Matemáticas

Geometría analítica II

3er Semestre

Unidad 2. Superficies cuádricas

Clave

05142314/06142314

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Presentación de la unidad

En la ciencia e ingeniería se involucran magnitudes físicas que dependen de una o más variables. En general, se representan ampliamente ecuaciones en un espacio de dos dimensiones o plano cartesiano. Por ejemplo, fuerza-distancia, corriente-voltaje, velocidad-tiempo, etc. En un espacio de dos dimensiones las ecuaciones dependen de una sola variable y sus gráficas pueden representarse en un plano. Pero en la realidad vivimos en un mundo de tres dimensiones, de hecho nos podemos desplazar en esas tres direcciones: izquierda-derecha, arriba-abajo y enfrente-atrás, y cualquier combinación de ellas. Los puntos en el espacio se representan por medio de alguna combinación de esas tres direcciones y las figuras en el espacio son representadas a través de una ecuación de tres variables. Estas ecuaciones son utilizadas en diversas aplicaciones, como programas de diseño de piezas industriales, arquitectura, películas animadas, etc. En el caso de la ciencia, por ejemplo, la presión de un gas depende tanto de su temperatura como de su volumen, etc. De hecho, muchas de las aplicaciones de las cónicas, en realidad son aplicaciones de las superficies cuadráticas pensadas como una extensión de las cónicas. En la sección 8 de este enlace puedes ver algunos ejemplos: Las cónicas y sus aplicaciones.

En el video Marc Kushner: Por qué los edificios del futuro se ajustarán a...usted puedes ver algunos ejemplos de superficies cuádricas en la arquitectura, aproximadamente entre los minutos 7:40 a 9:30. Y aquí puedes ver algunos otros Arquitetura de Frank Gehry.

Pensándolo bien, ¿en realidad sabemos que vivimos en un mundo de tres dimensiones? Mira este video para saber por qué tiene sentido hacerse esta pregunta y para saber la respuesta: ¿Qué es una dimensión? En 3D… en 2D… y en 1D.

En Geometría analítica I uno estudiamos a la recta como la figura más simple expresada por una ecuación, y se trata de una ecuación de primer grado con dos variables. Luego estudiamos las cónicas, que tienen una ecuación con dos variables pero es de segundo grado. De manera análoga, en esta asignatura estudiamos el plano en la unidad anterior, que tiene una ecuación lineal con tres variables, y en esta unidad estudiaremos las superficies, cuya ecuación es de segundo grado con tres variables.

Las superficies cuádricas también tienen una ecuación canónica que carece de términos mixtos xy, yz y zx, pues estos aparecen cuando los ejes de simetría no coinciden con los ejes coordenados. Obtendremos las ecuaciones canónicas de las superficies, haremos un análisis de las simetrías y veremos cómo podemos determinar a qué superficie cuadrática corresponde cierta ecuación cuadrática sin términos mixtos y de acuerdo con sus coeficientes.

Competencia específica

Utilizar las distintas formas de las ecuaciones y propiedades de una superficie para el modelado y resolución de un problema utilizando el sistema de coordenadas cartesianas en tres dimensiones mediante la solución analítica y su gráfica.

Logros de la unidad

- Utilizar ecuaciones de segundo grado para representar superficies.
- Utilizar el sistema de coordenadas esféricas y el de coordenadas cilíndricas para articular ecuaciones de lugares geométricos.
- Resolver problemas que involucren mostrar y demostrar conceptos relativos a las superficies cuádricas
- Resolver ejercicios y problemas relativos a sistemas de coordenadas esféricas y cilíndricas.

2.1. Cilindros

En la ecuación de un cilindro sólo intervienen dos variables o una. Esto quiere decir que la o las variables que no aparecen en la ecuación es libre y por lo tanto genera rectas paralelas al eje correspondiente a la o las variables faltantes. Por ejemplo, en el plano Cartesiano la ecuación $x = 1$ corresponde a una recta paralela al eje Y que cruza al eje X en el valor 1, pues todos sus puntos tienen coordenadas $(1, y)$, donde y puede tomar cualquier valor real. En el video Cilindros Cuadraticos - Superficies en 3D puedes ver tres ejemplos.

Un cilindro es una superficie compuesta por rectas que:

1. son paralelas a una recta dada en el espacio, cada una de las cuales es llamada ***generatriz*** *del cilindro*, y
2. contienen un punto de una curva llamada ***directriz*** *del cilindro*.

