Matemáticas

Probabilidad II

3er Semestre

Unidad 1: Vectores aleatorios

Clave

05142315/06142215

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Presentación

En probabilidad I se trabajaron experimentos aleatorios en los cuales se utilizaba solamente un factor descriptivo. Sin embargo, existen experimentos que involucran dos o más factores diferentes para su descripción, tales experimentos requieren de la asignación de un tipo diferente de variable aleatoria por cada factor. Por ejemplo, en el lanzamiento de dos monedas se podría asignar por cada lanzamiento una variable que describa su comportamiento. Entonces para el estudio de este tipo de experimentos, entre otros, es que se trabajan conceptos multivariados. En esta unidad didáctica se trabajarán con conceptos que involucran, en general, más de dos variables aleatorias, ya sea un número finito o una sucesión infinita de variables.

En esta unidad 1 trabajarás con distintas distribuciones para vectores aleatorios, principalmente con dos componentes, y sus aplicaciones teóricas y prácticas. La importancia del estudio de este tipo de elementos se debe a que en un experimento mientras más variables se consideren mejor será la interpretación de éste.

Por tal estudiarás la función y distribución de probabilidad conjunta (caso discreto y continuo), distribuciones marginales y distribuciones condicionales. Algunos momentos probabilísticos como la esperanza de un vector aleatorio, varianza (matriz), covarianza, y el coeficiente de correlación. También identificarás una desigualdad muy utilizada en la probabilidad, la desigualdad de Chébyshev. Finalmente, trabajarás con la función generadora de momentos, para lo cual recordarás conceptos de Probabilidad I.

Competencia específica

Aplica las propiedades de vectores aleatorios y convolución para la resolución de situaciones aleatorias con más de una variable mediante sus respectivas distribuciones.

Logros

- Relaciona propiedades de un vector aleatorio bivariado.
- Expresa simbólicamente las distribuciones conjuntas y marginales de probabilidad.
- Demuestra propiedades de la teoría de la probabilidad.
- Identifica distribuciones de suma de variables aleatorias independientes.

1.1. Distribuciones de probabilidad conjunta

En esta sección se estudiarán las distribuciones de probabilidad conjunta o multivariadas en las cuales intervienen dos o más variables aleatorias. Existirán definiciones que serán análogas a las trabajadas para una variable aleatoria estudiada en probabilidad I, sin embargo, también habrá nuevos conceptos.

1.1.1. Vectores aleatorios

Sean X y Y dos variables aleatorias (v.a.) definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se define el ***vector aleatorio bidimensional*** $\boldsymbol{X} = (X, Y)$. Este vector toma valores en $\mathbb{R}^2$ (espacio euclidiano de dimensión 2). En general se puede trabajar vectores con *n* v.a.

Definición: Dadas n variables aleatorias (v.a) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definidas en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, se define el ***vector aleatorio*** $\boldsymbol{n}$***-dimensional*** $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, el cual toma sus valores en $\mathbb{R}^n$ (espacio euclidiano de dimensión n).

En el caso $n = 1$ se tiene un vector ***unidimensional***, el cual es una variable aleatoria concepto ya conocido y trabajado en la asignatura Probabilidad I.

Se dice que un vector aleatorio es discreto o continuo, si todas las variables aleatorias que lo conforman son de ese mismo tipo. Por simplicidad, en esta unidad solamente se trabajarán los casos de vectores aleatorios cuyas coordenadas son v.a. **todas** del mismo tipo, ya sea discretas o continuas. Sin embargo, aclaramos que la definición no excluye aquellos vectores que tienen como componentes combinaciones de v.a., más sí es importante marcar que todas la v.a. estén definidas en el mismo espacio de probabilidad.

En esta unidad sólo se trabajarán vectores $\boldsymbol{X} = (X, Y)$ bidimensionales discretos o continuos. Un vector bidimensional, también, se pueden ver como una v.a. y por tal como una función, tal que para cada elemento del espacio muestral Ω se le aplica la componente del vector, esto es $\boldsymbol{X}: \Omega \to \mathbb{R}^2$. Véase la representación gráfica de dicha función.

