Matemáticas

Geometría analítica II

3er Semestre

Unidad 1. Lugares geométricos en el espacio Cartesiano

Clave

05142314/06142314

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Presentación de la unidad

El concepto del punto es una abstracción matemática sin existencia física, ya que se le define típicamente como un ente que solo tiene posición, pero no tamaño o longitud alguna. El punto en la geometría, y en particular en la geometría analítica, es la unidad fundamental para construir cualquier curva, aun las más simples como una línea recta, la cual es simplemente una sucesión de puntos que satisface ciertas reglas (la ecuación de la recta). Así pues, todos los lugares geométricos son puntos en el plano o el espacio que satisfacen una cierta ecuación. Entonces, en este capítulo repasaremos estos conceptos fundamentales que son esenciales para el entendimiento del resto del curso.

Competencia específica

Resuelve problemas geométricos utilizando el concepto de sistemas de coordenadas y lugar geométrico para interpretar las relaciones de un objeto en el espacio mediante su representación dentro del espacio.

Logros de la unidad

- Ubicar puntos, rectas y objetos simples en un sistema de coordenadas en tres dimensiones.
- Encontrar el punto medio de un segmento y la división de un segmento y la división de un segmento en razón dada en el espacio.
- Definir el concepto de números directores de una recta en el espacio, útiles para encontrar la ecuación de un plano en el espacio.
- Obtener la ecuación de un plano en sus diferentes formas de representación.
- Desarrollar habilidades para el análisis, el razonamiento y la comunicación de tu pensamiento a través de la solución de problemas.

1.1. Conceptos básicos

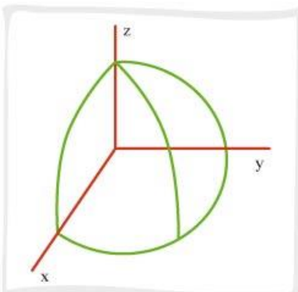


Figura 1. Sistema de coordenadas

El estudio de fenómenos físicos, en ocasiones, requiere de la definición de un sistema de referencia a partir del cual se describirá la evolución en el tiempo y en el espacio de dicho fenómeno. Uno de los sistemas de referencia más comúnmente utilizado para desarrollar un modelo matemático que describa a través de ecuaciones el fenómeno de estudio son las coordenadas rectangulares o cartesianas.

En esta unidad se revisará brevemente el plano cartesiano y a partir de los conceptos ya conocidos en dos dimensiones se extenderán estos conceptos a un sistema de coordenadas cartesianas en tres dimensiones, ubicándose puntos en dicho sistema. Posteriormente, se hallará la distancia entre puntos y se verán algunas figuras geométricas en el espacio.

Al igual que en $\mathbb{R}^2$, estudiando la expresión algebraica (una ecuación con tres variables), es posible obtener información del objeto geométrico (la gráfica de una ecuación) y viceversa; analizando el objeto geométrico es posible deducir la información del objeto algebraico, éste es, a grandes rasgos, el método que nos propone la geometría analítica.

1.1.1. Sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas

En el curso de Geometría analítica I vimos que un par ordenado de números, las **coordenadas del punto**, **dos rectas numéricas, es decir, dos rectas reales** $\mathbb{R}$**,** el punto de intersección, el *origen* de cada una, y una *unidad* (la misma en cada recta), llamado el 1, determinan un **sistema de coordenadas**. **De esta manera** un punto tiene estas *coordenadas cartesianas* en el plano cartesiano, que se denota como $\mathbb{R}^2$**. A la recta horizontal la denominamos *eje de las abscisas* o *eje* X y a la vertical, *eje de las ordenadas* o *eje* Y.**
De la misma manera está determinado un **sistema de coordenadas cartesiano de tres dimensiones**, denota como $\mathbb{R}^3$, veamos: Cartesian Coordinates in Three Dimensions.

Para localizar puntos en el espacio cartesiano, tomamos tres planos concurrentes y perpendiculares dos a dos que se cortan en un punto, el origen. A **cada tercia ordenada *(x,y,z)*, donde *x, y*** y ***z*** son **números reales*,* le corresponde un punto en el espacio cartesiano**, de la misma manera cada punto está definido solamente por una tercia ordenada de números reales. A esta relación entre los puntos del espacio y las tercias de números reales se le denomina **correspondencia uno a uno**.

Las tres rectas determinan tres ejes. El primer eje tiene el nombre de ordenadas, o eje X, el segundo de abscisas, o eje Y, y el tercero se conoce como eje de cotas, o eje Z. De esta manera tendremos 3 ejes coordenados. Por ejemplo, el punto (1, 2, 3) representará una unidad en el eje X, después se avanzarán 2 unidades de forma paralela al eje Y y finalmente se subirán 3 unidades de forma paralela al eje Z. Un diagrama que ilustra este punto se muestra en la Figura 2. Plano yz.

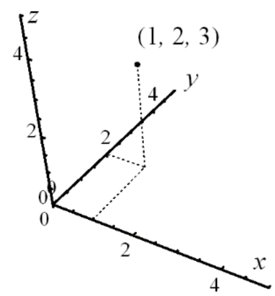


Figura 2. Espacio cartesiano

En el caso del espacio, los ejes coordenados lo dividen en 8 diferentes regiones llamadas octantes: Octantes de un sistema de coordenadas cartesiano. Cuando una de las coordenadas es cero se habla de que se tiene una proyección sobre un plano. Por ejemplo, si $z = 0$ se dice que se tiene una proyección sobre el plano xy. Los otros planos de proyección serían yz y xz. El plano yz se muestra en la Figura 3. Plano yz.

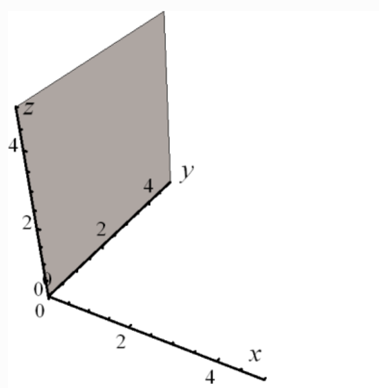


Figura 3. Plano yz.

1.1.2. Distancia entre dos puntos

Otro concepto fundamental es el de distancia entre dos puntos. Recordemos que, en un plano, (espacio de dos dimensiones) se calcula utilizando el Teorema de Pitágoras, donde los lados del triángulo están formados por las coordenadas x y y, y la hipotenusa es precisamente la distancia entre estos puntos:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Gráficamente se ve como en la Figura 4. Distancia entre dos puntos, pero en general la distancia entre dos puntos cualesquiera se calcula como:

$$d = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}.$$

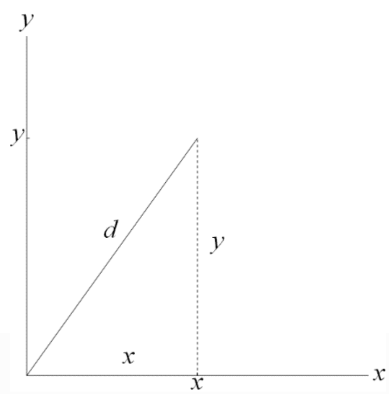


Figura 4. Distancia entre dos puntos.

Lo siguiente es extender este concepto a $\mathbb{R}^3$**,** esto se logra aplicando dos veces el Teorema de Pitágoras; una sobre el plano *xy*, como acabamos de mostrar, y la otra sobre el triángulo que se forma con base d_{xy} y teniendo como altura la coordenada *z* (ver Figura 5. Distancia entre dos puntos en R3).

Por lo tanto:

$$d = \sqrt{\left(d_{xy}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

donde se ha sustituido el valor de d_{xy} encontrado previamente. En general,

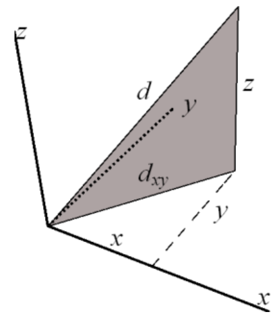


Figura 5. Distancia entre dos puntos en R3

Distancia entre dos puntos

La distancia d de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio se denota por la expresión $d(P_1, P_2)$ y está dada por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

donde P_1 es el punto inicial y P_2 es el punto final.

Observa que la fórmula anterior es más general que la primera, ya que, si en ésta uno de los puntos es el origen, de coordenadas $(0, 0, 0)$, entonces obtendremos la fórmula en la cual sólo aparece un punto. Como ejemplo numérico calcularemos la distancia entre un par de puntos aplicando la fórmula anterior.

Ejemplo. Encuentre la distancia entre el punto (1, 2, –1) y el punto (–2, 1, 4).