En geometría sólida *cilindro* se refiere a un *cilindro circular*, es decir que sus curvas directrices son círculos, pero en nuestra definición las curvas generatrices pueden ser cualquier curva. Entonces puede haber cilindros cuya ecuación no es cuadrática, como es el caso del tercer ejemplo del video. Cuando la curva es una cónica (o cónica) el cilindro es el tipo más simple de superficie cuádrica.

Cuando hacemos la gráfica de una ecuación muchas veces es conveniente tener en cuenta la curva que se genera al intersectar la superficie con planos paralelos a los planos coordenados. Estas curvas se llaman ***trazas*** o ***secciones transversales***.

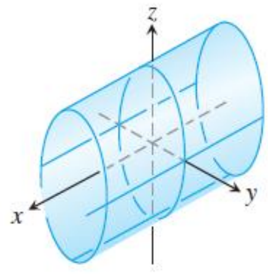


Figura 1. Trazos cilindro, tomado de Thomas, G, Finney R (2009) Cálculo de varias variables. México. Pearson Educacion. p. 700

Las trazas de este cilindro elíptico son: dos rectas en el plano xy, una elipse en el plano yz, y dos rectas en el plano xz.

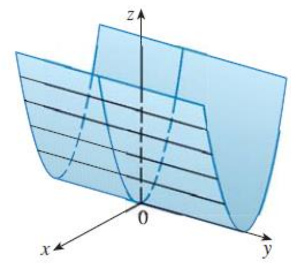


Figura 2. Trazos cilindro parabólico, tomado de Thomas, G, Finney R (2009) Cálculo de varias variables. México. Pearson Educacion. p. 805

Las trazas de este cilindro parabólico son: una recta en el plano xy (el eje Y), no intersecta al plano yz, y una parábola en el plano xz.

En este video puedes ver dos ejemplos de cómo se encuentran las trazas, de un plano y de un cilindro parabólico: [Usando trazas para graficar funciones en 3D].

Las ecuaciones de un cilindro son ecuaciones en dos variables, sabiendo que una tercera variable es libre.

2.1.1. Superficies de revolución

Otra forma de obtener superficies cuadráticas es rotar una cónica alrededor de uno de sus ejes de simetría. Sin embargo, como en el caso de los cilindros, no todas las curvas generan superficies con una ecuación cuadrática:

Figura 3. Superficie en revolución

Una ***superficie de revolución*** es generada al rotar una *curva plana,* llamada ***generatriz,*** alrededor de una recta contenida en el mismo plano que la curva, el ***eje de rotación***.

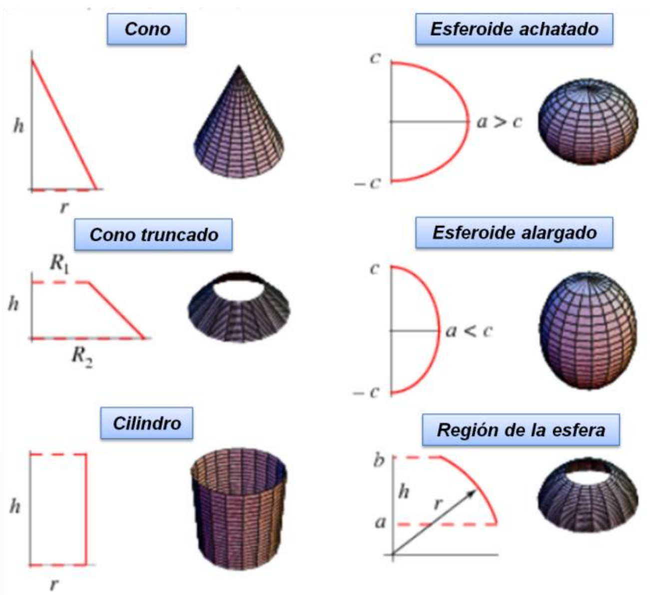


Figura 4. Líneas de superficies

Las distintas líneas en estas superficies que representan distintas posiciones de la curva generatriz al rotarla son ***meridianos*** de la superficie, y las circunferencias generadas al rotar la generatriz son ***paralelos*** de la superficie. Puedes ver claramente que la superficie de revolución es simétrico respecto a cualquier plano que pase por el eje de rotación (o *eje de revolución*).

El siguiente es un recurso interactivo en el que puedes ver algunos ejemplos y manipularlos: Superficies de Revolución. En este otro enlace encontrarás también un recurso interactivo que al manipularlo podrás visualizar claramente cómo se generan algunas de estas Superficies de revolución, así como visualizar sus paralelos, sus meridianos, su traza y la curva generada con la intersección de la superficie y algunos planos inclinados..