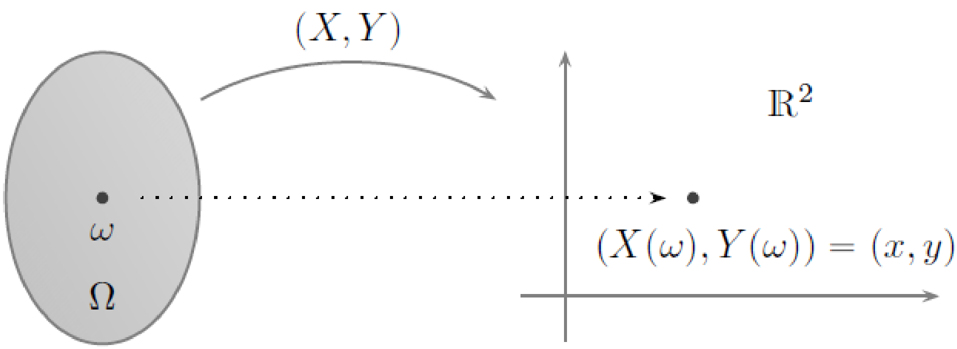

Figura 1. Grafica componente de un vector

Entonces de la misma manera que una v.a. para un vector aleatorio (X, Y) se le definirán sus correspondientes distribuciones.

1.1.2. Función de probabilidad y densidad conjunta

(Caso discreto y continuo).

Definición: Sean X y Y v.a. discretas tales que X toma los valores $x_1, x_2, \dots$ y Y toma los valores $y_1, y_2, \dots$ La ***función de probabilidad conjunta*** del vector aleatorio discreto (X, Y) es la función $f(x, y): \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ dada por

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \text{si } (x, y) \in \{x_1, x_2, \dots\} \times \{y_1, y_2, \dots\}.$$

Donde $f(x, y) \geq 0$ para todo par (x, y) y $\sum_{x,y} f(x, y) = 1$.

La función $f(x, y)$ es la probabilidad de que la variable X tome el valor x y, al mismo tiempo, la variable Y tome el valor y. Otra manera de denotar esta probabilidad conjunta es $f_{X,Y}(x, y)$ tomando a las v.a. como subíndices para aclarar cuáles son las variables que actúan, sin embargo a menos que se necesite esta notación no será utilizada. También es común llamar a esta función como ***función de probabilidad bivariada***.

La suma $\sum_{x,y} f(x, y) = 1$ en realidad es una doble suma $\sum_y \sum_x f(x, y) = 1$, pero por simplicidad se entenderá que cuando se ponen sobre una suma dos variables o más, se tomen en cuenta para cada una de éstas su respectiva suma no importando el orden. Esto es, primero se suman todos los valores de x y después todos los valores y o al revés.

Al igual que una v.a. discreta la función de probabilidad conjunta del vector (X, Y) puede ser presentada en una tabla, una gráfica o como una función (con su regla de correspondencia).

Representación de $f(x,y)$ mediante

una tabla

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\cdots$
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\cdots$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Figura 2. Tabla f(x,y)

una gráfica

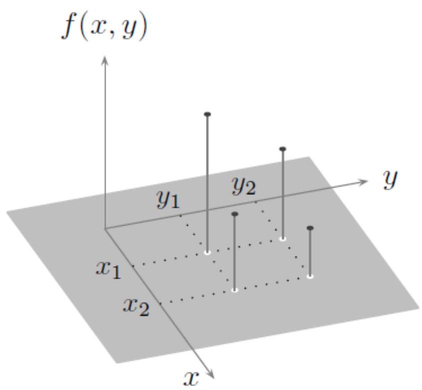

Figura 3. Gráfica f(x,y)

Para determinar las probabilidades de eventos relativos a un vector aleatorio discreto (X, Y) con función de probabilidad conjunta $f(x,y)$ se utiliza la siguiente relación: si A y B son dos conjuntos borelianos, entonces la probabilidad del evento $(X \in A) \cap (Y \in B)$ será:

$$P(X \in A, Y \in B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} f(x,y).$$

La pequeña coma que aparece en el lado izquierdo de la igualdad anterior significa la intersección de los eventos $(X \in A)$ y $(Y \in B)$.