Solución. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(1-[-2])^2 + (2-1)^2 + (-1-4)^2}$$

$$d = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}.$$

1.1.3. División de un segmento en una razón dada

El video División de un segmento en una razón dada muestra un ejemplo de cómo encontrar un punto que divide a un segmento de recta en una razón[1] dada en el plano cartesiano, en donde, en general, la razón en la que se divide un segmento se define como sigue:

División de un segmento en una razón dada

Si $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ son los extremos de un segmento de recta P_1P_2 , y $P(x,y)$ es un punto que divide a dicho segmento en una razón, la razón está dada por la fórmula

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}{}^{2}$$

entonces las coordenadas del punto P están determinadas por:

$$P\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)$$

donde $$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r},\quad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r};\qquad \forall r \neq -1 \ {}^{3}$$

$\forall\ r \neq -1$ se lee como: "Para todo valor de r diferente de -1".

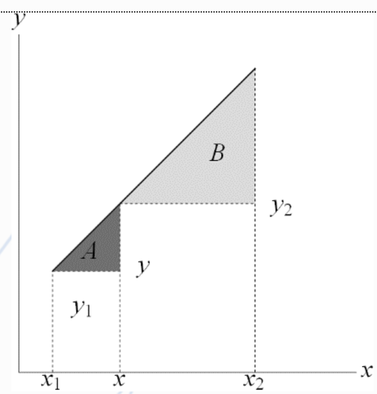


Figura 6. División de un segmento a una razón dada

[1] Para repasar el concepto de razón puedes mirar el video Proporción directa.
[2] *Razón*: una razón se puede expresar por medio de un cociente o por la siguiente igualdad $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$.
[3] Puedes ver la deducción de esta fórmula en https://www.youtube.com/watch?v=mNZ45i3tsM8.

Un caso particular se da cuando $r = 1$. Al sustituir r en las ecuaciones anteriores, se reducen a lo siguiente:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

De esta forma se encuentran las coordenadas del punto medio $\mathrm{P_m}$ de un segmento:

$$P_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

En este caso, la abscisa del punto medio es el promedio de las abscisas de los puntos extremos del segmento, y su ordenada es el promedio de las ordenadas.

El caso tridimensional es muy similar al ya analizado para el punto medio, de nuevo partimos del bosquejo mostrado en la Figura 7. División de un segmento en una razón dada R3., y nos apoyamos en las proyecciones sobre los ejes *x* y *z* tomando como referencia el plano xy.

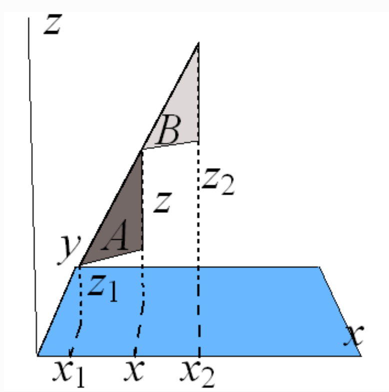


Figura 7. División de un segmento en una razón dada R3.

Como antes nombramos las hipotenusas de los triángulos A y B como d_A y d_B, respectivamente. Entonces, escribimos la razón entre la hipotenusa de cada triángulo y su base como:

$$\frac{d_A}{x - x_1} = \frac{d_B}{x_2 - x}$$

o bien,
$$r = \frac{d_A}{d_B} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

que, al igual que en el caso bidimensional, puede despejarse para la coordenada *x*,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}. \qquad (r \neq -1)$$

Este procedimiento hay que repetirlo tres veces, en este caso la proyección tomada favorece el cálculo del componente *z*, que es idéntico al anterior, simplemente en vez de usar la base del triángulo utilizamos la altura:

$$\frac{d_A}{z - z_1} = \frac{d_B}{z_2 - z},$$

de nuevo
$$r = \frac{d_A}{d_B} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

y despejando
$$z = \frac{z_1 + rz_2}{1 + r}. \qquad (r \neq -1)$$

Entonces, podemos inferir que la tercera componente, *y* tendrá como fórmula:

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \qquad (r \neq -1)$$

que es difícil de visualizar o justificar con la misma proyección, pero una construcción similar puede hacerse proyectando las componentes *x* y *z* por ejemplo sobre el plano *yz*. Otra manera de hacerlo es tomando diferentes triángulos similares, los cuales son mostrados en la Figura 8. Diferentes triángulos similares para deducir las fórmulas. En este caso hemos removido los rótulos de los triángulos *A* y *B* y las alturas en el eje *z* de la Figura 8. Diferentes triángulos similares para deducir las fórmulas. con el fin de no recargar la figura y hacer más fácil la visualización de que existen otras posibles proyecciones a través de las cuales pueden escribirse relaciones de proporciones de triángulos y derivar los mismos resultados.

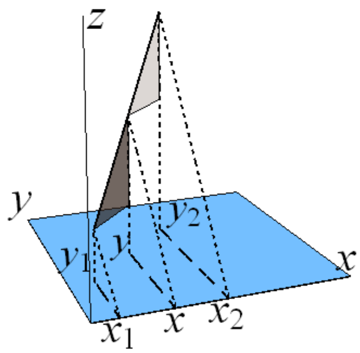


Figura 8. Diferentes triángulos similares para deducir las fórmulas

Ejemplo. Los puntos extremos de un segmento son $(3, 2, 6)$ y $(8, 3, 8)$. Hallar las coordenadas del punto P de tal forma que la razón entre los segmentos sea $r = -2$.

Solución. Sustituimos en las fórmulas dadas para cada coordenada, en el caso de x:

$$x = \frac{3 + (-2)8}{1 + (-2)} = \frac{-13}{-1} = 13,$$

mientras que la coordenada *y*:

$$y = \frac{2 + (-2)3}{1 + (-2)} = \frac{-4}{-1} = 4$$

y en el caso de *z*:

$$z = \frac{6 + (-2)8}{1 + (-2)} = \frac{-10}{-1} = 10.$$

Por lo tanto, el punto buscado tiene coordenadas $P(13, 4, 10)$. La Figura 9. muestra la localización de los tres puntos. Observa que, como la razón es negativa, el punto buscado se encuentra fuera del segmento original.

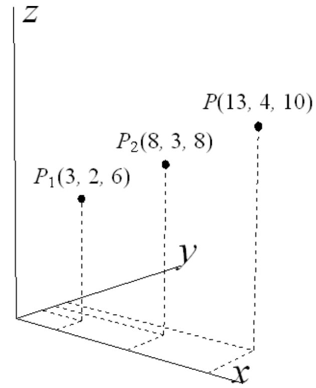


Figura 9. Localización de los tres puntos del ejemplo anterior.

1.1.4. Números directores de una recta en el espacio

Anteriormente se vio como localizar puntos en el espacio, ahora se definirá una manera para determinar la posición de una sola recta (y todas sus paralelas) con respecto a un sistema de ejes coordenados. Los conceptos de números directores y cosenos directores son esenciales para definir la ecuación de la recta, la curva más simple que existe en el espacio y que es el tema final de esta unidad. Y a su vez, a partir de estos y del concepto de plano podremos avanzar a la siguiente unidad donde se estudiará la ecuación de un plano, el cual representa la superficie más simple en el espacio.

Es importante que prestes especial atención a los conceptos de números directores y cosenos directores, asegurándote de comprenderlos bien; ya que más adelante, al progresar en tus estudios, los volverás a encontrar bajo el enfoque de vectores.

1.1.5. Cosenos directores

Ya vimos que la posición de un punto queda determinada por tres coordenadas en el espacio, ahora veremos qué pasa con un segmento de recta o una recta. Ésta pude ser determinada por dos puntos en el espacio o bien por los ángulos que forma con los ejes de coordenadas. Supongamos una recta cualquiera en el espacio y llamémosla *L*, si esta recta no pasa por el origen siempre es posible escoger una recta que tenga exactamente la misma inclinación y orientación con respecto a los ejes y que pase por el origen de coordenadas. Esta situación se ilustra en la Figura 10. Rectas paralelas en el espacio y los ángulos que forman en el origen., donde además se han dibujado otras rectas punteadas para ilustrar la idea de que existe un número infinito de ellas con la misma inclinación en diferentes posiciones con respecto a los ejes coordenados. Dado que la perspectiva del diagrama puede ser engañosa, debes de tomar en cuenta que los ángulos α, β, y γ, no están medidos sobre los planos *xy*, *xz* o *yz* sino que van de un eje coordenado a la recta, es decir que son aberturas espaciales. Estos ángulos son conocidos como ángulos directores y están comprendidos entre 0 y π.

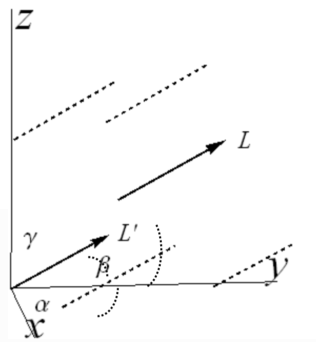


Figura 10. Rectas paralelas en el espacio y los ángulos que forman en el origen.