Nos interesa la ecuación de una superficie de revolución generada al hacer rotar una cónica alrededor de alguno de los ejes coordenados. Para obtener la ecuación de una superficie de revolución vamos a suponer que la curva generatriz $\mathcal{C}$ está contenida en el plano XZ con $x > 0$. Consideremos otro plano que contiene al eje Z. Digamos que el ángulo entre estos dos planos es θ. Llamemos $\mathcal{C}_\theta$ a la curva que se genera al rotar $\mathcal{C}$ alrededor del eje Z e intersectar a este plano, y X_θ a la recta en este plano perpendicular al eje Z.

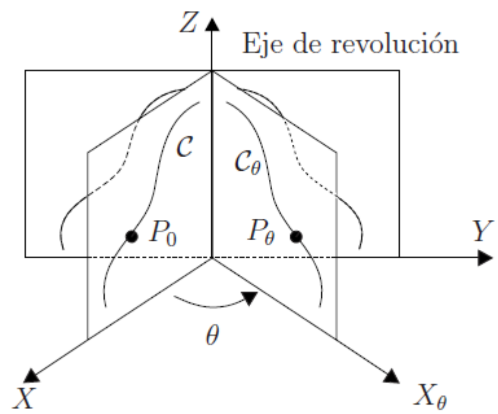


Figura 5. eje de revolución

El punto $P_\theta$que está en la curva $\mathcal{C}_\theta$, y en la circunferencia generada por la rotación del punto $P_0(x_0, 0, z_0)$, tiene coordenadas (x_θ, z) en el plano $X_\theta Z$, y su relación con las coordenadas originales es la siguiente:

$z_0 = z$ pues la altura respecto al plano XY no cambia,

$|x_0| = |x_\theta|$ pues la distancia la eje Z es fina.

Si consideramos que el punto $P_\theta$es un elemento de $\mathbb{R}^3$, entonces tiene coordenadas (x, y, z) y las dos primeras deben cumplir que $\sqrt{x^2 + y^2} = |x_\theta|$, porque dado que x_θ es la coordenada de $P_\theta$en el eje X_θ, $|x_\theta|$ es la distancia de x_θ al eje Z y también es el radio de la circunferencia generada por el punto $P \in \mathcal{C}$. Entonces para obtener la ecuación de la superficie de revolución, hay que hacer las siguientes sustituciones en la ecuación $f(x, z) = 0$ (una ecuación de dos variables; x y z), de la curva original: z permanece igual, pues como el eje Z es el eje de rotación, P conserva su altura z respecto al plano XY, y x va a una circunferencia de radio x_θ generada por P. Es decir:

$$z \mapsto z$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si el eje de rotación no es el eje Z, la variable correspondiente al eje de rotación permanece igual y la otra variable está en términos de la primera y la faltante:

Plano que contiene a $\mathcal{C}$	**Eje de rotación**	**Sustituciones**
XY	eje X	$x \mapsto x$ y $y \mapsto \sqrt{z^2+y^2}$
XY	eje Y	$y \mapsto y$ y $x \mapsto \sqrt{x^2+z^2}$
YZ	eje Y	$y \mapsto y$ y $z \mapsto \sqrt{z^2+x^2}$
YZ	eje Z	$z \mapsto z$ y $y \mapsto \sqrt{y^2+x^2}$

Cuando una cónica gira alrededor de una recta que no es un eje de simetría, la ecuación que se obtiene no es de segundo grado. Obtendremos la ecuación de algunas superficies cuádricas tomando cónicas en distintos planos coordenados usando las sustituciones anteriores.

2.1.2. Superficies cuádricas

Para introducir a las ***superficies cuádricas*** mira el video Nombres de las superficies cuádricas. Ahora veamos cómo son las Ecuaciones de las superficies cuádricas.

