaciones de la recta	8
Ángulo entre dos rectas.....	14
Condiciones de paralelismo y perpendicularidad	16
Distancia de un punto a una recta	16
Familia de rectas	19
Cierre de la unidad	23
Para saber más.....	23
Fuentes de consulta.....	24



UNIDAD 2. LA RECTA

Presentación de la unidad

El poeta debe ser capaz de ver lo que los demás no ven, debe ver más profundamente que otras personas. Y el matemático debe hacer lo mismo...

Sonia Kovalévskaya. (1850-1891). Fue la primera matemática rusa reconocida y la primera mujer que consiguió una plaza de profesora universitaria en Europa (Suecia, 1881).

Posiblemente su investigación más importante fue la que realizó sobre la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo, por la que recibió el Premio Bordin de la Academia de Ciencias de París y más tarde el premio de la Academia de Ciencias de Suecia.

El estudio de la recta inicia desde que somos niños, junto con los elementos geométricos fundamentales: el punto, la recta, el plano y figuras planas. Conforme crecemos lo estudiamos desde otra perspectiva, por ejemplo, en la secundaria se espera que se identifiquen, interpreten y expresen las relaciones de proporcionalidad directa, lo cual gráficamente es una recta.¹

Durante el bachillerato se sigue estudiando la recta, pero ahora como una función lineal, porque muchos de los procesos o fenómenos que se estudian en matemática, y en otras ciencias, tienen un comportamiento lineal, es decir, en ellos intervienen dos variables que se relacionan por medio de una ecuación que representa una recta.

¿Habremos concluido el estudio de la recta?

En realidad, el camino al conocimiento continúa. En esta ocasión, todo lo anterior está presente en el estudio de la recta, pero ahora lo enfocaremos desde su definición como lugar geométrico y las formas que puede adoptar su ecuación.



Logros



- **Realizar** deducciones de las ecuaciones de la recta a partir de su definición de lugar geométrico y aplicarlas a la solución de problemas.
- **Reconocer** el lenguaje utilizado en los teoremas y su proceso de demostración.
- **Articular** las diferentes ecuaciones de las rectas, las definiciones y teoremas, para que, a partir de lo que se conoce, puedas proponer una estrategia de solución de un problema, así como verificar tu resultado.

Competencia específica



Deducir ecuaciones de la recta mediante las condiciones que la determinan para resolver problemas de tipo euclidiano, de lugares geométricos y de situaciones en diferentes contextos.



Condiciones que determinan una recta

Para iniciar con el estudio de la recta, intenta recordar todo lo que conoces acerca de ella. Seguramente te vendrán muchas ideas a la mente porque es un objeto con el que interactuamos desde niños.

Las propiedades fundamentales de la recta, de acuerdo con la geometría euclidea son²:

- Por dos puntos distintos pasa una, y sólo una, recta.
- Dos rectas distintas se cortan en un solo punto, o son paralelas.

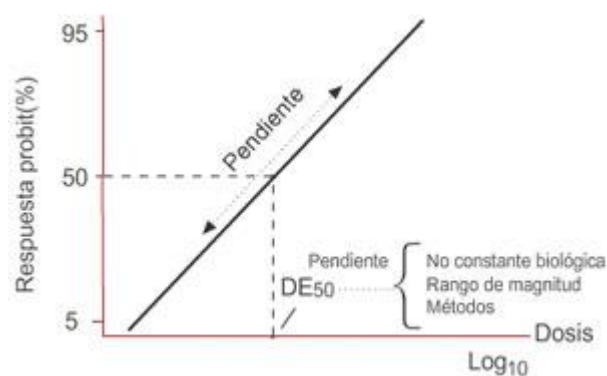
Otras características de la recta son:

- La recta es una sucesión continua de puntos en una sola dimensión que se prolonga al infinito en ambos sentidos.
- La distancia más corta entre dos puntos está en una línea recta (en la geometría euclidiana).
- La recta es un conjunto de puntos situados a lo largo de la intersección de dos planos.

Veamos ahora la definición de la recta como lugar geométrico.

La recta como una curva de pendiente constante

Llamamos **línea recta** al lugar geométrico de todos los puntos contenidos en el plano tales que, tomado dos puntos diferentes cualesquiera, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.³



² Oteyza, E., et al. (2005). *Geometría analítica*. (Segunda edición). México: Pearson Educación. p. 32.

³ Lehman, Ch. (1965). *Geometría analítica*. México: Unión tipográfica editorial hispano americana. Reimpresión de 1967. p. 57.



Al leer la definición, resalta la palabra clave de la misma, es decir, el concepto de pendiente.

Dados dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la **pendiente** (m) entre ellos queda determinada por el cociente entre la diferencia de las ordenadas (Δy) y la diferencia de las abscisas (Δx) de dichos puntos, es decir,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

Tip. Cuando leas una definición pon atención a las condiciones que se expresan, en este caso indican que $x_1 \neq x_2$. ¿Te has preguntado por qué en la definición de pendiente se establece la condición de que x_1 y x_2 sean distintas, o sea, $x_1 \neq x_2$? ¿Qué sucedería si estos valores son iguales?