Definición: La ***función de densidad conjunta*** de un vector aleatorio continuo (X, Y) es la función integrable y no negativa $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ tal que para todo par (x,y) en $\mathbb{R}^2$ se cumple la igualdad:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v) dv du.$$

Donde $f(x,y) \geq 0$ para todo par (x,y) y $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$.

La doble integral anterior representa el volumen bajo la superficie dada por la función $f(u,v)$ sobre la región $(-\infty,\ x] \times (-\infty,\ y]$

Por ejemplo, la siguiente gráfica representa una función de densidad conjunta con valor constante sobre el intervalo $(a, b) \times (c, d)$.

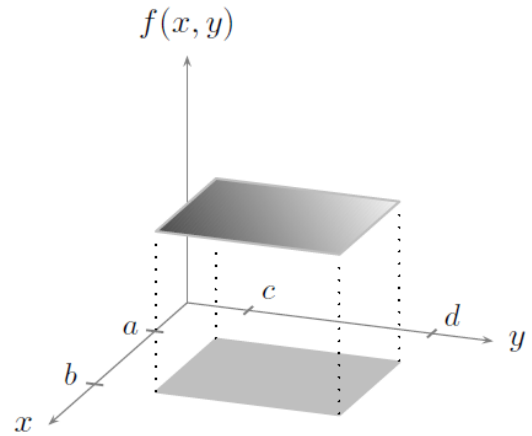

Figura 4. función de densidad conjunta con valor constante

Para determinar las probabilidades de eventos relativos a un vector aleatorio continuo (X, Y) con función de densidad conjunta $f(x, y)$ se utiliza la siguiente relación: si $a < b$ y $c < d$, entonces la probabilidad del evento $(a < X < b) \cap (c < Y < d)$ será el volumen bajo la superficie $f(x, y)$ en el rectángulo $(a, b) \times (c, d)$:

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dydx.$$

La pequeña coma que aparece en el lado izquierdo de la igualdad anterior significa la intersección de los eventos $(a < X < b)$ y $(c < Y < d)$.

1.1.3. Función de distribución conjunta.

Análogamente que para una v.a., un vector aleatorio discreto o continuo tiene asociada, también, una de función de distribución conjunta.

Definición: La ***función de distribución conjunta*** del vector aleatorio (X, Y), denotada $F(x, y): \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ se define como:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Para cualquier par (x,y).

Esta función también se denota como $F_{X,Y}(x,y)$ donde los subíndices son sus respectivas v.a. Y también es conocida como función de distribución acumulada.

Teorema: La función de distribución conjunta $F(x,y)$ del vector aleatorio (X,Y) satisface las siguientes propiedades:

1.- $\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty} F(x,y) = 1.$

2.- $\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0.$

3.- $F(x,y)$ es continua por la derecha para cada variable.

4.- $F(x,y)$ es función no decreciente para cada variable.

5.- Para cualesquiera $a < b$ y $c < d$ se cumple la desigualdad.

$$F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \geq 0.$$

Para un vector aleatorio (X,Y) existe una asociación entre su función de probabilidad o densidad conjunta y su distribución conjunta. De tal manera que conociendo alguna se puede obtener la otra y viceversa (salvo en el caso discreto que no es tan fácil pasar de $F(x,y)$ a $f(x,y)$).

a) Si (X,Y) es discreto,

$$F(x,y) = \sum_{u\leq x}\sum_{v\leq y} f(u,v).$$

b) Si (X,Y) es continuo,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu.$$

De esta última igualdad y con base en el teorema fundamental del cálculo se obtiene:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y).$$

1.1.4. Función de probabilidad y densidad marginal.

Cuando se tiene una distribución conjunta $f(x,y)$ a veces es de interés hacer la suma o la integral de los valores de f, pero considerando la variación de sólo una de sus variables. Esto conduce al concepto de función de probabilidad o densidad marginal. Que será una distribución univariada.