Elipsoide

Un ***elipsoide*** puede ser pensado como una superficie de revolución generada por un elipse. Veamos cuál sería su ecuación en este caso. Consideremos una elipse en posición canónica en el plano coordenado XZ; su ecuación es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, y que la rotamos alrededor del eje X. en este caso, aplicando la sustitución adecuada (la x permanece sin cambio). La ecuación resultante es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{\sqrt{z^2+y^2}}{b^2}=1$, que puede simplificarse como $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

Si consideramos como eje de revolución al eje Z hubiéramos usado la sustitución correspondiente donde z permanece sin cambio y obtenemos la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

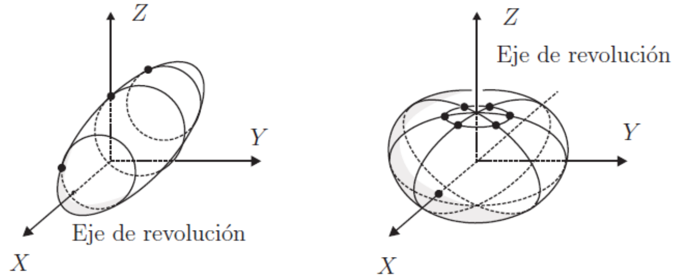


Figura 6. Ejes de revolución

Un caso particular es la ***Esfera***, pues en este caso $a = b$, por lo tanto la superficie está generada por un círculo y la ecuación se escribe de la forma $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Una *esfera* es un conjunto de puntos en el espacio cuya distancia a un punto fijo, llamado *centro* es una constante positiva llamada *radio*.

Denotamos al centro por C*(h, k, l)* y al radio por r. Entonces cualquier punto P(*x, y, z*) está sobre la esfera si y sólo si, $d(C, P) = r$, esto es, si

$$(x-h)^2 + (x-k)^2 + (x-l)^2 = r^2$$

Que es la *ecuación normal de la esfera*.

En los dos primeros casos dos de los denominadores son iguales, y las superficies correspondientes son *elipsoides de revolución*, cuyos meridianos son elipses y cuyos paralelos son círculos, para el primer caso, y viceversa, para el segundo caso. Pero en general una elipsoide tiene ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde a, b y c son números reales distintos. La elipsoide intersecta al eje x en los puntos $(\pm a, 0, 0)$, encontrado sustituyendo *y=0* y *z=0*. De manera similar, esta intersecta al eje y en $(0, \pm a, 0)$, y al eje Z en $(0, 0, \pm a)$.

La sección transversal de la elipsoide en el plano XY es la elipse,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Todas las secciones planas de la superficie paralela al plano $\boldsymbol{XY}$ son elipses si $a \neq b$ y como ya habíamos visto, círculos si $a = b$. Veamos cómo obtenemos las trazas y la gráfica de una elipsoide en [Superficies Cuadraticas - Elipsoide - Superficies en 3D].

Paraboloide

Tomemos ahora una *parábola* contenida en el plano XY con ecuación $x^2 = 4py$. Su eje de simetría es el eje Y, así es que usando la sustitución correspondiente para obtener su ecuación como una superficie de revolución, resulta que $x^2 + z^2 = 4py$. Si hacemos la gráfica de esta ecuación podrás ver que sus meridianos son parábolas y su paralelos son círculos.

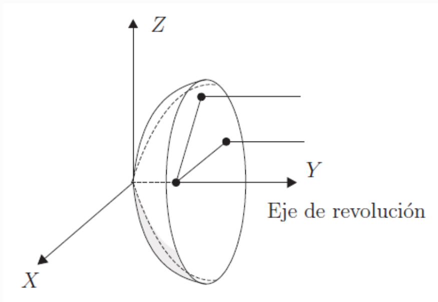


Figura 7. Ejes de revolución

En general, los paralelos de los paraboloides no son círculos, pues su ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=\frac{y}{c}$$

si $a \neq b$, cuando y toma distintos valores, esta es la ecuación de una elipse, por lo tanto en este caso, los meridianos serían elipses. Veamos cómo obtenemos la gráfica y las trazas de un paraboloide, así como el ejemplo del caso especial en el que $a = b$ en [Paraboloide elíptico - Superficies cuadraticas]. En este caso, la ecuación está dada considerando una curva generatriz en el plano YZ o en el plano XZ por lo que la ecuación en este caso es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$.

Hiperboloides

Hiperboloide de una hoja (o manto)

Consideremos ahora una *hipérbola* en el plano YZ centrada en el origen, con eje focal el eje Y y eje conjugado el eje Z. Entonces su ecuación es $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$. Si la hacemos girar alrededor del eje Z, usando la sustitución adecuada, la ecuación de la superficie es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$, pues la variable que se modifica es y. En este caso los meridianos son círculos y los paralelos son hipérbolas cuyas ramas coinciden una con la otra al hacer rotar la curva generatriz.