Reflexiona y vuélvela a leer al terminar de estudiar la unidad para verificar tu deducción.

Un ejemplo para presentar las características de la pendiente m lo puedes apreciar con la siguiente situación:

Si se unen dos puntos con un segmento y se forma un triángulo rectángulo, cuyos catetos son paralelos a los ejes, se cumple también la siguiente relación:

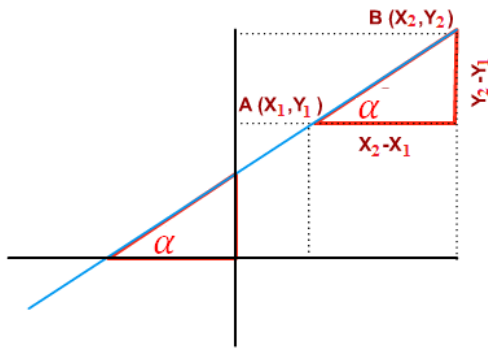
$$m = \tan \alpha$$

Tip. Realiza un repaso de las funciones trigonométricas* y las funciones trigonométricas inversas* (su definición y propiedades), además de las identidades trigonométricas*, en especial de la tangente*.

El **ángulo de inclinación** de una recta es el ángulo que forma la recta con el eje x en su dirección positiva y se mide a partir del eje x en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj.⁴

Para comprender un enunciado, ya sea una definición o el planteamiento de un problema, una estrategia muy útil es realizar un diagrama (lo más general posible) para representar la situación.

⁴ No encontré la referencia original. Los profesores lo utilizan porque es una definición común.



De la figura podemos deducir

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se llama **pendiente** o **coeficiente angular** de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación.⁵

Une lo que hasta ahora conoces:

- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,
- $m = \tan \alpha$
- $\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

La pendiente de una recta no vertical es

$$m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo tanto, conociendo el ángulo de inclinación es posible calcular la pendiente de una recta y viceversa, es decir, conociendo la pendiente es posible calcular el ángulo de inclinación de la recta

$$m = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \arctan m$$

En conclusión:

La pendiente de una recta es un número que mide la inclinación y su signo indica hacia dónde está inclinada. De forma coloquial, podemos hacer las siguientes afirmaciones.

⁵ Lehman, Ch. (1965). *Geometría analítica*. México: Unión tipográfica editorial hispano americana. Reimpresión de 1967. p. 17.



- Si el signo de la pendiente es positivo, la recta está inclinada hacia la derecha. Por el contrario, si el signo de la pendiente es negativo, la recta está inclinada hacia la izquierda.
- Cuando el valor absoluto de la pendiente es muy grande la recta es casi vertical, en cambio cuando el valor absoluto de la pendiente es muy pequeño la recta es casi horizontal. Si el valor de la pendiente es cero, la recta es horizontal.
- Por último, la pendiente de una recta vertical no está definida.

De todo lo visto hasta ahora, podemos concluir que, geoméricamente, una recta queda perfectamente determinada por una de las siguientes condiciones:

- a) dos puntos
- b) uno de sus puntos y su pendiente (es decir, su inclinación)

Ecuaciones de la recta

Hemos mencionado que los dos problemas fundamentales de la geometría analítica son:

- a) Dado el lugar geométrico, en un sistema de coordenadas, obtener su ecuación.
- b) Dada la ecuación en un sistema de coordenadas, determinar la gráfica o lugar geométrico de los puntos que satisfacen dicha ecuación.

Retomemos el primer problema: dado el lugar geométrico obtener su ecuación. Para ello, obtendremos la ecuación de la recta, a partir de su definición como lugar geométrico.
¡Adelante!

Ecuación punto-pendiente

De acuerdo con la definición de la recta como lugar geométrico, sabemos que es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el valor de la pendiente siempre es constante. Nuestro reto es determinar la ecuación de la recta si conocemos **uno de sus puntos** y su **pendiente**.

Por la definición de la recta, sabemos que los puntos que pertenecen a ella satisfacen la ecuación

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Satisfacen: Decimos que “un punto P satisface cierta ecuación” para indicar que las coordenadas de P al sustituirse en dicha ecuación nos dan una igualdad numérica. Por ejemplo, el punto $P = (2,6)$ satisface la ecuación $y = 3x$, pues al sustituir las coordenadas



de P obtenemos $6 = 2(3)$; en cambio el punto $P = (0,5)$ no lo satisface, pues la igualdad $5 = 3(0)$ es falsa.

Conocemos el valor de la pendiente m y las coordenadas de uno de sus puntos $P(x_1, y_1)$. Las coordenadas del segundo punto no las conocemos, por lo que, al ser un punto cualquiera, lo definiremos como $P(x, y)$.

Como P y P_1 satisfacen la ecuación, entonces sustituimos los valores en la ecuación (1) y resolvemos para y .

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (2)$$

$$y = m(x - x_1) + y_1 \quad (3)$$

Como la ecuación está definida en función de un punto y la pendiente, generalmente se le conoce como ecuación de la forma punto-pendiente, o simplemente, ecuación punto-pendiente. Algunos autores prefieren dejarla expresada como en (2), en nuestro curso la definiremos como en (3).