Tradicionalmente, y porque es más cómodo en esta forma, no se trabaja con los ángulos directores sino con el coseno de éstos. Entonces, los cosenos de los ángulos directores son conocidos como los cosenos directores. Para la recta dirigida *L*, sus cosenos directores son $\cos\alpha, \cos\beta$ y $\cos\gamma$. Una recta con las mismas características que *L* pero definida en la dirección contraria tendrá los mismos cosenos directores, pero negativos. Esto, es así, porque la dirección es la opuesta o, si se desea ver de otra manera, en este caso el ángulo de esta recta con los ejes coordenados se considera el suplementario y entonces $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$. Si no se conocen los ángulos que forma la recta con los ejes, pero conocemos dos puntos de la recta o del segmento, podemos determinar a partir de ellos sus cosenos directores.

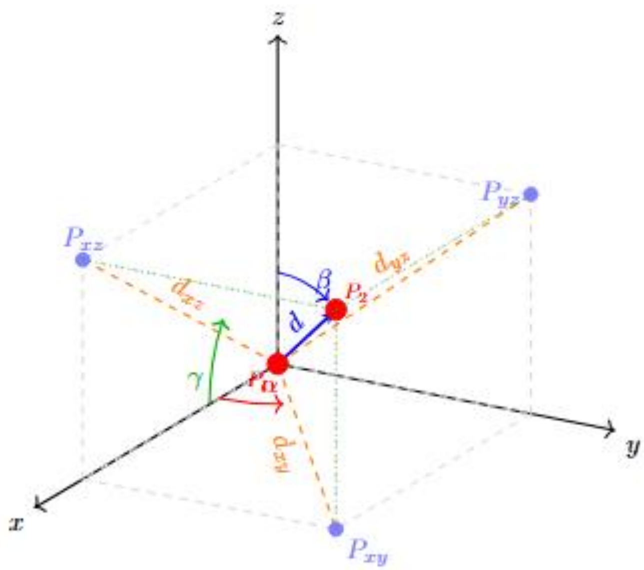


Figura 11. Diagrama esquemático para determinar los cosenos directores

Considera la figura anterior (ver Figura 11. Diagrama esquemático para determinar los cosenos directores). En este caso se tienen como puntos extremos P_1 (x_1, y_1, z_1) y P_2 (x_2, y_2, z_2), que, por construcción, son las aristas diagonalmente opuestas del paralelogramo. Además, hemos decidido mostrar dos diferentes perspectivas del mismo objeto para que puedas visualizar mejor la situación. Asimismo, los triángulos internos se han mostrado a un lado como proyecciones en un plano. Nótese que todos los triángulos tienen como hipotenusa la distancia d entre los puntos P_1 y P_2. Utilizando trigonometría elemental escribimos los tres cosenos directores como:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

Esto se debe a que las coordenadas de x', y' y z' son precisamente x_2, y_2 y z_2, respectivamente. Tal vez te sea de ayuda revisar la Actividad 2 para convencerte de que en efecto estas coordenadas coinciden por ser un paralelogramo. Si la dirección del segmento o de la recta es la contraria a la discutida anteriormente, entonces se invierte el orden de resta de las coordenadas y por tanto el coseno director es negativo (*d* es definida positiva), como ya habíamos mencionado antes.

Si elevamos al cuadrado cada uno de los cosenos directores y los sumamos, el resultado es siempre la unidad. Esto podemos verificarlo explícitamente:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{d^2}$$

recordando que la definición de *d* es

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

obtenemos el resultado deseado

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Esta relación que hemos derivado es válida para cualquier recta y, además, dados dos cosenos directores podemos conocer el tercero:

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$$

De nueva cuenta comentamos que el coseno director puede ser negativo dependiendo de la dirección de la recta y es por ello que la raíz cuadrada tiene ambos signos. Adicionalmente, notamos de esta misma relación que no todos los cosenos directores pueden ser cero simultáneamente.

Para finalizar esta sección, daremos un ejemplo numérico.

Ejemplo. Encuentra los cosenos directores del segmento determinado por los puntos (1, 2, –1) y (–2, 1, 4).

Solución. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(1 - [-2])^2 + (2 - 1)^2 + (-1 - 4)^2}$$

$$d = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}.$$

Entonces calculamos los cosenos de cada ángulo:

$$\cos\alpha = \frac{(1-[-2])}{\sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}}$$
$$\cos\beta = \frac{(2-1)}{\sqrt{35}} = \frac{1}{\sqrt{35}}$$
$$\cos\gamma = \frac{(-1-4)}{\sqrt{35}} = -\frac{5}{\sqrt{35}}$$

Los puntos y el segmento se ilustran en la Figura 2.15:

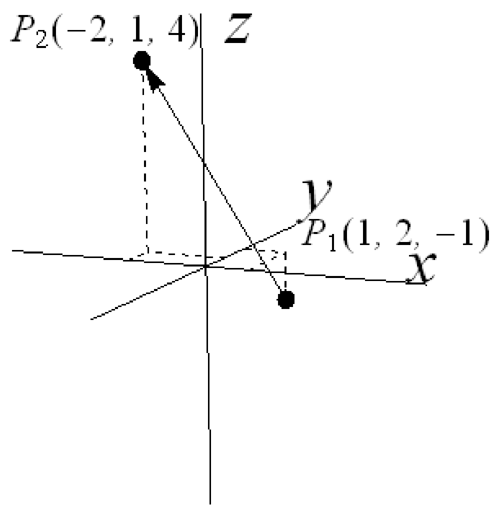


Figura 12. Segmento dirigido del ejemplo.

1.1.6. Números directores

Se conoce como números directores a una terna de números reales tal que mantiene la proporción con los cosenos directores, es decir $\dfrac{a}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{\cos\beta} = \dfrac{c}{\cos\gamma}$.

Si tomamos esta igualdad dos a dos:

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta}$$
$$\frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma}$$

y sustituimos las fórmulas de los cosenos directores

$$\frac{\frac{a}{x_2 - x_1}}{d} = \frac{\frac{b}{y_2 - y_1}}{d}$$
$$\frac{\frac{b}{y_2 - y_1}}{d} = \frac{\frac{c}{z_2 - z_1}}{d}$$

por comparación (identidad), ya que *d* se elimina en todas las igualdades, podemos deducir que unos posibles números directores estarán dados por:

$$a = x_2 - x_1, b = y_2 - y_1, c = z_2 - z_1.$$

En general, también los múltiplos de estos números directores serán a su vez válidos números directores. Sea un número real $k \neq 0$, entonces *ka*, *kb* y *kc* también son números directores del segmento de recta. Los números directores se acostumbran representar como una terna encerrada entre corchetes $[a, b, c]$ para diferenciarlos de los puntos ordinarios que se encierran entre paréntesis.

Ahora bien, si conocemos los tres números directores es posible encontrar los cosenos directores a partir de éstos. Supongamos números directores *a'*, *b'* y *c'*, estos números pueden ser un múltiplo de la diferencia entre el punto inicial y final del segmento de recta que estamos estudiando:

$$a' = n(x_2 - x_1), b' = n(y_2 - y_1), c' = n(z_2 - z_1)$$

donde *n* es cualquier número real diferente de cero. La hipotenusa de este triángulo estará dada por

$$d = n\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Por lo tanto, el triángulo que forman (ver Figura 12. Segmento dirigido del ejemplo) será un triángulo más grande o más pequeño del que deseamos conocer. Sin embargo, para determinar los cosenos directores esto no será relevante, ya que ambos triángulos serán similares al que queremos estudiar. Consecuentemente, sus razones se conservarán y como la función trigonométrica coseno es precisamente la razón entre el cateto y la hipotenusa que definen ese ángulo, el escalamiento tendrá un efecto nulo. Matemáticamente,

$$\cos\alpha=\frac{n(x_2-x_1)}{n\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}=\frac{(x_2-x_1)}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}$$

pero

$$\cos\alpha=\frac{n(x_2-x_1)}{\sqrt{n^2(x_1-x_2)^2+n^2(y_1-y_2)^2+n^2(z_1-z_2)^2}}=\frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

El resultado importante deducido acá es que dados los números directores $[a,b,c]$ sus cosenos directores serán

$$\cos\alpha=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\cos\beta=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\cos\gamma=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Para concluir esta sección veremos un ejemplo numérico.

Ejemplo. Los números directores de una recta son $[1,-2,-1]$. Hallar sus cosenos directores de tal manera que el ángulo γ sea agudo.