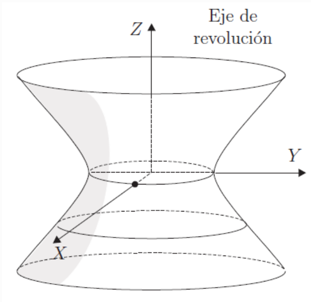


Figura 8. Eje de revolución

Nuevamente, dos de los denominadores son iguales, pero en general esto no es así y la ecuación de un *hiperboloide de una hoja* es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

donde a, b y c son números reales distintos. En este caso los meridianos son elipses y los paralelos nuevamente son hipérbolas. Veamos cómo obtenemos la gráfica y las trazas de un *hiperboloide de una hoja* y un ejemplo concreto en [Hiperboloide de una hoja - Superficies en 3D](#).

¿Existe el caso en el que consideramos al hiperboloide como una superficie de revolución pero los denominadores que son iguales son b^2 y no a^2? Veamos.

Hiperboloide de dos hojas (o mantos).

Consideremos nuevamente la *hipérbola* en el plano YZ centrada en el origen, con eje focal el eje Y y eje conjugado el eje Z, cuya ecuación sabemos que es $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$. Si ahora la hacemos girar alrededor del eje Y, usando la sustitución adecuada, la ecuación de la superficie es $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. En este caso las ramas de la hipérbola generan dos partes separadas del hiperboloide, pues no se cortan. De hecho son simétricas entre sí con respecto al plano XZ. Los meridianos de la superficie son hipérbolas y los paralelos son círculos.

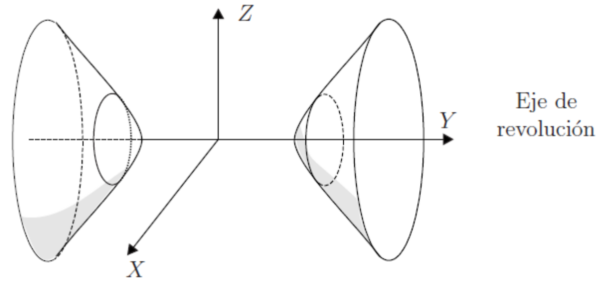


Figura 9. Ejes de revolución hiperboloide

Como podrás imaginar, esto no siempre ocurre. En general, la ecuación del *hiperboloide de dos hojas* es de la forma

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

donde a, b y c son números reales distintos. Veamos cómo obtenemos la gráfica y las trazas de un *hiperboloide de dos hojas*, un ejemplo concreto y los distintos casos dados por la colocación de los signos en la ecuación en [Hiperboloide de dos hojas - Superficies Cuadraticas].

Un caso singular del hiperboloide es el que se genera al hace rotar dos rectas que se cortan. ¿Qué superficie crees que se genere? Veamos un ejemplo concreto: $x^2 - y^2 = 0$ son dos rectas que se cortan en el plano XY. Podemos rotarlas respecto a cualquiera de los ejes X o Y porque las rectas son simétricas respecto a ambos.

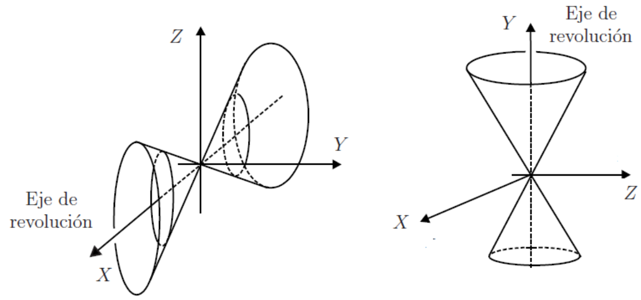


Figura 10. Eje de revolución hiperboloide de dos hojas

En ambos casos obtenemos conos con ecuaciones $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, si el eje de rotación es el eje Y; y $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$ si el eje de rotación es el eje X.

En la ecuación del caso general del hiperboloide de una hoja teníamos tres denominadores distintos y una de las trazas es una elipse. En el caso del cono, en general tenemos un *cono elíptico* y su ecuación tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

donde la variable a la derecha del signo igual puede variar de acuerdo al eje de simetría del cono.

Hay otras superficies que se generan al hacer rotar curvas singulares: un punto, dos rectas paralelas y una recta doble. Por ejemplo el punto $y^2 + z^2 = 0$ contenido en el plano YZ, las rectas paralelas $y^2 = 5$, y la recta doble $y^2 = 0$. ¿Qué superficies generan? Piensa en diferentes ejes de rotación.