Ecuación de la forma punto-pendiente

La recta de pendiente m que pasa por un punto conocido, $P_1(x_1, y_1)$, tiene por ecuación $y = m(x - x_1) + y_1$

Nota. Con propósitos didácticos hemos utilizado un color para los datos que conocemos y uno distinto para las coordenadas de un “punto cualquiera”, perteneciente a la recta. En adelante, será parte de tu aprendizaje el que identifiques cuáles son las condiciones conocidas, es decir, aquellas condiciones que están dadas explícita, o implícitamente, en el planteamiento del problema, ya sea un enunciado o un diagrama.

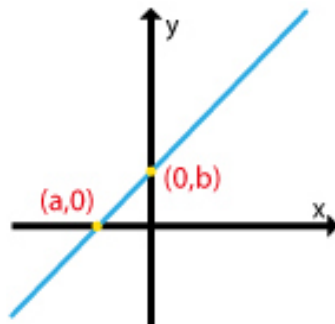
¿Qué sucede cuando el punto conocido es precisamente el origen del sistema de coordenadas? La ecuación se reduce a la forma $y = mx$, un caso particular de la anterior.

Ecuación punto-pendiente ordenada al origen

Veamos otra forma de representar la ecuación de la recta. Si se conoce la pendiente y el punto en donde la recta interseca* al eje de las ordenadas, ¿cuál es la ecuación de la recta?

Un primer paso para resolver un problema es asegurarte de comprender el enunciado, por lo que sería importante que antes de seguir leyendo visualices el diagrama que permite representar la situación propuesta.

¿Listo? Ahora comprueba tu diagrama.



En general, se adopta la siguiente convención para nombrar los puntos donde la recta toca o interseca a los ejes.

La abscisa de un punto donde la curva toca o interseca* el eje x se llama **abscisa al origen** o **intersección con el eje x (a)**, y la ordenada de un punto donde una curva toca o cruza el eje y se llama **ordenada al origen** o **intersección con el eje y (b)**.⁶

Podemos definir las coordenadas del punto P_1

$$P_1 = (0, b)$$

Y sustituirlas en la ecuación de la forma punto-pendiente

$$y = m(x - 0) + b$$

$$y = mx + b$$

Ecuación de la forma pendiente-ordenada al origen

La recta que tiene una pendiente m y pasa por el punto $(0, b)$, es decir, la ordenada al origen, tiene por ecuación:

$$y = mx + b$$

Analicemos qué sucede cuando la recta es horizontal o vertical.

a) Recta horizontal o paralela al eje de las abscisas.

Como la recta es horizontal, podemos obtener su pendiente: $m = \tan 0 = 0$

Además, sabemos que pasará por el punto $P(0, b)$

Sustituyendo estos valores en $y = mx + b$, tenemos:

$$y = 0x + b$$

$$y = b$$

En otras palabras, en una recta horizontal, el valor de la ordenada de todos los puntos que pertenecen a ella es b , sin importar el valor que tengan sus abscisas. Por lo tanto, la

⁶ Fuller, G. & Dalton, T. (1995) *Geometría analítica*. (Séptima edición). México: Pearson Educación. p. 40.



recta horizontal es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a una distancia b del eje x .

b) Recta vertical o paralela al eje de las ordenadas.

Elegimos el punto de intersección de la recta con el eje y , es decir, $P(a, 0)$

Encontramos el valor de la pendiente, $m = \tan 90 \approx \infty$

Recordemos la definición de pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, por lo que sustituyendo valores:

$$\infty = \frac{y - 0}{x - a} = \frac{y}{x - a}$$
$$x - a = \frac{y - 0}{\infty}$$

Sabemos que cuando se divide un número entre otro cada vez mayor, que tiende a infinito, el cociente tiende a cero

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

De manera análoga al caso anterior, en una recta vertical, la abscisa de todos los puntos que pertenecen a esa recta es a . La recta vertical es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a una distancia a del eje y .

A partir de las definiciones anteriores, podemos establecer las ecuaciones de los ejes.

Ecuaciones de los ejes

Eje horizontal: $y = 0$

Eje vertical: $x = 0$

La ecuación pendiente-ordenada al origen es una forma muy importante de expresar la recta porque nos permite conocer dos elementos geométricos que facilitan su graficación:

a) La ordenada al origen, es decir, el punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas.

b) La pendiente

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Habíamos mencionado que, geoméricamente, una recta queda perfectamente determinada por dos de sus puntos. Lo mismo sucederá de manera analítica, la ecuación de una recta también puede determinarse conociendo las coordenadas de sus puntos.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.

La recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, tiene por ecuación

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1, \quad x_1 \neq x_2$$

Aunque algunos autores prefieren escribirla como:



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Tener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados significa que si conocemos las coordenadas de los puntos se pueden sustituir directamente en una expresión y con ésta se puede establecer la ecuación de la recta.

Ecuación general de la recta

La ecuación de una recta, en el sistema de coordenadas rectangulares, se puede escribir de la forma lineal.

$$Ax + By + C = 0$$

En esta ecuación, A o B deben ser diferentes de cero y C puede o no ser igual a cero.