Solución. Aplicando las fórmulas:

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$
$$\cos\beta=\pm\frac{-2}{\sqrt{6}}=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}$$
$$\cos\gamma=\pm\frac{-1}{\sqrt{6}}=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$$

La restricción de que el ángulo γ sea agudo se traduce en que debe ser positivo según la definición de los cosenos directores, por lo tanto, tomamos el signo de abajo en cada coseno y

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{6}},\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{6}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

1.1.7. Ecuación de la recta

Dada nuestra experiencia adquirida previamente en los capítulos anteriores, el espacio en coordenadas rectangulares uno pensaría que la ecuación de una recta en el espacio es de la forma $ax+by+cz=d$. Sin embargo, en esta ocasión la extensión de la ecuación de la recta a tres dimensiones está equivocada, ya que la forma anterior describe un plano en el espacio tridimensional y no una recta.

Las distintas fórmulas y relaciones que hemos derivado hasta este momento nos permitirán encontrar la ecuación de la recta de una forma natural sin tener que definirla como la intersección de dos planos como usualmente hacen algunos autores. A nuestro parecer el lugar geométrico que describe una recta es más simple que el lugar geométrico de un plano. Es por eso que primero analizaremos la recta, la cual definimos como sigue.

> **Definición**. Una recta es el lugar geométrico tal que los números directores de cualquier segmento de éste son iguales o proporcionales a los de cualquier otro segmento.

En este caso, se sabe que en el plano cartesiano por dos puntos dados solo pasa una recta y una sola. Este teorema también es válido en el espacio y de acuerdo a nuestra definición debe de cumplirse que para un punto conocido en la recta P_1 (x_1, y_1, z_1) y otro punto desconocido P (x, y, z) pero que se sabe que está en la recta, se satisface la siguiente condición:

$$x-x_1=ta, y-y_1=tb, z-z_1=tc$$

donde $[a,b,c]$ son los números directores de la recta y t es un número real diferente de cero. Estas tres igualdades conforman juntas la ecuación de la recta en su forma paramétrica. En el caso de que todos los números directores sean distintos de cero, se acostumbra escribir la ecuación de la recta como:

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}.$$

Siendo esta forma de la ecuación conocida como ecuación de la recta simétrica. Esta ecuación también puede expresarse en términos de los cosenos directores si se conocen los ángulos α, β, y γ, como sigue

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma},$$

siempre y cuando todos los cosenos directores sean diferentes de cero.

Por lo aprendido previamente sabemos que hallar los números directores a partir de dos puntos del segmento o de la recta, entonces si conocemos dos puntos P_1 (x_1, y_1, z_1) y P_2 (x_2, y_2, z_2) sobre la recta sus ecuaciones paramétricas serán:

$$x-x_1=t\left(x_2-x_1\right), y-y_1=t\left(y_2-y_1\right), z-z_1=t\left(z_2-z_1\right)$$

y la forma simétrica estará dada por

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

siempre y cuando $x_2 \neq x_1, y_2 \neq y_1, z_2 \neq z_1$.

Ejemplo. Calcula la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos (1, 2, 3) y (1, 5, 7).

Solución. Podemos proceder por pasos y calcular primero los números directores o usar la fórmula dada donde ya se conocen dos puntos de la recta. Calculemos primero los números directores: a = 0, b = –3 y c = –4. Entonces la ecuación de la recta estará dada por:

$$x-1=t(0), y-2=-3t, z-3=-4t,$$

o bien

$$x=1, y=-3t+2, z=-4t+3.$$

Entonces, al ir asignando valores al parámetro t iremos obteniendo valores para cada una de las coordenadas y de esta forma graficaremos la recta. Nota que esta recta no puede ser descrita en forma simétrica, ya que uno de sus números directores (a) es cero.

Ecuación vectorial de la recta

Ecuaciones paramétricas de la recta

Rectas y planos en R3

1.1.8. Lugares geométricos en el espacio

Como vimos en Geometría analítica I, en general, un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen una o más condiciones. Sin embargo, como ya hemos mencionado, en geometría analítica nos interesa estudiar dos tipos de problemas:

1. Dada una ecuación, interpretarla geométricamente, es decir, construir su gráfica.
2. Dada una figura geométrica, o una condición que deben cumplir sus puntos, determinar su ecuación.

En este sentido, definimos al conjunto de puntos, y sólo los puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación o una condición dada, es la ***gráfica de la ecuación*** o su ***lugar geométrico***. Puedes ver ejemplos en el siguiente video: Lugar geométrico.

Cuando se nos presenta un enunciado con la intención de encontrar el lugar geométrico, es una buena estrategia realizar un diagrama de la situación, primero de un caso particular, y después pensar en la generalización.

Como seguramente ya has descubierto, el lugar geométrico que se forma corresponde a dos rectas paralelas que se encuentran a N unidades de distancia de la recta de referencia.

En otros casos, el lugar geométrico nos permite definir de una nueva manera objetos ya conocidos. Veamos un ejemplo concreto de lugar geométrico.

1.1.9. Gráficas de lugares geométricos en el espacio

En esta sección veremos la representación geométrica de lugares geométricos expresados como conjuntos, que en realidad son subconjuntos del producto cartesiano.

Para recordar observa el video Algebra 9 - Cartesian Products, Ordered Pairs and Triples (***Producto Cartesiano, pares y tercias ordenados***).

Como viste en este video, el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el espacio cartesiano y es un conjunto en sí, por lo que cualquier figura contenida en el espacio cartesiano es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (o de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Como recordarás, los conjuntos pueden expresarse de forma implícita, por ejemplo $A = \{(x, y, z)|x < 3\}$ es el conjunto de puntos cuya abscisa es menor a 3.

Podemos definir la gráfica de una relación por medio del producto cartesiano:

$$\boxed{\mathcal{G}(R) = \{(a, b, R(a, b))|R\ es\ una\ relación\}}$$

Como puedes ver, la gráfica de una relación también es un subconjunto del plano cartesiano, en particular, la gráfica de una función lo es. De hecho, la gráfica está compuesta de las tercias ordenadas cuyo par ordenado formado por la abscisa y la ordenada está en el dominio de la relación, y la cota está en la imagen de la relación. En el video Algebra 18 - Multivariable Functions se explican estos conceptos para un tipo particular de relación, las funciones.

1.1.10. Simetrías

Como vimos en Geometría analítica I, estudiar las simetrías de una figura es muy conveniente, ya que como en geometría analítica la consideramos como la gráfica de una ecuación, saber si una figura es simétrica respecto a un punto, respecto a una recta (o eje), o respecto a un plano puede facilitar enormemente los cálculos.

En el video Simetrías axiales sobre figuras imposibles, te puedes dar una buena idea de qué es la simetría con respecto a un eje, pero ¿cómo se ve una figura tridimensional que tiene una simetría axial? A continuación, daremos una definición basada en las propiedades geométricas de los puntos simétricos, y no en el concepto de distancia. Las primeras dos son idénticas a las definiciones para puntos en el plano.

Una figura A *es simétrica respecto a un punto* O si para cada punto P en A, el punto P' tal que P', O, P son colineales y O, el punto medio del segmento PP', también está en A. Se dice entonces que *la figura* A *tiene simetría central* y que O *es un centro de simetría de* A.

Una figura A *es simétrica respecto a una recta* $\mathcal{L}$ si para cada punto Q en A, el punto Q' tal que R es la perpendicular por el punto medio de QQ' también está en A. Se dice entonces que *la figura* A *tiene simetría axial* y que $\mathcal{L}$ *es un eje de simetría de* A.

Una figura A *es simétrica respecto a un plano* P si para cada punto Q en A, el punto Q' tal que $\wp$ es perpendicular al segmento QQ' en su punto medio también está en A. Se dice entonces $\wp$ es un plano de simetría de A.

Una figura en el espacio cartesiano es un conjunto de puntos. Pero ¿cómo son las coordenadas de los puntos simétricos? Veamos algunos casos importantes:

Una figura $A \subset \mathbb{R}^2$ es *simétrica respecto al origen* O si para todo punto $P(x, y, z) \in A$ ($P(x, y, z)$ pertenece a la figura), el punto $P_0(-x, -y, -z) \in A$ (el punto $P_0(-x, -y, -z)$ también pertenece al conjunto A).

Una figura $A \subset \mathbb{R}^2$ es *simétrica respecto al eje* X si para cada punto $P(x, y, z) \in A$, el punto $P_X(x, -y, -z) \in A$.

Una figura $A \subset \mathbb{R}^2$ es *simétrica respecto al eje* Y si para cada punto $P(x, y, z) \in A$, el punto $P_Y(-x, y, -z) \in A$.

Una figura $A \subset \mathbb{R}^2$ es *simétrica respecto al eje* Z si para cada punto $P(x, y, z) \in A$, el punto $P_Z(-x, -y, z) \in A$.

Una figura $A \subset \mathbb{R}^2$ es *simétrica respecto al plano* XY si para cada punto $P(x, y, z) \in A$, el punto $P_{XY}(x, y, -z) \in A$.