Paraboloide hiperbólico

Esta superficie no puede ser obtenida como una superficie de revolución. Su ecuación es de la forma

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

con $c > 0$. Veamos cómo obtenemos la gráfica y las trazas de un *paraboloide hiperbólico*, un ejemplo concreto y los distintos casos dados por la colocación de los signos en la ecuación en [Paraboloide Hiperbólico - Superficies cuadráticas].

Ecuación de segundo grado

Todas las superficies que estudiamos están centradas en el origen, a excepción de la esfera. Cuando no es así y su centro tiene coordenadas $C(h,k,l)$, al desarrollar su ecuación correspondiente obtenemos una ecuación de segundo grado

$$\mathrm{A}x^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

¿ Cómo podemos determinar a qué superficie cuadrática corresponde cierta ecuación cuadrática sin términos mixtos y de acuerdo a sus coeficientes? Para esto es necesario analizar esta ecuación de segundo grado en tres variables.

Este análisis puedes encontrarlo en la unidad didáctica interactiva Clasificación de superficies cuadráticas, cuyo objetivo es "que el alumno reconozca de qué superficie se trata a partir de su ecuación general de segundo". Consta de cuatro secciones. "En la sección de *Inicio* se define la ecuación general de segundo grado y se dan algunos ejemplos. La sección de *Desarrollo* consta de tres escenas, en la primera escena se hace una síntesis del estudio de la ecuación cuadrática en dos variables y los criterios para determinar qué gráfica la representa, además puedes generar una curva que representa esta ecuación modificando sus parámetros. La segunda escena muestra el concepto de Cilindro, al que, en el caso de estar generado por la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables, puede aplicársele los criterios mencionados anteriormente para determinar qué tipo de cilindro es. Finalmente en la tercera escena el usuario puede manipular los parámetros de una ecuación general de segundo grado de una forma diagonalizada (sin términos cruzados), de tal manera que explore los diferentes casos posibles y pueda determinar, al menos de manera intuitiva las condiciones que cumplen los parámetros para hacer una clasificación de las superficies cuadráticas. Finalmente en el *Cierre* se hace un análisis de la ecuación general de segundo grado sin términos cruzados y se enumeran seis casos: elipsoide, cono elíptico, hiperboloide de una hoja, paraboloide elipsoidal, paraboloide hiperbólico y cilindro parabólico".

2.1.3. Coordenadas esféricas

Existen distintos tipos de sistemas de coordenadas. En un sistema de coordenadas tridimensional, además de las coordenadas cartesianas o rectangulares y de las coordenadas cilíndricas, usamos las Coordenadas esféricas.

Las coordenadas esféricas nos dan la localización de puntos en el espacio por medio de dos ángulos y de una distancia, como se muestra en la figura. La primera coordenada, $\rho = \overline{OP}$ es la distancia del punto *P* al origen, por lo que, al contrario de *r*, *ρ nunca es negativa*. La segunda coordenada, ϕ, es el ángulo que *OP* hace con el *eje* Z, es necesario que esté en el intervalo [0,π]. La tercera coordenada es el ángulo ϑ como se mide en las coordenadas polares, y está en el intervalo [0,2π].

En esta figura se ilustra la relación de las coordenadas esféricas *ρ*, ϕ y ϑ con *x*, *y*, *z* y *r*.

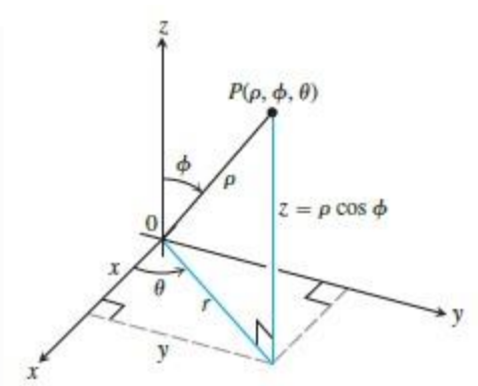


Figura 11. Coordenadas esféricas

En esta figura se ilustran las superficies obtenidas al hacer una de las coordenadas constante: esferas, conos y medios planos.