Notamos que los tres coeficientes, en la forma general, son constantes reales, es decir, pueden tomar cualquier valor real, siempre que A y B no sean simultáneamente nulos.

Vista la ecuación de la recta en su forma general, no son evidentes los elementos geométricos que nos permiten graficarla (dos puntos, un punto y su pendiente), por lo que en ocasiones será necesario transformar la ecuación general de una recta a una forma que nos brinde información para representarla en el plano cartesiano y poder así resolver un problema.

Por ejemplo, para transformar la ecuación general de la recta a la forma pendiente-ordenada al origen, necesitamos resolver la ecuación para y .

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

De esta manera, a partir de los coeficientes de la ecuación general de la recta podemos conocer, a simple vista, los valores de la pendiente, $m = -\frac{A}{B}$, y de la ordenada al origen,

$$b = -\frac{C}{B}.$$

Sugerencia para trazar la línea recta

Primer método. Tabulación.

Consiste en dar valores arbitrarios a la variable x , de manera que se evalúa a y en función de x . De esta manera se obtienen pares ordenados que corresponden a las coordenadas de algunos de los puntos que pertenecen a la recta, los cuales se sitúan en el plano cartesiano y se unen.

Este método de tabulación será de utilidad para graficar otras curvas, como las que estudiaremos más adelante.

Ejemplo.

Trazar la línea recta $y = -\frac{1}{4}x + 3$

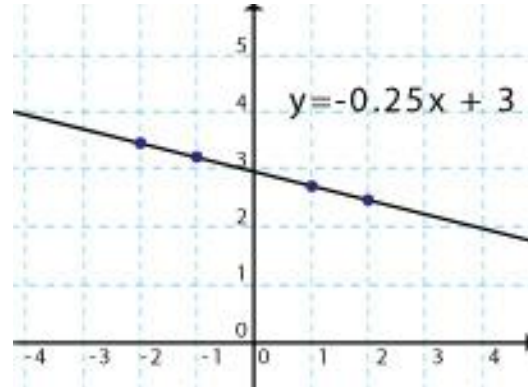
x	$y = -\frac{1}{4}x + 3$	Coordenadas
-----	-------------------------	-------------

Geometría analítica I

Unidad 2. La recta



-2	$y = -\frac{1}{4}(-2) + 3 = \frac{7}{2}$	$\left(-2, \frac{7}{2}\right)$
-1	$y = -\frac{1}{4}(-1) + 3 = \frac{13}{4}$	$\left(-1, \frac{13}{4}\right)$
0	$y = -\frac{1}{4}(0) + 3 = 3$	$(0, 3)$
1	$y = -\frac{1}{4}(1) + 3 = \frac{11}{4}$	$\left(1, \frac{11}{4}\right)$
2	$y = -\frac{1}{4}(2) + 3 = \frac{5}{2}$	$\left(2, \frac{5}{2}\right)$



Segundo método. A partir de la ordenada al origen y la pendiente.

El procedimiento es el siguiente:

a) Se grafica el punto $(0, b)$, donde b es la ordenada al origen.

b) Sabemos que $m = \tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

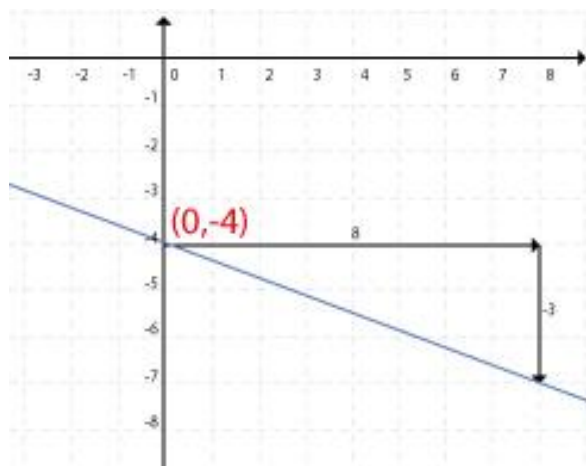
A partir del punto dado por la ordenada al origen representamos en magnitud el valor de x a la derecha del punto. Después representamos en magnitud el valor de y hacia arriba, si el signo de la pendiente es positivo, o hacia abajo, si el signo de la pendiente es negativo.

Esto nos dará la ubicación del segundo punto por el que pasa la recta.

c) Como tenemos dos puntos, los unimos con una línea recta.

Ejemplo. Trazar la recta $y = -\frac{8}{3}x - 4$

De la ecuación, por inspección visual, podemos determinar que $b = -4$ y $m = -\frac{8}{3}$





Tercer método. Determinando los puntos de intersección con los ejes coordenados. Cuando nos dan la ecuación en su forma general, este método es muy útil. La idea es obtener el valor de la abscisa y de la ordenada al origen, para ello, primero se iguala y con cero, y después x con cero. Lo que nos permite encontrar dos puntos que simplemente hay que unir.

Ejemplo. Trazar la recta $5x - 8y + 3 = 0$.