Definición: a) Sea el vector aleatorio discreto (X,Y) con su función de probabilidad conjunta $f(x,y)$, las ***funciones de probabilidad marginal de X y Y***, respectivamente, se definen como:

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) \qquad \text{y} \qquad f_Y(y) = \sum_x f(x,y).$$

b) Sea el vector aleatorio continuo (X,Y) con su función de densidad conjunta $f(x,y)$, las ***funciones de densidad marginal de X y Y*** se definen como:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad \text{y} \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Para obtener una función marginal se suma o se integra la función conjunta simplemente respecto de una sola variable, para dejar como resultado una función que depende únicamente de la otra variable no sumada o integrada. En general, las funciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son distintas, aunque hay ocasiones en que pueden ser iguales. Se puede verificar que dichas marginales cumplen, efectivamente, las propiedades de las funciones de probabilidad o densidad univariadas, pues son no negativas e integran uno, por ejemplo para el caso continuo la marginal de X cumple con $f_X(x) \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

1.1.5. Función y distribución marginal

Definición: Sea (X,Y) un vector aleatorio con su función de distribución conjunta $F(x,y)$. Las ***funciones de distribución marginal de X y Y***, respectivamente, se definen como:

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) \qquad \text{y} \qquad F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y).$$

Obsérvese que los límites anteriores siempre existen pues la función de distribución conjunta es acotada y no decreciente en cada variable. Por lo cual no es difícil comprobar que estas funciones de distribución marginales son, efectivamente, funciones de distribución univariadas.

1.1.6. Función y distribución condicional

Recordemos que la probabilidad condicional de un evento A, dado un evento B esta definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Al igual que esta definición, se puede hablar de probabilidades donde la ocurrencia de una variable esté restringida a que primero sucedan otras variables. Estas son las probabilidades condicionales.

Definición: a) Sea el vector aleatorio discreto (X, Y) con su función de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$. Sea y un valor de la v.a. Y tal que $f_Y(y) \neq 0$ la ***función de probabilidad condicional de X*** *dado* $Y = y$, se define como:

$$f_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

b) Sea el vector aleatorio continuo (X, Y) con su función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$. Sea y un valor de la v.a. Y tal que $f_Y(y) \neq 0$ la ***función de densidad condicional de X*** *dado* $Y = y$, se define como:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Observe que a las funciones definidas anteriormente se les considera como una función de x y que el valor de y por ser fijo puede considerársele como un parámetro de dicha función, es decir, para cada valor fijo de x se tiene una función diferente.

1.1.7. Generalización de independencia de variables aleatorias

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias con función de distribución conjunta $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Sean las respectivas funciones de distribución marginal $F_{X_1}(x_1)$, $F_{X_2}(x_2)$, …, $F_{X_n}(x_n)$.

Definición: Se dice que n variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ son independientes si para cualesquiera números reales $x_1, x_2, \dots, x_n$ se cumple la igualdad:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1),\ F_{X_2}(x_2),\ \dots,\ F_{X_n}(x_n).$$

1.2. Momentos

La esperanza y la varianza son medidas que reflejan un tipo de valor central respecto a un valor determinado, que en este caso es el origen y la media respectivamente. Además de ser valores que caracterizan una variable aleatoria. Ahora corresponde preguntarse la extensión de estos conceptos a diferentes potencias de la variable aleatoria.

Definición: Sea X una variable aleatoria. Para cada número natural n se define el n-ésimo momento (o momento de orden n) respecto al origen de X como el número $E(X^n)$, suponiendo que tal esperanza existe.