Una figura $A \subset \mathbb{R}^2$ es *simétrica respecto al plano* YZ si para cada punto $P(x, y, z) \in A$, el punto $P_{YZ}(-x, y, z) \in A$.

Una figura $A \subset \mathbb{R}^2$ es *simétrica respecto al eje* ZX si para cada punto $P(x, y, z) \in A$, el punto $P_{ZX}(x, -y, z) \in A$.

Observa los cambios de signo en las definiciones anteriores.

1.1.11. Planos en $\mathbb{R}^3$

Un plano puede ser considerado como un conjunto infinito de puntos formando una superficie plana, extendiéndose infinitamente en todas direcciones.

Un plano tiene longitud infinita, ancho infinito y una altura (o grosor) igual a cero.

Cuando trabajamos en un espacio euclidiano de dos dimensiones, usamos la palabra plano, para referirnos a todo el espacio. Muchas tareas fundamentales en geometría, trigonometría y gráficas son realizadas en un espacio de dos dimensiones, en otras palabras, en un plano.

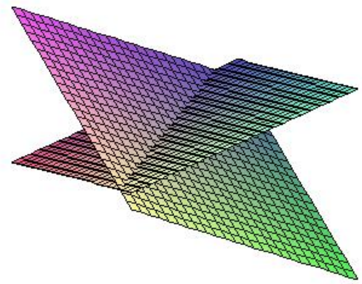


Figura 13. Dos planos intersectados en un espacio de tres dimensiones.

En un espacio euclidiano, un plano es una superficie tal que, dados dos puntos cualesquiera sobre la superficie, la superficie también contiene una única línea recta que pasa a través de esos puntos.

Un plano puede ser únicamente determinado por cualquiera de los siguientes objetos:

- Tres puntos no colineales, es decir, no sobre la misma línea.
- A una línea y un punto no sobre la línea.
- Dos líneas con un punto de intersección.
- Dos líneas paralelas.

En el video Ecuaciones del plano en el espacio podrás ver la deducción de tres ecuaciones del plano: ecuación vectorial, ecuación paramétrica y ecuación general o implícita. Para esto te sugerimos ver al menos Vectores en el espacio: elementos y operaciones de la lista de reproducción Geometría en el espacio: vectores, rectas, planos, posiciones relativas y propiedades.

Una notación de la forma vectorial de la ecuación del plano es

$$\wp_{P_0,\bar{u},\bar{v}} = \{P \in \mathbb{R}^3 | P = P_0 + \lambda\bar{u} + \mu\bar{v}\}$$

donde $\bar{u},\ \bar{v}\ \neq 0, \bar{u},\ \bar{v}$ linealmente independientes, y $\lambda,\ \mu$ cualquier número real.

1.2. Ecuación del plano en su forma general

Un plano en tres dimensiones tiene la ecuación general:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

donde a, b y c son elementos de los números reales y al menos unos de ellos diferente de cero ($a,b,c,d \in \Re$). Y cumple lo siguiente:

1) Si *d*=0 entonces el plano $ax + by + cz = 0$ pasa por el origen.

2) Si *c*=0 entonces el plano $ax + by + d = 0$ es paralelo al eje *z.*

3) Si *b*=0 entonces el plano $ax + cz + d = 0$ es paralelo al eje *y*.

4) Si *a*=0 entonces el plano $by + cz + d = 0$ es paralelo al eje *x.*

5) Si *c=b=0* entonces el plano $cx + d = 0$ es paralelo al plano *yz* (ver la figura b); esto es, perpendicular al eje *x*, como se muestra en la Figura 3.2.

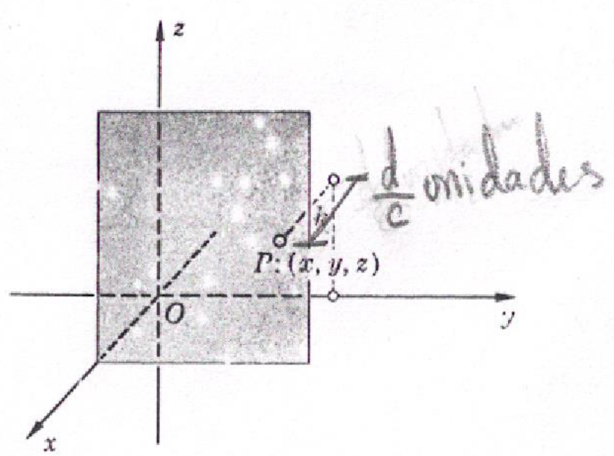


Figura 14. Plano $cx+d=0$ *es paralelo al plano yz*

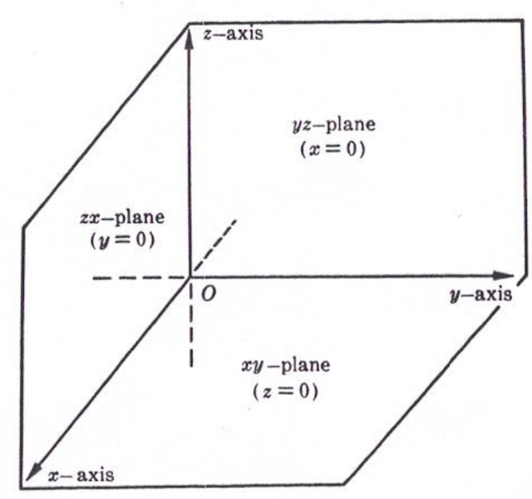


Figura 15. Representación en el plano

Si $d \neq 0$, es útil pensar que el plano es una función de *z* que depende de *x* y *y*. Entonces, la ecuación general de un plano la podemos expresar como:

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - d$$

Ejemplo 1. Grafica el plano $x + 3y + 2z = 6$. Una manera sencilla es encontrar los puntos de intersección con los ejes *x, y* y *z*. Estos tres puntos determinan el plano que nos permiten trazar las rectas de intersección con los planos coordenados. Para encontrar la intersección con el eje de las *z*, hagamos *x*=*y*=0 y despejamos a *z*, obteniendo *z*=3. Así, el punto de intersección con el eje de las x es (0, 0, 3). De manera similar, si *x*=*z*=0, *y*=2 y si *y*=*z*=0, *x*=6, obtenemos los puntos de intersección con los ejes *y* y *x*, (0, 2, 0) y (6, 0, 0). En seguida unimos estos tres puntos con rectas y matizamos el triángulo formado, como se muestra en la Figura 17, Por supuesto, no podemos graficar el plano completamente porque se extiende indefinidamente.

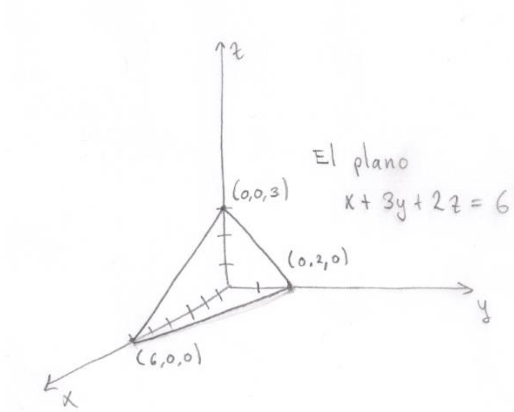


Figura 16. Grafica

Para tener una visualización mejor de un plano, podemos hacer uso de un software matemático. Durante el desarrollo de esta unidad haremos uso de MAPLE. A continuación se escribe la instrucción en Maple para graficar el plano del ejemplo anterior y su respectiva gráfica.

Instrucción:

>plot3d([3+(-x/2)-3*y/2],x=-5..5, y=-5..5, axes=boxed);

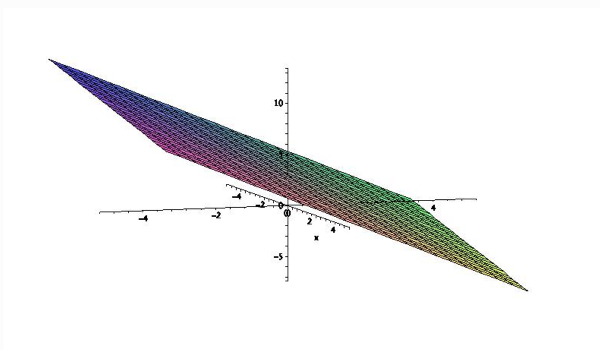


Figura 17. El plano $x+3y+2z=6$

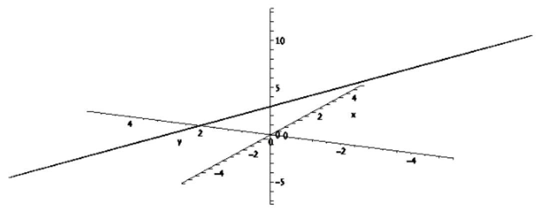


Figura 18. El plano $x+3y+2z=6$

Ejemplo 2. Dibuja esquemáticamente la gráfica de la ecuación *z*=5.