Sea $y = 0$. Resolvemos para x .

$$5x - 8(0) + 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

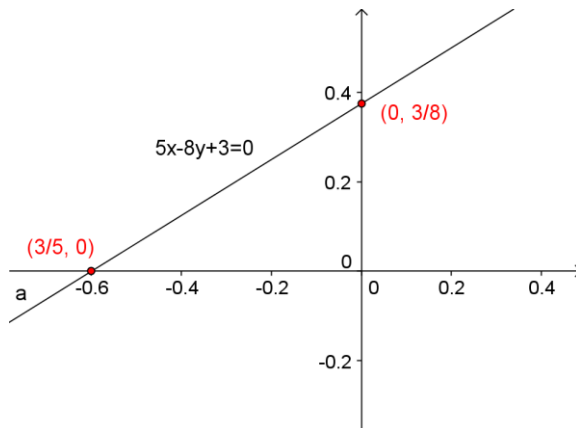
El primer punto es $(-\frac{3}{5}, 0)$

Sea $x = 0$. Resolvemos para y .

$$5(0) - 8y + 3 = 0$$

$$y = \frac{3}{8}$$

El segundo punto es $(0, \frac{3}{8})$



Ángulo entre dos rectas

La medida del ángulo que se forma entre dos rectas se enuncia por medio del siguiente teorema.

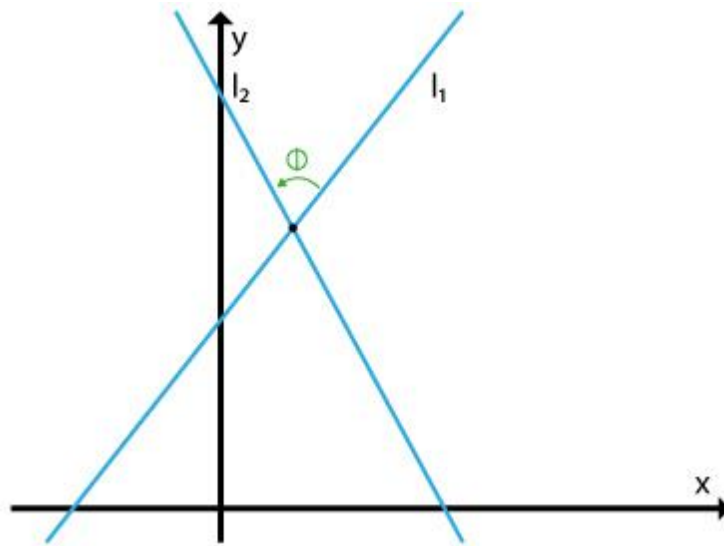
Teorema

Si ϕ es un ángulo entre dos rectas, l_1 y l_2 , entonces:

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 m_2 \neq -1$$

Donde m_1 es la pendiente del lado inicial l_1 y m_2 es la pendiente de la recta que forma el lado terminal l_2 , considerando que el ángulo ϕ se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj, del lado inicial al lado final.

En ocasiones puede ser complicada la interpretación de un teorema, por lo cual, para darle sentido, conviene realizar un diagrama general de la situación descrita.



Como puedes darte cuenta, el ángulo medido dependerá de la recta que consideremos como lado inicial y la que definamos como lado final, respetando en todo momento la convención de que el ángulo ϕ se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj, del lado inicial l_1 al lado final l_2 . En el diagrama la dirección en la que se mide el ángulo ϕ se indica con una flecha.

Si las ecuaciones de las rectas están dadas en forma general, tenemos:

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Por lo que sus respectivas pendientes están definidas por:

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

Al sustituir en $\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ y simplificar, obtenemos:

$$\tan \phi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

Así, ya tienes dos formas de encontrar el ángulo entre dos rectas. De acuerdo con la información que conozcas podrás elegir la más adecuada para obtener el valor de dicho ángulo.

Una de las habilidades que debes desarrollar como matemático es poder comprender cualquier texto con una deducción, demostración o propuesta de solución de un problema. Realiza la siguiente actividad sobre la Demostración del ángulo entre dos rectas.



Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Teorema

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales.⁷

Las definiciones de inclinación y pendiente nos permiten deducir esta forma de enunciar el teorema acerca de rectas paralelas. Si dos rectas tienen la misma pendiente, sus inclinaciones son iguales. Por geometría se sabe que son paralelas. Recíprocamente, si dos rectas no verticales son paralelas, tendrán inclinaciones iguales y, por tanto, pendientes iguales.

Sin embargo, algunos autores consideran que las condiciones de paralelismo y perpendicularidad se pueden deducir del teorema del ángulo entre dos rectas, de manera que se deducen dos corolarios*.

Corolario⁸

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales.

$$m_1 = m_2$$

Corolario⁹

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares entre sí es que el producto de sus pendientes sea igual a -1 .

$$m_1 m_2 = -1$$

Expresado de otra manera:

Dos rectas inclinadas son perpendiculares entre sí cuando una de las pendiente es el recíproco negativo de la otra:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Distancia de un punto a una recta

Para deducir esta fórmula, primero hagamos un ejemplo particular.