Entonces los momentos de una v.a. X de diferentes ordenes son $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^3)$, etc., cuando tales números existen. En particular la esperanza es el momento de primer orden de la v.a. X.

Para variables aleatorias discretas, el n-ésimo momento se calcula como

$$E(X^n) = \sum_x x^n P(X = x).$$

Para variables aleatorias continuas, el n-ésimo momento se calcula como

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx.$$

Definición: Sea X una variable aleatoria con media μ. Para cada número natural n se define el n-ésimo momento (o momento de orden n) respecto a su media de X como el número $E[(X-\mu)^n]$, suponiendo que tal esperanza existe.

Entonces los momentos alrededor de la media de una v.a. X de diferentes ordenes son $E(X-\mu) = 0$, $E[(X-\mu)^2]$, $E[(X-\mu)^3]$, etc., cuando tales números existen. Se puede observar que siempre el primer momento respecto a la media es nulo, sin embargo, por definición la varianza de X es el segundo momento respecto a la media μ.

Para variables aleatorias discretas, el n-ésimo momento respecto a la media se calcula como

$$E[(X-\mu)^n]=\sum_x (x-\mu)^n P(X=x).$$

Para variables aleatorias continuas, el n-ésimo momento respecto a la media se calcula como

$$E[(X-\mu)^n]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^n f(x)dx.$$

Una de las propiedades que tiene la varianza es que $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(x))^2$. Lo que significa que la varianza de X es el segundo momento menos el primer momento al cuadrado. El tercer momento está relacionado con la simetría de la correspondiente distribución de probabilidad. En general, no se conoce una interpretación para cada uno de los momentos de una variable aleatoria, en el mismo sentido que no se conoce una interpretación para cada una de las derivadas de una función infinitamente diferenciable.

Por otro lado, también debemos señalar que los momentos pueden no existir y que en caso de que existan, en general no es de esperarse que se pueda encontrar una expresión compacta para ellos. Sin embargo dada la unicidad de la suma o integral correspondiente, el n-ésimo momento de una variable aleatoria, si existe, es único. Así, cada distribución de probabilidad genera una única colección de momentos, suponiendo su existencia.

1.2.1. Esperanza, Varianza (matriz) y Covarianza de un vector aleatorio.

Definición: La esperanza de un vector aleatorio (X,Y), compuesto por dos variables aleatorias con esperanzas finitas, es el vector de las esperanzas, es decir,

$$E(X,Y)=\big(E(X),E(Y)\big).$$

De esta manera, encontrar la esperanza de un vector aleatorio se reduce al cálculo de la esperanza de cada una de las variables del vector.

Definición: Dado el vector aleatorio (X, Y) compuesto por dos variables aleatorias con esperanzas finitas, se define la covarianza del vector (X, Y) como:

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{X,Y} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

La covarianza es la esperanza del producto $(X - E(X))(Y - E(Y))$ o también conocida como el momento central mixto (ya que involucra dos v.a.) de segundo orden.

Para variables aleatorias discretas X y Y, la covarianza se calcula como

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_{x,y} (x - E(X))(x - E(Y))P(X = x, Y = y).$$

Para variables aleatorias continuas, el n-ésimo momento respecto a la media se calcula como

$$E[(X - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \big(x - E(X)\big)\big(x - E(Y)\big) f(x, y)dxdy.$$

En particular, utilizando las propiedades de la esperanza y desarrollando el producto $(X - E(X))(Y - E(Y))$ se tiene que:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Obviamente en el caso de tener v.a. X, Y independientes se tendrá que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Teorema: ***Propiedades de la covarianza***. Sea el vector aleatorio (X, Y) compuesto por dos variables aleatorias con esperanzas finitas, y sean a y b constantes, entonces se tienen siguientes propiedades:

1.- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$.

2.- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.

3.- $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

4.- $\text{Cov}(X + a, Y + b) = \text{Cov}(X, Y)$, (la covarianza es invariante ante una traslación).

5.- $\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y)$

6.- Si X, Y son variables independientes, entonces $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

7.- $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$.