Solución. La gráfica de una ecuación es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. La gráfica es un plano paralelo al plano *xy* y cinco unidades hacia arriba de éste. Así, en la siguiente figura, el plano cuya gráfica es la ecuación *z*=5 es indicado por un rectángulo debido a que no podemos graficar el plano completamente porque se extiende indefinidamente.

Instrucción:

plot3d([5],x=-7..7, y=-7..7, axes=boxed);

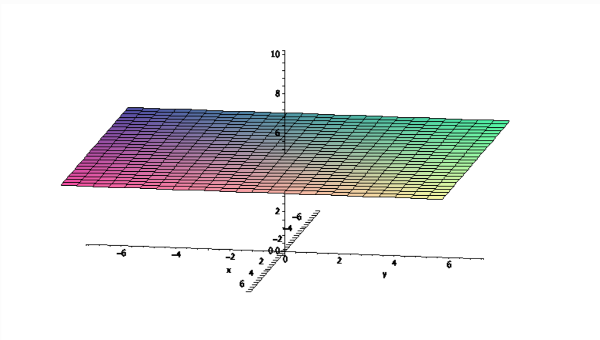


Figura 19. El plano z=5

1.3. Otras formas de la ecuación del plano

En este tema presentáremos la forma simétrica de la ecuación de un plano y determináremos la ecuación de un plano a través de tres puntos. Mediante la solución de ecuaciones lineales de tres variables y la forma simétrica de la ecuación de un plano es posible encontrar la ecuación general de un plano a partir de tres puntos.

1.4. Forma simétrica

Otra útil forma, siempre y cuando $d \neq 0$, es dividir la ecuación general $ax + by + cz = d$ por *d*.

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z = 1,$$

la cual la podemos escribir como:

$$\frac{x}{k_1} + \frac{y}{k_2} + \frac{z}{k_3} = 1$$

donde $k_1 = \frac{d}{a}, k_2 = \frac{d}{b}$ y $k_3 = \frac{d}{c}$ son los puntos de intersección con los ejes.

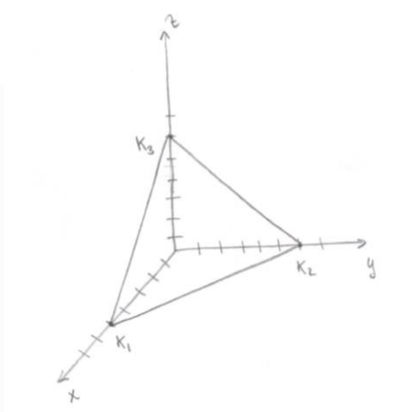


Figura 20.Puntos de intersección con los ejes

Ejemplo 1. Escribe la ecuación del plano $10\mathbf{x} - 6\mathbf{y} + 12\mathbf{z} = 120$ en su forma simétrica y encuentra los puntos de intersección con los ejes. Tenemos que escribir la ecuación de la forma

$$\frac{x}{k_1} + \frac{y}{k_2} + \frac{z}{k_3} = 1$$

Para esto dividimos por 120 toda la ecuación del plano

$$\frac{10\mathbf{x}}{120} - \frac{6\mathbf{y}}{120} + \frac{12\mathbf{z}}{120} = \frac{120}{120}$$

Simplificando,

$$\frac{\mathbf{x}}{12}-\frac{\mathbf{y}}{20}+\frac{\mathbf{z}}{10}=1$$

De la misma ecuación del plano en su forma simétrica, las intersecciones con los ejes son 12 (eje x), 12 (eje y) y 10 (eje z).

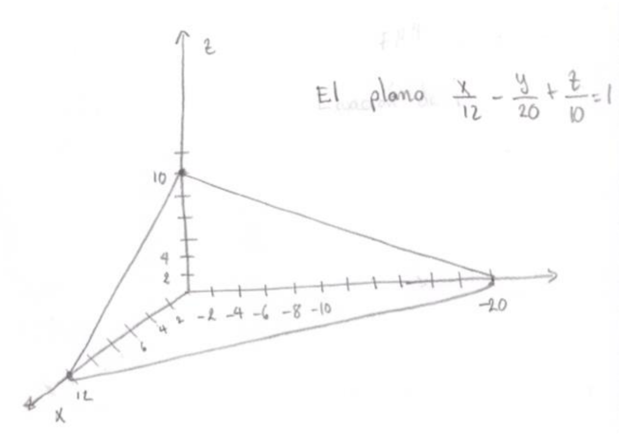


Figura 21. Intersección de ejes

1.5. Plano por tres puntos

Dados tres puntos que no son colineales, $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ y $P_3(x_3,y_3,z_3)$, podemos encontrar la ecuación general de un plano. Estos tres puntos determinarán un único plano P. Sabemos que cada punto contenido en el plano satisface, por la sustitución de sus coordenadas, la ecuación general de un plano. Reescribiendo la ecuación de un plano en su forma simétrica, tal que

$Ax+By+Cz=1$,

donde $A=\frac{1}{k_1}, B=\frac{1}{k_2}$ y $C=\frac{1}{k_3}$, y sustituyendo cada uno de los tres puntos contenidos en el plano, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$
\begin{aligned}
Ax_1 + By_1 + Cz_1 &= 1 \\
Ax_2 + By_2 + Cz_2 &= 1 \\
Ax_3 + By_3 + Cz_3 &= 1,
\end{aligned}
$$

el cual puede ser resuelto por diferentes métodos y así encontrar la incógnitas A, B y C, las cuales determinan la ecuación del plano.

Ejemplo 1. Dados los puntos, $P_1(5,-1,2)$, $P_2(-1,4,-1)$ y $P_3(2,3,6)$, encontrar la ecuación del plano a través de estos tres puntos.

Sustituyendo los puntos en el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
Ax_1 + By_1 + Cz_1 &= 1 \\
Ax_2 + By_2 + Cz_2 &= 1 \\
Ax_3 + By_3 + Cz_3 &= 1
\end{aligned}
$$

obtenemos,

$$
\begin{aligned}
5A - B + 2C &= 1 \qquad (1 \\
-A + 4B - C &= 1 \qquad (2 \\
2A + 3B + 6C &= 1 \qquad (3
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema, multiplicamos la ecuación 2 por -5 y la restamos a la ecuación 1, esto es,

$$
\begin{aligned}
5A - B + 2C &= 1 \\
-5A + 20B - 5C &= 5 \\
\hline
19B - 3C &= 6 \quad , \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ahora multiplicando la ecuación 2 por 2 y restándola a la ecuación 3,

$$
\begin{aligned}
2A + 3B + 6C &= 1 \\
-2A + 4B - 1C &= 5 \\
\hline
11B + 4C &= 3 \quad . \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Usando los dos resultados anteriores y resolviendo el nuevo sistema (ecuaciones 4 y 5), pero ahora de dos incógnitas

$$
\begin{aligned}
76A - 12B &= 24 \\
33B + 12C &= 9
\end{aligned}
\qquad \Rightarrow \qquad
\begin{aligned}
76A - 12B &= 24 \\
33B + 12C &= 9 \\
109B &= 33
\end{aligned}
$$

Con lo que obtenemos el valor de la incógnita B

$$B = \frac{33}{109}$$

Mirando las ecuaciones anteriores y sustituyendo el valor de B en la ecuación 5, encontramos el valor de C,

$$11(\frac{33}{109}) + 4C = 3 \quad \Rightarrow \quad 4C = \frac{327-363}{109} \quad \Rightarrow C = -\frac{9}{109}$$

Para encontrar el valor de A, sustituimos el valor de B y C, en la ecuación 2,

$$-A + 4B - C = 1 \quad \Rightarrow \quad -A + \frac{132}{109} - \left(-\frac{9}{109}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{A} = \frac{32}{109}$$

Entonces la ecuación del plano es:

$$\frac{32}{109}x + \frac{33}{109}y + \frac{9}{109}z = 1$$

Finalmente, escribiendo la ecuación anterior en su forma general:

$$32x + 33y + 9z = 109$$

1.6. Posición relativa entre dos planos

Sean dos planos, P_1 y P_2, dados por su ecuación general

$$P_1 : \quad a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0$$
$$P_2 : \quad a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0$$

Considerándolos como un sistema lineal de dos ecuaciones,

$$a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0$$

1) Si el sistema anterior es inconsistente (el sistema no tiene soluciones), entonces los planos son paralelos, y se tiene que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

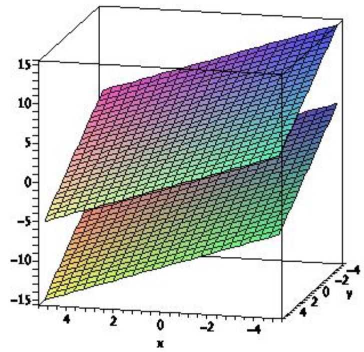


Figura 22. Ejemplo de dos planos paralelos.