Calcular la distancia del punto $(-4, -7)$ a la recta $5x + 2y + 4 = 0$

⁷ Fuller, G. & Tarwater, F. (1995), *Geometría analítica*. (Séptima edición). México: Pearson Educación. p. 14

⁸ Lehman, Ch. (1989) *Geometría analítica*. México: Limusa Wesley. p. 23

⁹ Lehman, Ch. (1989) *Geometría analítica*. México: Limusa Wesley. p. 23



Paso 1. La distancia de un punto a una recta es la medida de la distancia más corta que hay entre el punto y la recta. Esto se cumple para el segmento perpendicular que une al punto dado con la recta. A esta recta la llamaremos recta 1.

Por lo tanto, necesitamos encontrar la pendiente de la recta 1, $5x + 2y + 4 = 0$

$$5x + 2y + 4 = 0$$

$$y = -\frac{5x}{2} - 2$$

De allí podemos deducir que la pendiente de la recta es $m = -\frac{5}{2}$

Por lo que la pendiente del segmento perpendicular será

$$m_1 m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Es decir, el recíproco negativo de la pendiente

$$m_2 = -\frac{1}{\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{2}{5}$$

Paso 2. Encontramos la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta 1 y que pasa por el punto $(-4, -7)$. A esta nueva recta la llamaremos recta 2.

Por la ecuación punto-pendiente es fácil hacerlo

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{2}{5}(x - (-4)) + (-7)$$

$$y = \frac{2x}{5} - \frac{27}{5}$$

O en su forma de ecuación general de la recta:

$$-2x + 5y + 27 = 0$$

Paso 3. Ahora necesitamos encontrar el punto de intersección de la recta 1 y la recta 2.

En otras palabras, resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. La solución serán justamente las coordenadas del punto de intersección.

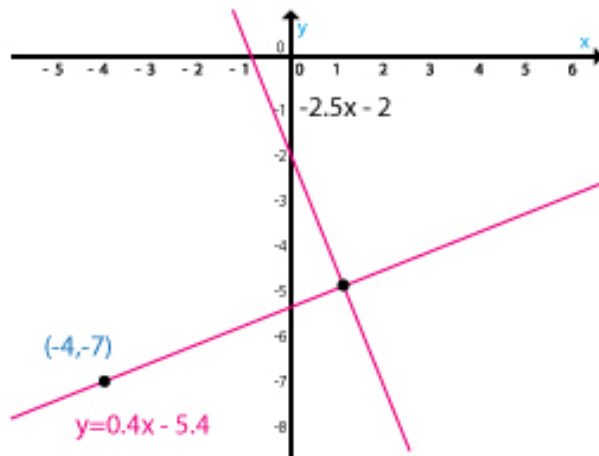
$$5x + 2y + 4 = 0$$

$$-2x + 5y + 27 = 0$$

$$x = 1.17$$

$$y = -4.93$$

El punto de intersección es $(1.17, -4.93)$



Paso 4. La distancia del punto dado al punto de intersección es justamente la distancia del punto a la recta.

Nombremos al punto dado como P_1 y al punto de intersección P_2

$$P_1(-4, -7)$$

$$P_2(1.17, -4.93)$$

Sustituyendo en la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos.

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(1.17 - (-4))^2 + ((-4.93) - (-7))^2}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{5.17^2 + 2.07^2}$$

$$d(P_1, P_2) = 5.57$$

La distancia del punto $(-4, -7)$ a la recta $5x + 2y + 4 = 0$ es de 5.57 unidades.

Ahora que comprendimos el procedimiento, podemos generalizar, es decir, encontrar una expresión para una recta y un punto cualquiera en el plano.

Distancia de un punto a una recta.

La distancia

de una recta $Ax + By + C = 0$, llamada l , a un punto dado $P_0(x_0, y_0)$ puede obtenerse por

$$d(P_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La distancia de una recta al origen O se obtiene sustituyendo en la expresión anterior el punto $O(0,0)$.

$$d(O, l) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



¿Cómo encontrarías la distancia entre dos rectas paralelas? Antes de continuar con la lectura, intenta proponer una estrategia para responder a esta pregunta.

Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas, se toma un punto cualquiera, de una de ellas y se calcula su distancia a la otra recta.

Por ejemplo, sean r y s dos rectas paralelas, y R un punto que pertenece a la primera recta, entonces la distancia entre ellas queda determinada por
 $d(r, s) = d(R, s)$

Familia de rectas

Cuando se habla de “familia de curvas”, se hace referencia a un conjunto de curvas que comparten alguna característica en común, la cual puede ser una propiedad geométrica o una propiedad algebraica —resultado de variar en una determinada ecuación alguna de las cantidades que intervienen en ella—. Se puede hablar de familia de rectas, de circunferencias, etcétera.

La ecuación $y = mx + b$ posee dos constantes, m y b , la pendiente y la ordenada al origen, respectivamente. Cómo pudiste darte cuenta en la escena, si asignas valores definidos a estas dos constantes, entonces defines una única recta.

De manera que las cantidades m y b están fijas para una recta particular, pero cambian de una recta a otra, por lo que las denominamos **parámetros**, ya que, de acuerdo al valor que les asignemos, se determinará una nueva recta. Cuando se cambia solamente uno de estos parámetros, se forma una familia de rectas.

En la ecuación general de la recta, los coeficientes pueden ser considerados también parámetros.

Ejemplo 1. Escribe la ecuación de la familia de rectas que poseen la propiedad dada. En cada caso, asigna tres valores al parámetro y grafica las rectas correspondientes.

a) Las rectas son paralelas a $3x - 4y = 5$

Transformamos la ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen

$$y = \frac{3x - 5}{4}$$

Por lo tanto la pendiente es $m = \frac{3}{4}$, de manera que la ecuación de la familia de rectas es

$$y = \frac{3}{4}x + k$$

La cual también la podemos escribir en su forma general, para ello transformamos la ecuación igualándola a cero



$$\frac{3}{4}x - y + k = 0$$

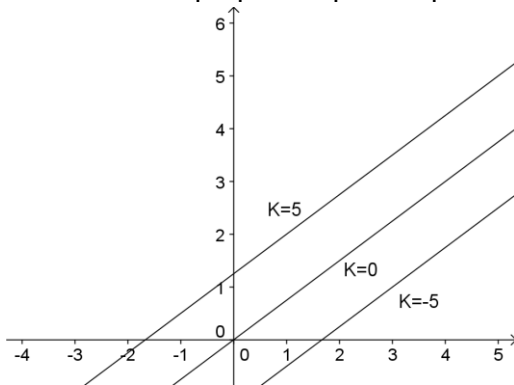
Como recordarás, por convención se prefiere escribir los coeficientes enteros, de manera que multiplicamos toda la ecuación por 4

$$3x - 4y + 4k = 0$$

$4k$ es una constante, por lo que podemos renombrarla como $K = 4k$, así que la ecuación buscada es:

$$3x - 4y + K = 0$$

A continuación se muestran algunos miembros de esta familia de rectas, en cada caso se indica el valor propuesto para el parámetro K .



b) Las rectas son perpendiculares a $3x - 4y = 5$

Analizando los coeficientes, podemos calcular su pendiente, de manera que la pendiente de la recta dada es

$$m = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto, las rectas perpendiculares tendrán una pendiente de $m = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$.

De manera que nos interesa determinar la ecuación de la familia de rectas con pendiente

$$m = -\frac{3}{4}$$

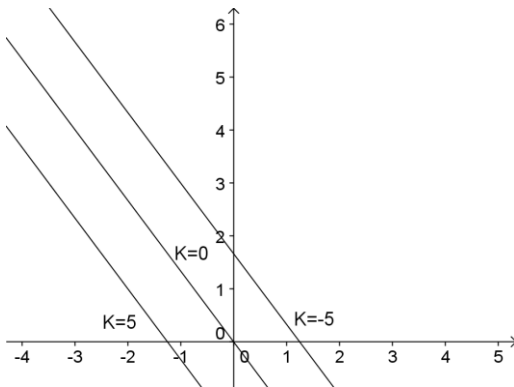
Sustituyendo en la forma pendiente ordenada-ordenada al origen, tenemos

$$y = -\frac{3}{4}x + k$$

Y en su forma general

$$3x + 4y + K = 0$$

¿Encuentras alguna relación entre esta ecuación y la obtenida como resultado en el inciso anterior? Presta especial atención a los coeficientes y sus signos.



Ejemplo 2. Encuentra la familia de rectas que pasan por la intersección de $3x - 4y = 5$ y $3x + 4y = 5$. Además, encuentra el miembro de esta familia de rectas que tiene pendiente 8.

Lo primero es resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$$

El punto de intersección es $Q = (2.5, 0)$

Por lo que el problema se transforma a encontrar la familia de rectas que pasan por ese punto. De manera que probaremos con la ecuación punto-pendiente (dado que son los datos que conocemos del problema).

$$y - 0 = m(x - 2.5)$$

$$y = m(x - 2.5)$$

La ecuación anterior define la familia de rectas que pasan por el punto de intersección.

Como nos piden el miembro de esta familia tiene pendiente $m = 8$, solamente se debe sustituir en la ecuación este valor

$$y = 8(x - 2.5)$$

$$y = 8x - 20$$

O escrita en su forma general

$$8x - y - 20 = 0$$

Recuerda que no existe un solo camino para resolver un problema. Insistimos que la mejor manera de aprender es resolver problemas por ti mismo, por lo que, antes de continuar leyendo los ejemplos, te recomendamos que intentes resolver el problema propuesto por ti mismo y después compares tu solución con la que se muestra. No te preocupes si no lo logras al primer intento, será la creatividad y la práctica lo que te permita elegir la vía adecuada de solución.

Ejemplo 3. Escribe la ecuación de la familia de rectas con pendiente $-\frac{5}{12}$, y encuentra las ecuaciones de dos rectas situadas a 4 unidades del origen.

Se elige la ecuación $y = -\frac{5}{12}x + k$, o en su forma general $5x + 12y + C = 0$. Observa que en la primera ecuación el parámetro es la ordenada al origen, mientras que en la segunda



ecuación propuesta el parámetro es el coeficiente independiente de la ecuación general de la recta.

Primera propuesta de solución:

Al estar las rectas situadas a dos unidades del origen, podemos elegir trasladarla sobre el eje de las ordenadas. Por lo tanto, las soluciones que parecen evidentes son:

$$y = -\frac{5}{12}x + 4 \text{ y } y = -\frac{5}{12}x - 4$$

Ese es un error muy común, pero recuerda que la distancia de un punto a una recta se mide con la distancia perpendicular del punto a la recta. Calcula esta distancia y comprueba que las ecuaciones anteriores no están a 4 unidades del origen.

Segunda propuesta de solución:

Sabemos que cada miembro de la familia de rectas $5x + 12y + C = 0$ es paralelo a la recta dada, a la cual llamaremos L_1 .

Utilizando la fórmula para calcular la distancia de una recta a un punto

$$d(P, L_1) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Por el enunciado del problema, podemos determinar las coordenadas del punto P , ya que son las coordenadas del origen $P = (0,0)$

Los coeficientes son $A = 5$ y $B = 12$

Además, la distancia es igual a 4 unidades, $d(P, L_1) = 4$

Sustituyendo

$$4 = \frac{|2(0) + 12(0) + C|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$
$$4 = \frac{C}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{C}{\sqrt{169}}$$

Resolviendo para C

$$C = 4\sqrt{169}$$

$$C_1 = 4(13) = 52$$

$$C_2 = 4(-13) = -52$$

Por lo tanto, las ecuaciones de las rectas buscadas son:

$$5x + 12y + 52 = 0$$

$$5x + 12y - 52 = 0$$

A modo de práctica podrías graficar las ecuaciones de las rectas y comprobar las soluciones obtenidas.

En este segundo ejemplo decidimos mostrarte cómo no siempre se obtiene la solución al primer intento, por lo que no te desanimes si al estar estudiando y resolviendo las actividades requieres probar más de un camino de solución.



Cierre de la unidad

La principal contribución del álgebra a la geometría analítica es brindar un lenguaje escrito con el cual expresar las relaciones geométricas, también proporciona un método que a lo largo de la historia ha logrado, por una parte, demostrar resultados conocidos, así como realizar descubrimientos y obtener resultados novedosos.

Por su parte, la geometría permite realizar una representación de las relaciones que el álgebra manifiesta, por medio de un sistema de coordenadas y visualizar las propiedades que están implícitas en las relaciones escritas en lenguaje algebraico, pero que desde la perspectiva de su lugar geométrico brinda un enfoque nuevo para su estudio.

Lo anterior, se vuelve tangible durante el estudio de las diferentes formas que tiene la ecuación de la recta, a partir de las propiedades geométricas que la definen, por ejemplo, un punto y su pendiente, o dos puntos por los que pasa.

En conclusión, la ecuación de la recta es una sola, pero puede adoptar diversas formas, las cuales reciben nombres especiales, de acuerdo a los elementos geométricos que están implícitos o a las propiedades de su expresión algebraica, como la ecuación general de la recta.

Para saber más

- Consulta en el libro *Los Elementos de Euclides* las diferentes definiciones relacionadas con la línea recta. Por ejemplo:
Libro I, definiciones 1, 3 y 4
Libro I, postulado 5
- En la siguiente página podrás practicar las diferentes formas de las ecuaciones de la recta y su representación gráfica.

¿Por qué las demostraciones? Se cuenta de Newton una anécdota clásica. Joven estudiante, comenzó el estudio de la geometría, como era costumbre en su tiempo, por la lectura de los *Elementos de Euclides*. Leyó los teoremas, constató su exactitud y omitió las demostraciones preguntándose por qué se tomaban tantas molestias en demostrar verdades tan evidentes. Años más tarde, sin embargo, cambió de parecer y fue un admirador de Euclides.

Auténtica o no, esta anécdota nos lleva a la pregunta siguiente: ¿por qué aprender o enseñar las demostraciones? ¿qué vale más, nada demostrar, demostrarlo todo o demostrar en parte? pero si sólo se dan algunas demostraciones, ¿cómo escogerlas? Estas preguntas no tienen respuesta inmediata, pero esperamos que a lo largo de tu formación como Licenciado en Matemáticas puedas formarte una opinión al respecto.



Te recomendamos la siguiente lectura, la cual menciona aspectos importantes a considerar sobre las relaciones simbólicas y el uso de figuras (o diagramas) en las matemáticas: [El mundo matemático](#).

Fuentes de consulta

Básica

- American Association for Advancement of Science (AAAS). (1997). *Ciencia: conocimiento para todos, proyecto 2061*. Consultado en línea el 18 de agosto de 2026. <https://www-aaas-org.translate.goog/programs/project-2061? x tr sl=en& x tr tl=es& x tr hl=es& x tr pto=tc>
- American Association for the Advancement of Science. (n.d.). *Capítulo 2: Los principios de la ciencia*. Project 2061. <http://www.project2061.org/esp/publications/sfaa/online/chap2.htm>
- American Association for the Advancement of Science. (n.d.). *Capítulo 9: La naturaleza de la tecnología*. Project 2061. <http://www.project2061.org/esp/publications/sfaa/online/chap9.htm>
- Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A., Ramírez, A. (2005). *Geometría analítica*. Pearson Educación. pp. 57-58.