Definición: La varianza de un vector aleatorio (X, Y), compuesto por dos variables aleatorias con varianzas finitas, es la matriz cuadrada:

$$\operatorname{Var}(X, Y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Var}(X) & \operatorname{Cov}(X, Y) \\ \operatorname{Cov}(Y, X) & \operatorname{Var}(Y) \end{pmatrix}.$$

A esta matriz también se le conoce como matriz de varianza-covarianza. Con base en la propiedad 2 de la covarianza se tiene que la matriz de varianza-covarinza es simétrica.

1.2.2. Coeficiente de correlación.

Uno de los parámetros más importantes en el análisis estadístico es el coeficiente de correlación, denotado por la letra griega ρ, el cual mide de alguna manera el grado de dependencia intrínseca entre dos variables.

Definición: Sean X, Y dos variables aleatorias con varianzas finitas, σ_X y σ_Y, respectivamente. ***El coeficiente de correlación*** entre las variables X y Y, denotado $\rho(X, Y)$se define como:

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\, \sigma_Y}.$$

Se sabe que si X, Y son variables independientes, entonces $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$, por tanto $\rho(X, Y) = 0$. Sin embargo el reciproco no necesariamente es correcto, esto es si $\rho(X, Y) = 0$, NO se sigue la independencia de variables. En el caso $\rho(X, Y) = 0$, simplemente se dice que las variables X y Y ***no están correlacionadas***. De esta manera si dos variables X y Y tienen varianza y son independientes entonces ellas no están correlacionadas.

Ejemplo: Sea X una v.a. que toma con probabilidad $\frac{1}{4}$ cada uno de los valores $-2, -1, 1$ y 2, entonces $E(X) = 0$. Sea $Y = X^2$, es claro que Y toma con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada uno de los valores 1 y 4. La variable aleatoria $XY = X^3$ toma con probabilidad $\frac{1}{4}$ cada uno de los valores $-8, -1, 1$ y 8. De lo cual se tiene que $E(XY) = 0$. De la propiedad 3 de covarianza se sigue que $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$, por lo tanto $\rho(X, Y) = 0$, así entonces las v.a X y Y no están correlacionadas, pero **no** son independientes (porque la ocurrencia de X sí afecta a la ocurrencia de Y).

Teorema: ***Propiedades del coeficiente de correlación***. Sean X y Y variables aleatorias con varianzas finitas, entonces se tienen siguientes propiedades:

1.- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

2.- Si $\rho(X, Y) = 1$, entonces existen $a > 0$ y b constantes tales que $Y = aX + b$.

3.- Si $\rho(X, Y) = -1$, entonces existen $a < 0$ y b constantes tales que $Y = aX + b$.

4.- Si X, Y son variables independientes, entonces $\rho(X, Y) = 0$.

Las propiedades 2 y 3 del coeficiente de relación indican que este parámetro es una medida del grado de dependencia lineal entre dos variables aleatorias. Sin embargo, como existen varias formas en que dos variables aleatorias pueden depender una de otra, el coeficiente de correlación **no** mide todas estas dependencias, únicamente mide la dependencia de tipo lineal.

1.2.3. Desigualdad de Chébyshev.

Este resultado es de carácter teórico y proporciona una cota superior para la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor que diste de su media en más de una cierta cantidad arbitraria. Esta desigualdad lleva el nombre del matemático ruso *Pafnuty Lvovich Chebyshev* (1821–1894).

Teorema: ***Desigualdad de Chébyshev***. Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza finita σ^2. Para cualquier número real $\varepsilon > 0$ se tiene:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon}.$$

1.2.4. Función generadora de momentos

Se sabe que las medidas como la esperanza y la varianza de una variable aleatoria describen ciertos aspectos de dicha variable. Sin embargo, estas medidas no son suficientes para describir la distribución en cuestión. Por lo cual surge la necesidad de introducir una alguna medida o función que describa en forma única a la distribución con que se trabaja. Dicha función es conocida como la función generatriz de momentos y está relacionada con los momentos de la variable aleatoria. Cabe mencionar que esta función no es la única que tiene la propiedad de caracterizar a la distribución, en otras unidades se trabajará otra función con esta característica.

Además la determinación del cálculo de los momentos de una v.a no es tan sencilla, y en caso de colas pesadas los momentos difícilmente existirán. Se verá que existe un procedimiento con el que para muchas v.a. es posible encontrar cualquier momento que exista de la v.a.

Definición: La ***función generadora de momentos*** de una variable aleatoria X es la función $M(t)$ definida como:

$$M(t) = E(e^{tX}),$$

para cualquier valor real t en donde esta esperanza exista.

En forma breve se le escribe como f.g.m. La letra *M* corresponde al término "momentos". Cuando sea necesario especificar a la variable aleatoria en cuestión se escribirá dicha variable como subíndice como por ejemplo $M_X(t)$.

Para variables aleatorias discretas X su f.g.m. se calcula para valores reales de *t* en donde esta siguiente suma sea finita:

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx}\, P(X = x).$$

Para variables aleatorias continuas X su f.g.m. se calcula para valores reales de *t* en donde esta siguiente integral sea finita:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx.$$

Lamentablemente, no todas las variables aleatorias tienen asociada una función generadora de momentos.

Teorema: ***Propiedades de la f.g.m***. Sean X y Y variables aleatorias con funciones generadoras de momentos $M_X(t)$ y $M_Y(t)$, y sean a y b constantes, entonces se tienen siguientes propiedades:

1.- Si $Y = aX + b$, entonces $M_Y(t) = e^{bt}M_X(at)$.

2.- Si X y Y son independientes, $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$.

3.- Si $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ coinciden (son idénticas) en un intervalo $(-s, s)$ con $s > 0$, entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.

Cierre

En esta unidad se desarrollaron destrezas y habilidades para la solución de problemas que involucran dos o más variables aleatorias, permitiendo con esto la aplicación más precisa de los experimentos aleatorios. En esta unidad aprendiste cómo se calcula una esperanza matemática, una covarianza y su coeficiente de correlación para vectores aleatorios. Identificaste cómo se pueden correlacionar dos v.a. Que existen v.a. sin algunos momentos que las caractericen y comprendiste la manera de determinar, en general, esperanzas para funciones de v.a.

Fuentes de consulta

Básica

- Evans, M. (2005). *Probabilidad y estadística*. Reverte.
- Gamiz, B. (2003). *Probabilidad y estadística con prácticas en Excel*. México: Just in time Press.
- Gutiérrez, E. y Panteleeva, V. (2014). *Probabilidad y estadística. Aplicaciones a la Ingeniería y ciencias*. México: Grupo Editorial Patria.
- Hayslett, H. (1987) *Estadística simplificada*. México: Grupo editorial Sayrols.
- Lincoln L. (2000). *Introducción a la estadística*. México: Compañía Editorial Continental.
- Milton, J. (2003). *Probabilidad y Estadística con aplicaciones para Ingeniería y Ciencias Computacionales*. México: McGraw Hill.
- Rincón, L. (2014). *Introducción a la probabilidad*. Universidad Autónoma de México. https://gc.scalahed.com/recursos/files/r161r/w24189w/Semana%207/Intro_proba.pdf
- Ruiz, E. y Ruiz, E. (2007). *Probabilidad y estadística*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Lipschutz, S. y Lipson, M. (2001). *Probabilidad* (2ª ed.). Colombia: McGraw Hill.
- Petrov, V. y Mordecki E. (2003). *Teoría de probabilidades*. Moscú: URSS.
- Wackerly, D., Mendenhall, W. y Scheaffer, R. (2010). *Estadística Matemática con aplicaciones*. México, Ciudad de México., México: Cengage-Learning.
- Wisniewski, P. y Velasco, G. (2001). *Problemario de probabilidad*. México, Ciudad de México., México: Thomson.