2) Si el sistema es consistente y las ecuaciones son proporcionales una de la otra, entonces el plano P_1 es el mismo que P_2.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

3) Si el sistema es consiste y el rango de su matriz de coeficientes es igual a 2, entonces los planos P_1 y P_2 están intersectándose.

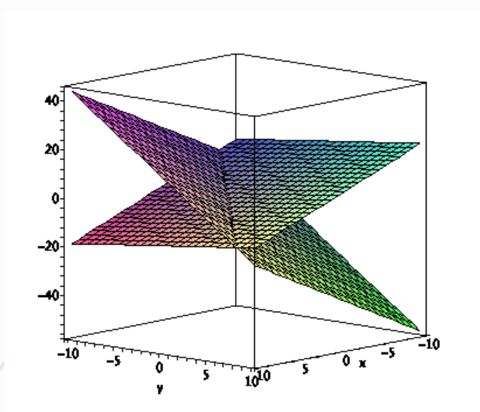


Figura 23. Ejemplo de dos planos intersectados.

4) Los planos P_1 y P_2 son perpendiculares cuando se verifica que:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 = 0$$

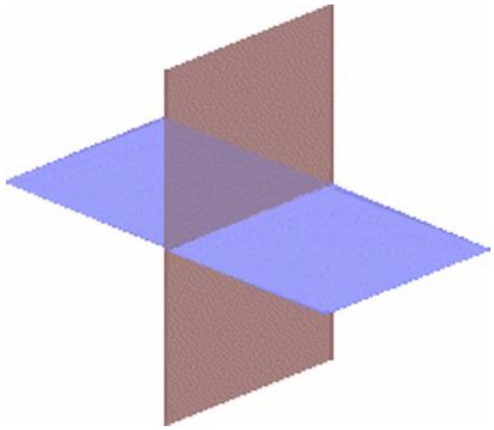


Figura 24. planos P1 y P2

Ejemplo 1. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto (2,-1,5) y es paralelo al plano

$\mathbf{x} - 3\mathbf{y} + \mathbf{z} = 0$

Solución. La ecuación del plano pedido es de la forma $\mathbf{x} - 3\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{d}$. Para hallar d, se sustituyen las coordenadas (2,-1,5), en esta ecuación, ya que este punto pertenece al plano en cuestión.

Entonces, $2 - 3(-1) + 5 = \mathbf{d}$, de donde obtenemos que $\mathbf{d} = 8$. La ecuación pedida es

$\mathbf{x} - 3\mathbf{y} + \mathbf{z} = 8$.

Ejemplo 2. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto (1,0,-2) y es perpendicular a los planos

$2\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z} = 2$

$\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z} = 3$

Solución. La familia de planos que pasan por el punto (1,0,-2) es $\mathbf{a}(\mathbf{x}-1) + \mathbf{b}(\mathbf{y}-0) + \mathbf{c}(\mathbf{z}+2) = 0$.

Para que uno de estos planos sea perpendicular a los dos planos dados,

$2\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} = 0.$

$\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C} = 0$.

Resolviendo el sistema, $\mathbf{A} = -2\mathbf{B}$ y $\mathbf{C} = -3\mathbf{B}$.

La ecuación pedida es $-2\mathbf{B}(\mathbf{x}-1)+\mathbf{B}(\mathbf{y}-0)-3\mathbf{B}(\mathbf{z}+2)=0$, y dividiendo entre B, obtenemos que:

$2\mathbf{x}-\mathbf{y}+3\mathbf{z}=-4$.

1.7. Distancia entre dos planos

Sean dos planos, P_1 y P_2, dados por su ecuación general:

$$P_1: \quad a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$P_2: \quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

Para poder calcular la distancia entre los planos, necesitamos tomar un punto arbitrario $M(x_1,y_1,z_1)$ de uno de los planos, por ejemplo en el plano P_2. La distancia entre los planos P_1 y P_2 está dada por:

$$d=\frac{|a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}.$$

1.8. Ángulo entre planos

Si los planos están dados en su forma general,

$$P_1: \quad a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$P_2: \quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

el ángulo agudo θ, fomado por las rectas k y q, perpendiculares a los planos P_1 y P_2, respectivamente, (véase la siguiente figura) está dado por la siguiente expresión:

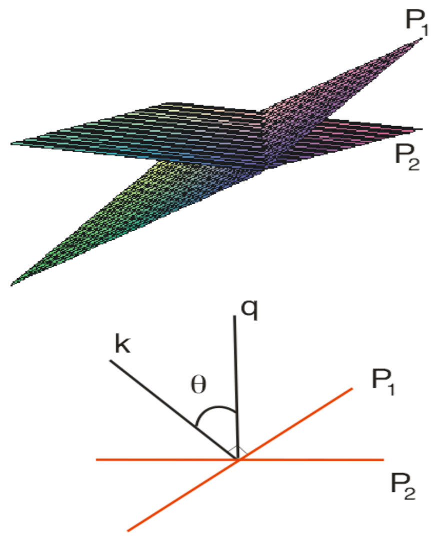


Figura 25. $\cos\theta = \dfrac{|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2|}{\sqrt{\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{b}_1^2 + \mathbf{c}_1^2}\sqrt{\mathbf{a}_2^2 + \mathbf{b}_2^2 + \mathbf{c}_2^2}}$

Ejemplo 1. Encuentra los puntos de intersección de los siguientes dos planos.

$$P_1 : \quad -2x + 3y + z = -6$$
$$P_2 : \quad 3x - y + 2z = 2$$

Solución. Como podemos observar, las ecuaciones de los planos no son proporcionales, por lo que los planos se encuentran intersectados. Lo anterior implica que obtendremos una infinidad de soluciones. Para resolver el sistema lineal

$$-2x + 3y + z = -6 \qquad (1$$
$$3x - y + 2z = 2 \qquad (2$$

despejamos la variable z de la ecuación 1 y la sustituimos en la ecuación 2,

$$z = 2x - 3y - 6 \qquad (3$$
$$7x - 7y - 14 = 0 \qquad (4$$

Tomando el cambio de variable z=t, obtenemos que

$$y = x - 2 = t - 2$$
$$z = 2x - 3(x-2) - 6 = -x = -t$$

Entonces, para cualquier $t \in \Re$ hay $x,y,z \in \Re$ tal que $x = t$, $y = t - 2$, y $z = -t$, satisfacen el sistema de ecuaciones. Esto implica que hay un número infinito de soluciones, las cuales forman una línea recta cuyos puntos satisfacen las ecuaciones paramétricas:

$$x = t$$
$$y = t - 2$$
$$z = -t$$

Ejemplo 2. Encuentra la distancia entre los siguientes dos planos paralelos.

$$P_1 : \quad 2x + 3y - 4z + 5 = 0$$
$$P_2 : \quad 4x + 6y + 8z - 2 = 0$$

Solución. Para encontrar la distancia entre los dos planos, debemos hallar un punto que esté contenido en uno de los planos, por ejemplo el punto M(1,1,-1) en el plano P_2. Entonces, la distancia del punto M al plano P_1 es

$$d = \frac{|a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1|}{\sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2}} = \frac{|2(1) + 3(1) - 4(-1) + 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{14}{\sqrt{29}}.$$

Ejemplo 3. Encuentra el ángulo de intersección de los siguientes dos planos.

$$P_1 : \quad 2x + 3y - 4z + 5 = 0$$
$$P_2 : \quad x + y + 2z - 3 = 0$$

El ángulo de intersección de estos dos planos está dado por

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2|}{\sqrt{\mathbf{a}_1{}^2 + \mathbf{b}_1{}^2 + \mathbf{c}_1{}^2}\sqrt{\mathbf{a}_2{}^2 + \mathbf{b}_2{}^2 + \mathbf{c}_2{}^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{|2(1) + 3(1) + (-4)(2)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (2)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{29}\sqrt{6}} = 0.22$$

despejando θ,

$$\theta = \cos^{-1}(0.22) = 77.29°$$

1.9. Forma normal de la ecuación del plano

La ecuación de un plano cuya distancia directa del origen es p y cuya normal tiene cosenos directores, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, y $\cos\gamma$, es

$$\mathbf{x}\cos\alpha+\mathbf{y}\cos\beta+\mathbf{z}\cos\gamma-\mathbf{p}=0.$$

donde α,β,γ son los ángulos de dirección de la perpendicular al plano de origen. La forma normal de la ecuación del plano $ax+by+cz-d=0$ es

$$\frac{\mathbf{ax}+\mathbf{by}+\mathbf{cz}+\mathbf{d}}{\pm\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2}}=0$$

Demostración. Denotamos por n a la línea que pasa por el origen y es normal al plano, como se muestra en la siguiente figura,