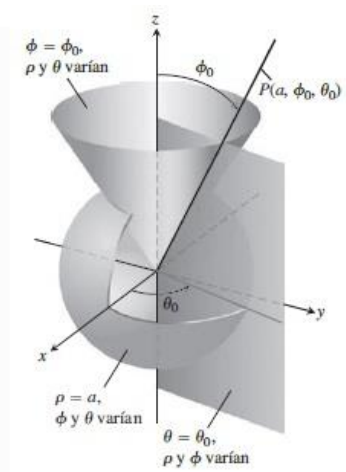


Figura 12. Superficies obtenidas de coordenadas constantes

Las ***coordenadas esféricas*** representan un punto *P* en el espacio con (*ρ*,ϕ,ϑ), donde:

- ρ es la distancia de P al origen.
- ϕ es el ángulo que el segmento OP hace con el eje Z positivo $(0 \leq \phi \leq \pi)$.
- r y θ son las coordenadas polares de la proyección del punto P sobre el plano XY $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

Si las coordenadas cartesianas de un punto P son (x, y, z), podemos hacer una conversión a coordenadas esféricas con las ecuaciones

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\phi = arc\cos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\theta = arc\tan\frac{y}{x}$$

Recíprocamente, si las coordenadas esféricas de un punto P son (ρ,ϕ,θ), entonces sus coordenadas cartesianas son

$$x = \rho\ sen\phi\ \cos\theta$$
$$y = \rho\ sen\phi\ \operatorname{sen}\theta$$
$$z = \rho\ cos\phi$$

En Video sobre coordenadas esféricas - ecuaciones de transformación - Video 2 puedes ver un ejemplo de conversión de ecuaciones en coordenadas cartesianas (o rectangulares, como las nombran en el video) a ecuaciones en coordenadas esféricas.

2.1.4. Coordenadas cilíndricas

Las Coordenadas cilíndricas son una extensión de las coordenadas polares a un espacio tridimensional. Se usan, entre otras cosas, para describir el movimiento de partículas en una superficie cilíndrica. Obtenemos coordenadas cilíndricas en el espacio combinando coordenadas polares en el *plano−xy* con el eje Z. Esto asigna a todo punto en el espacio una o más tercias de la forma (*r*,*ϑ*,*z*) como se muestra en la figura.

En esta figura se ilustran las coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio *P*(*r*,*ϑ*,*z*).

En esta figura se ilustran las superficies obtenidas al hacer constante una de las coordenadas: cilindros o planos.

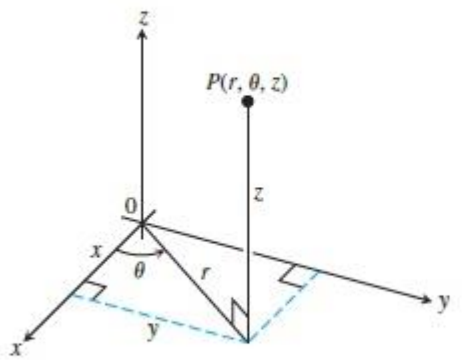


Figura 13. Coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio

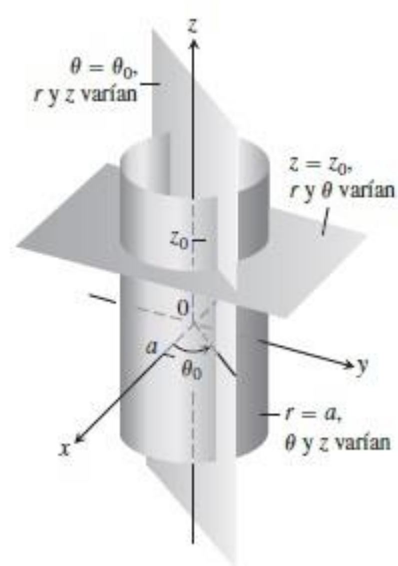


Figura 14. Superficies de constantes una de las coordenadas, cilindros o planos

Las ***coordenadas cilíndricas*** representan un punto *P* en el espacio con las tercias ordenadas (*r*,*ϑ*,*z*) en las cuales

- *r* y *ϑ* son coordenadas polares para la proyección vertical de *P* en el el plano XY.
- *z* es la coordenada cartesiana vertical.

Los valores de *x*, *y*, *r* y *ϑ* y las coordenadas cilíndricas están relacionadas con las coordenadas cartesianas por las ***ecuaciones***

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad\qquad \tan\theta = y/x$$

y con estas ecuaciones podemos convertir tanto coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas como coordenadas cilíndricas a cartesianas. En Video sobre coordenadas cilindricas -ejemplos- Video 2, puedes ver algunos ejemplos donde se convierten ecuaciones en coordenadas cartesianas a ecuaciones en coordenadas cilíndricas.

Las ecuaciones que relacionan las coordenadas esféricas con las coordenadas cartesianas y cilíndricas son:

$$r = \rho\, sen\phi, \qquad\qquad x = r\cos\theta = \rho\, sen\phi\, \cos\theta$$

$$z = \rho\, cos\phi, \qquad\qquad \mathrm{y} = \mathrm{r}\, sen\,\theta = \ \rho\, sen\phi\, \mathrm{sen}\,\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

En la sección de *Cierre* de la unidad didáctica interactiva Coordenadas cilíndricas y esféricas e muestran algunos ejemplos de superficies cuyas ecuaciones están dadas en coordenadas rectangulares o cilíndricas. El usuario podrá alterar las ecuaciones agregando algunos parámetros y visualizar su gráfica.

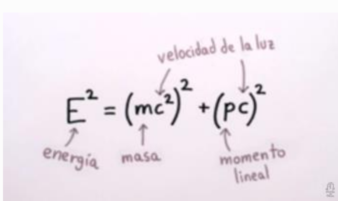
Para saber más

Aprende observando

En estos videos se muestran algunos conceptos como recordatorio de Geometría analítica I y también conceptos nuevos, como una opción más a los videos en el contenido de la unidad. Tomados de MinutoDeFisica (2013), EscolaCamins (2013), Prezi (2015), videomm1 (2009), Juan Alejandro Rosales Coronel (2009) y César Moisés Grillo Soliz (2007). (Archivos de vídeo y de presentación) recuperados de:

Por qué el Sistema Solar puede existir

No existe una cuarta dimensión

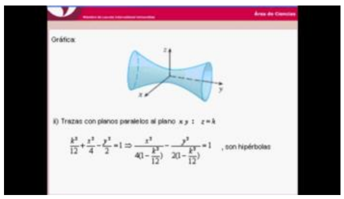


E=mc2 está incompleta

Taller de cónicas y cuádricas. Teoría

Aplicaciones del paraboloide

Hiperboloide



Video de la identificación gráfica y trazas de una superficie

Geometría analítica en el espacio (lista de reproducción)

En seguida verás enlaces a algunos canales de YouTube que pueden serte de utilidad para encontrar ejemplos de figuras en el espacio cartesiano, cómo obtener sus ecuaciones, sus gráficas y muchos otros conceptos de la geometría analítica en el espacio:

Academatica

Canal Mistercinco

KhanAcademyEspanol

estudiia

unicoos

Tareasplus

Aprende leyendo

Concepto.de. (n.d.). *Astronomía*. https://concepto.de/astronomia/

¿Qué es Astronomía?

Universidad de Zaragoza. (n.d.). *Curvas, superficies y grafos*. http://pcmap.unizar.es/~gasca/Uexpe/Curvas,%20superficies%20y%20grafos.pdf

Matemática Aplicada. (n.d.). *Documento sobre matemática aplicada* [PDF].

http://ww25.matematicaaplicada2.es/data/pdf/1380011862_224902192.pdf?subid1=20240731-1321-1228-aa3c-96ccb84421eb

ESPOL. (n.d.). *Las 6 superficies cuádricas* [PDF].

http://blog.espol.edu.ec/jeissoncastillo/files/2015/05/Las-6-Superficies-Cuadricas.pdf

Universidad de Valladolid. (n.d.). *Cuádricas* [Página web].

http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Cuadricas/marco_cuadricas.htm

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (n.d.). *Clairaut* [Página web].

https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Clairaut-1.asp.htm

Universidad Autónoma de Madrid. (n.d.). *Superficies mínimas*.

Fuentes de consulta

Básica

- De Stewart, J. (2008). *Cálculo de varias variables*. México. Cengage Learning
- Fuller, W. G. y Tarwater, D. (1995). *Geometría analítica*. Addison-Wesley.
- Granville, W. A. (2003).*Trigonometría plana y esférica*. México: Limusa.
- Larson, R. E. (2008). *Cálculo y geometría analítica,* vol. 2. Madrid: McGrawHill.
- Lehmann, C. H. (2008). *Álgebra*. México: Limusa.
- Lehmann, C. H. (2008). *Geometría analítica*. México: Limusa.
- Ramírez-Galarza, A. (2004). *Geometría analítica. Una introducción a la geometría.* (Segunda edición). México, Las prensas de ciencias.
- Swokowski, E. W. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning
- Thomas, G., Finney, R. (2009) *Cálculo de varias variables*. México. Pearson Educación.