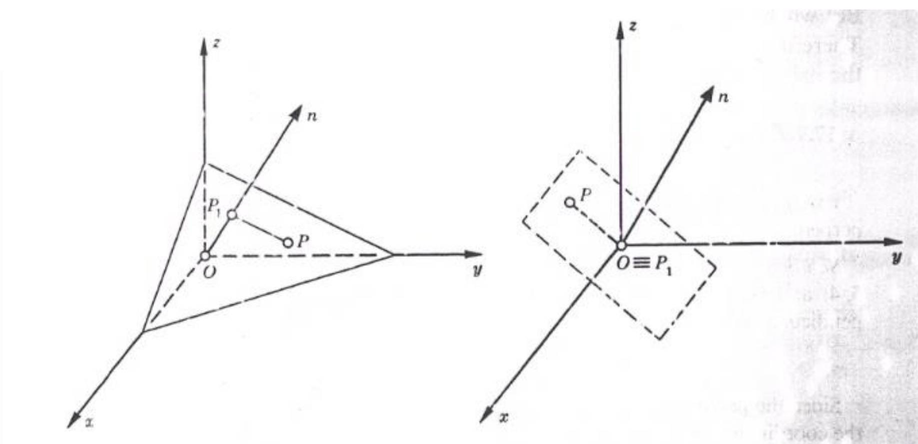


Figura 26. n a la línea que pasa por el origen

Sea $\mathbf{P}_1:(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1)$ el punto de intersección del plano y la normal n. Sea $\mathbf{P}:(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ un punto cualquiera. Entonces los números directores de P_1P son [$\mathbf{x}-\mathbf{x}_1,\mathbf{y}-\mathbf{y}_1,\mathbf{z}-\mathbf{z}_1$].

El punto P está sobre el plano si y solo si n y P_1P son perpendiculares, esto es, si y solo si

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\cos\alpha+(\mathbf{y}-\mathbf{y}_1)\cos\beta+(\mathbf{z}-\mathbf{z}_1)\cos\gamma=0$$

O

$$\mathbf{x}\cos\alpha+\mathbf{y}\cos\beta+\mathbf{z}\cos\gamma-(\mathbf{x}_1\cos\alpha+\mathbf{y}_1\cos\beta+\mathbf{z}_1\cos\gamma)=0 \qquad (1)$$

Si el plano no pasa a través del origen, P_1 es distinto del origen y

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\overline{OP_1}},\ \cos\beta = \frac{y_1}{\overline{OP_1}},\ \cos\gamma = \frac{z_1}{\overline{OP_1}}. \qquad (2)$$

Sustituyendo los valores anteriores en (1), tenemos que

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \frac{\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right)}{\overline{OP_1}} = 0$$

y como $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \overline{OP_1}$,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \overline{OP_1} = 0$$

Pero $\overline{OP_1} = p$, por tanto

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Esta es la forma normal de la ecuación de un plano.

Ejemplo 1. Halla la ecuación del plano definido por: $\alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 120^\circ, p = 5$.

Solución. Tenemos que encontrar los cosenos directores para encontrar la ecuación del plano en su forma normal de la forma:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

Para esto, $\cos\alpha = \cos 120^\circ = -1/2, \cos\beta = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}, \cos\gamma = \cos 120^\circ = -1/2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación del plano en su forma normal

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{2}z - 5 = 0$$

Multiplicando por -2 la anterior ecuación,

$$x - \sqrt{2}y + z + 10 = 0$$

Ejemplo 2. Encuentra la ecuación normal del plano que pasa por el punto (9, 0, -3) y es perpendicular a la línea que une los puntos (-1, 5, 4) y (2,-1,6).

Solución. De la demostración anterior, los cosenos directores de la línea que pasa a través de los puntos (-1, 5, 4) y (2,-1,6) son $[\,3/7, -6/7, 2/7\,]$. Así la ecuación normal de cualquier plano perpendicular a esta línea es

$$\frac{3}{7}\mathbf{x}-\frac{6}{7}\mathbf{y}+\frac{2}{7}\mathbf{z}-\mathbf{p}=0$$

Además, el plano perpendicular en el cual estamos interesados pasa a través del punto (9, 0, -3), y este último satisface la ecuación del plano. Esto es,

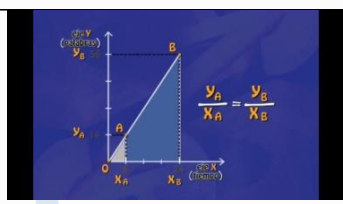
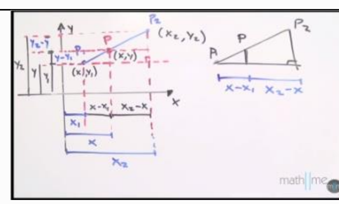
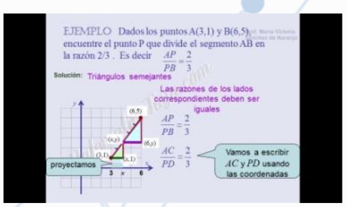
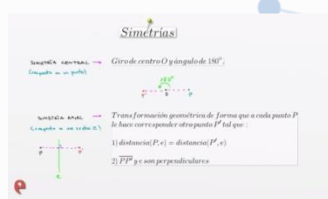
$$\frac{3}{7}(9)-\frac{6}{7}(0)+\frac{2}{7}(-3)-\mathbf{p}=0,$$

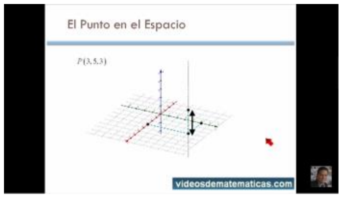
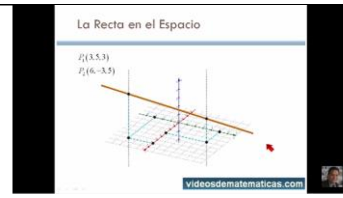
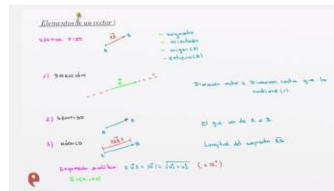
Del cual tenemos que d=3. Por tanto, la ecuación pedida es

$$\frac{3}{7}\mathbf{x}-\frac{6}{7}\mathbf{y}+\frac{2}{7}\mathbf{z}-3=0.$$

Aprende observando

En estos videos se muestran algunos conceptos como recordatorio de Geometría analítica I y también conceptos nuevos, como una opción más a los videos en el contenido de la unidad. Tomados de Matematicatuya (2011), math2me (2011), Pio virtual USB (2012), Tareasplus (2011), estudiia (2011). (Archivos de vídeo) recuperados de:

 **Proporción directa**	 **Razón que divide de un punto a un segmento (fórmula general-demostración).**
 **División de un segmento en una razón dada (ejemplo concreto).**	 **Simetrías en el plano. Tipos de simetrías**

 **El punto en el espacio**	 **La recta en el espacio**
 **Lugar geométrico**	 **Vectores en el plano**

El último video pertenece a la lista de reproducción Geometría en el plano: vectores, rectas y cónicas.

Aprende Haciendo

A continuación, te recomiendo revisar los siguientes recursos. Se trata de recursos interactivos hechos en GeoGebra.

GeoGebra. (2024). *Transformaciones geométricas*.

Puntos en el espacio

GeoGebra. (2024). *Recta en el espoacio.*

Recta en el espacio

GeoGebra. (2024). Plano definido por una recta y un punto

Plano definido por una recta y un punto

GeoGebra. (2024). Plano en el espacio

Plano en el espacio

Aprende leyendo

Cierre de la Unidad

En cuanto a la necesidad de establecer un sistema de referencia, además del potencial que brinda para resolver problemas del ámbito estrictamente matemático, podemos darnos cuenta de su importancia, por su presencia en nuestro entorno, como es el caso de la ubicación espacial, está presente en las guías que muestran los planos de la ciudad o en sistemas tan sofisticados como el sistema de posicionamiento global, mejor conocido como GPS, que ya está integrado en los dispositivos de comunicación móvil o de navegación de los automóviles. ¿Se te ocurren otros ejemplos?

Fuentes de consulta

Básica

- Fuller, W. y Tarwater, D. (1995). *Geometría analítica*. Addison-Wesley.
- Granville, W. (2003). *Trigonometría plana y esférica*. México: Limusa.
- Larson, R. (2008). *Cálculo y geometría analítica. 2*. Madrid: McGrawHill.
- Lehmann, C. (2008). *Geometría analítica*. México: Limusa.
- Lehmann, C. (2008). *Álgebra*. México: Limusa.
- Ramírez, A. (2004). *Geometría analítica. Una introducción a la geometría.* (2. ed.). México, Las prensas de ciencias.
- Swokowski, E. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning