



Matemáticas

Probabilidad II

3er Semestre

Unidad 3: Teoremas Límite

Clave

05142315/06142215

Universidad Abierta y a Distancia de México





Unidad 3. Teoremas Límite

Índice

Presentación	3
Competencia específica	3
Logros	3
3.1. Tipos de convergencia	4
3.1.1. Convergencia casi segura (con probabilidad uno)	4
3.1.2. Convergencia en probabilidad	5
3.1.3. Convergencia en distribución (convergencia débil)	5
3.1.4. Relación entre las diferentes convergencias	6
3.2. Leyes de los grandes números	7
3.2.1. Ley (débil y fuerte) de los grandes números	8
3.2.2. Teorema Central del Límite	8
3.2.3. Teorema Central del Límite	9
Algunas aplicaciones	10
Cierre	11
Fuentes de consulta	12

Figura 1. tipos de convergencias	7
----------------------------------	---



Unidad 3. Teoremas Límite

Presentación

Esta última unidad es llamada *Teoremas límite* porque desarrolla temas que involucran el concepto del límite, ya sea de variables aleatorias o de números reales. Aquí estudiarás algunos conceptos importantes y muy utilizados, como lo son los diferentes tipos de convergencia en la teoría de la probabilidad, sus diferencias, notaciones, conexiones y aplicaciones (convergencia casi segura, convergencia en probabilidad y convergencia en distribución). La importancia de utilizar los diferentes tipos de convergencia se debe al interés de analizar el comportamiento asintótico de las distribuciones.

En esta unidad, también, trabajarás algunos de los teoremas de mayor trascendencia en la aplicación tanto estadística como en probabilidad, éstos son las leyes de los grandes números (fuerte y débil) así como una versión del teorema central de límite y sus aplicaciones.

Competencia específica

Aplica propiedades probabilísticas para la resolución de problemas teóricos y prácticos mediante algunos tipos de convergencia, leyes de grandes números y teorema central del límite.

Logros

- Identifica los diferentes tipos de convergencia en la teoría de probabilidad.
- Expresa correctamente en forma simbólica las diferentes notaciones.
- Analiza algunos de los principales teoremas de la teoría de la probabilidad.
- Aplica las leyes de los grandes números y el teorema central del límite.



Unidad 3. Teoremas Límite

3.1. Tipos de convergencia

De los cursos de cálculo o análisis matemático se sabe que una sucesión numérica $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un valor a , si para todo valor $\varepsilon > 0$ existe un número natural N a partir del cual se cumple que $|x_n - a| \leq \varepsilon$ para toda $n \geq N$. En este caso se dice que la sucesión numérica es convergente y esto se denota como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Es decir, para todo contorno alrededor del punto a de cualquier tamaño existirá una cola de un número infinito numerable de elementos de la sucesión x_n . Esta convergencia en el análisis real es conocida como **convergencia puntual**.

Este concepto se puede aplicar a la probabilidad, aunque no necesariamente de la misma manera.

3.1.1. Convergencia casi segura (con probabilidad uno)

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sean X una variable aleatoria (v.a.) y sea $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, una sucesión infinita de v.a., denotada $\{X_n\}$, todas definidas en el mismo espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Para cada $\omega \in \Omega$ fijo, se sabe que la evaluación en dicho punto muestral de la v.a. resulta en $X_i(\omega) \in \mathbb{R}$ para cada $i \geq 1$, entonces las evaluaciones $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$, forman una sucesión infinita de números reales, por lo tanto podemos definir la convergencia de las variables aleatorias cuando esta sucesión numérica es convergente para cada ω fijo. En este caso, la variable aleatoria límite se define de forma puntual como:

$$X(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega).$$

A este tipo de convergencia se le llama **convergencia puntual** y se escribe

$$X_n \rightarrow X, \text{ para cada } \omega \in \Omega.$$

Sin embargo, este tipo de convergencia es un poco restrictiva y “difícil” de que suceda. Por lo cual se tomarán otro tipo de condiciones menos restrictivas para poder trabajar con los valores de las v.a. En este contexto está la convergencia casi segura (c.s.), casi seguramente o fuerte.



Unidad 3. Teoremas Límite

Definición: Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ **converge casi seguramente** a la v.a. X , denotado $X_n \rightarrow X$ c.s., si $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ para casi todos los puntos $\omega \in \Omega$. En símbolos esto último se escribe como

$$P(\{\omega \in \Omega: X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

La última expresión permite que exista un subconjunto de puntos en Ω , para los cuales no se verifica la convergencia, pero tal subconjunto debe tener medida de probabilidad cero.

Es claro que si una sucesión de v.a. es convergente puntualmente, entonces también convergente casi seguramente. Mas el recíproco es falso. Debido a la última expresión la convergencia c.s. se le llama convergencia **con probabilidad uno**, pero **no** debe de confundirse con la **convergencia en probabilidad**.

3.1.2. Convergencia en probabilidad

Otra forma aún menos restrictiva que la convergencia casi segura es la convergencia en probabilidad. Esta convergencia en análisis matemático es conocida como convergencia en medida.

Definición: Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ **converge en probabilidad** a la v.a. X , denotado $X_n \rightarrow X$ en probabilidad, si para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

O equivalentemente se tiene que: para todo $\varepsilon > 0$

$$P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) \rightarrow 1, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Es decir, la probabilidad del conjunto en donde X_n y X distan en más de ε converge a cero conforme $n \rightarrow \infty$. También por simplicidad estas últimas expresiones se escriben como:

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{o} \quad P(|X_n - X| < \varepsilon) \rightarrow 1, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

3.1.3. Convergencia en distribución (convergencia débil)



Unidad 3. Teoremas Límite

Este será el último tipo de convergencia que se considerará en este curso y hace uso de las funciones de distribución de las variables aleatorias.

Definición: Sean $X, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, variables aleatorias y sean $F(x), F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$, sus funciones de distribución, respectivamente. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ **converge en distribución** a la v.a. X , denotado $X_n \rightarrow X$ en distribución, si para cada punto x donde $F(x)$ es continua se tiene que:

$$F_n(x) \rightarrow F(x), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Es decir, para aquellos valores reales x que cumplan la condición mencionada, debe verificarse que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x).$$

Otra manera como se conoce la convergencia en distribución es como **convergencia débil**.

3.1.4. Relación entre las diferentes convergencias

Existen conexiones entre este tipo de convergencias, la cuales se presentan en el siguiente teorema.

Teorema: Sea X variable aleatoria y $\{X_n\}$ sucesión de variables aleatorias

- 1.- Si $X_n \rightarrow X$ c.s., entonces $X_n \rightarrow X$ en probabilidad.
- 2.- Si $X_n \rightarrow X$ en probabilidad, entonces $X_n \rightarrow X$ en distribución.
- 3.- $f(t)$ es uniformemente continua en la recta real.
- 5.- Si X y Y son v.a. independientes con $f(t)$ y $g(t)$ sus funciones características. Entonces la función característica de la suma $X + Y$ es $h(t) = f(t)g(t)$.

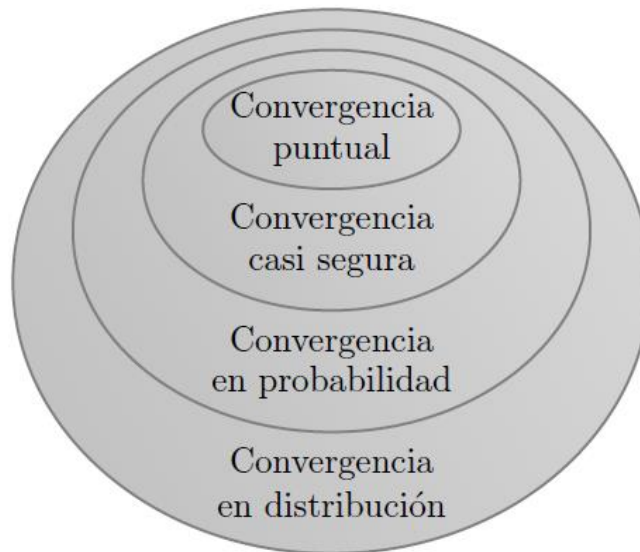


Figura 1. tipos de convergencias

3.2. Leyes de los grandes números

El teorema conocido como la ley de los grandes números es un resultado muy interesante que puede observarse en la naturaleza. Constituye uno de los resultados más importantes de la teoría de la probabilidad y tiene mucha relevancia en las aplicaciones tanto teóricas como prácticas.

Se denomina *ley de los grandes números* a cualquier proposición que estable, bajo determinadas condiciones, la convergencia casi segura o en probabilidad de las medias aritméticas de variables aleatorias cuando el número de sumandos crece a infinito.

Si se tiene convergencia casi segura, se habla de la **ley fuerte de los grandes números**. Más si se tiene convergencia en probabilidad, se habla de la **ley débil de los grandes números**. Aunque cabe aclarar que existen diferentes versiones para cada una de estas leyes, aquí sólo se presentará la más común.



Unidad 3. Teoremas Límite

3.2.1. Ley (débil y fuerte) de los grandes números

Teorema: Sea $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, una sucesión de variables aleatorias independientes dos a dos e idénticamente distribuidas con media finita μ . Entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

La convergencia anterior se da casi seguramente (ley fuerte) y en probabilidad (ley débil).

Ejemplo: Procesamiento de resultados de mediciones. Se quiere estimar el valor de una constante física a mediante los resultados de n mediciones de su magnitud y se recomienda tomar la media aritmética de estas mediciones. Veamos la fundamentación de esto. Supongamos que $X_1, X_2, \dots, X_n$ son los resultados de n mediciones de esta constante a . Generalmente las mediciones traen errores, y como no se puede predecir el resultado de la medición siguiente, se considera que el resultado de la i -ésima ($i = 1, \dots, n$) medición es una v.a. $X_i = a + \Delta_i$, donde Δ_i es el error que se comete en la i -ésima medición. Supongamos que $E(\Delta_i) = 0$, esto es el promedio de los errores de medición es nulo y se interpreta como la ausencia de error sistemático. Supongamos también que $\text{Var}(\Delta_i) = \sigma^2$ para cada $i = 1, \dots, n$, donde el valor σ^2 es desconocido, esto significa que todas las mediciones se llevan a cabo con la misma precisión. Si se supone además que las v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ son independientes dos a dos entonces por la ley débil de los grandes números se tiene la convergencia en probabilidad de

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

En consecuencia, la media aritmética de los resultados de las mediciones de una constante física a converge en probabilidad al valor de esta constante; o dicho de otra manera **las mediciones son un estimador consistente de la constante desconocida a .**

3.2.2. Teorema Central del Límite



Unidad 3. Teoremas Límite

Sin duda, el resultado más notable de la teoría estadística es el **Teorema Central del Límite**. Existe una controversia entre si se llama “*Teorema central del límite*” o “*Teorema del límite central*”. Aquí se considera el primer nombre porque es un teorema central (importante) de la probabilidad y el cual trabaja con el límite de ciertos puntos, por lo cual lo llamamos *Teorema Central del límite* (TCL).

Grosso modo este teorema explica por qué la distribución normal aparece con tanta frecuencia en fenómenos biológicos, físicos, astronómicos, químicos, etc. al establecer que la suma de un gran número de v.a. independientes tiende a seguir de manera asintótica una distribución normal, siempre que determinadas condiciones queden satisfechas.

3.2.3. Teorema Central del Límite

Teorema: (TCL para sumas de v.a.) Sea $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes dos a dos e idénticamente distribuidas con media finita μ y varianza finita σ^2 . Entonces la función de distribución de la variable aleatoria

$$Z_n = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}.$$

tiende a la función de distribución normal estándar cuando tiende a n infinito, esto es $Z_n \rightarrow N(0,1)$ en distribución.

Este teorema se conoce como el **TCL para la suma de v.a.** independientes e idénticamente distribuidas.

Sin embargo, si dividimos los términos de Z_n entre n se obtiene otra expresión:

$$Z_n = \frac{\frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

En donde $\bar{X} = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{n}$ es la media muestral mientras que μ y σ (media y desviación estándar) son parámetros poblacionales. Este forma se conoce como el **TCL para la media**.



Unidad 3. Teoremas Límite

Existen, también, una gran variedad de versiones del TCL y a su vez diferentes maneras de demostrarlo. Una demostración clásica es utilizando funciones generadoras de momentos, sin embargo también es clásico demostrarlo mediante funciones características.

A continuación se presenta una tabla en la cual se resumen los tipos de convergencia utilizados en los teoremas importantes vistos.

<i>Tipo de convergencia</i>	<i>Teorema</i>
Casi segura	Ley fuerte de los grandes números
En probabilidad	Ley débil de los grandes números
Distribución	Teorema Central del límite.

Algunas aplicaciones

En muchas situaciones prácticas de la ingeniería, las ciencias exactas y la economía se considera que una v.a. representa la suma de un número considerable de v.a. independientes (cuyas distribuciones particulares pueden ser arbitrarias o incluso desconocidas). Pero gracias al TCL se sabe que la v.a. que resulta de sumar todas estas variables se aproxima mediante la distribución normal. Por ejemplo: imagine el caso del consumo de energía eléctrica por cada familia. Es evidente que la mayoría de las familias consumen electricidad de manera desordenada y aleatoria. Así, para cada familia k , se considera la v.a. X_k que mide el consumo particular de energía eléctrica, con su distribución de probabilidad y parámetros (media y varianza) respectivos. Distintas familias pueden consumir energía eléctrica de un modo muy diferente y con diferentes distribuciones de probabilidad. Más, debido al TCL se puede asegurar que la cantidad total de energía eléctrica consumida en una ciudad, producto de la suma total de las contribuciones individuales de numerosas familias, puede aproximarse mediante una distribución normal.

Ejemplo: Un elevador tiene una placa que indica que su capacidad máxima es de 12 personas o 2004 libras. Los pesos de los hombres se distribuyen normalmente con $\mu = 172$ libras y $\sigma = 29$



Unidad 3. Teoremas Límite

libras. La capacidad del elevador se excederá si las personas tienen pesos mayores a $\frac{2004}{12} = 167$ libras.

- a) Calcula la probabilidad de que al seleccionar a un hombre su peso sea mayor a 167 libras.
- b) Calcula la probabilidad de que 12 hombres seleccionados al azar tengan una media mayor de 167 libras (de manera que su peso total sea mayor a 2004 libras).

Solución:

- a) Sea X la v.a. que *representa el peso de un hombre*, entonces por los datos del problema se tiene que $X \sim N(172, (29)^2)$. Entonces no interesa saber $P(X > 167)$.

Estandarizando a X se tiene que $z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{167 - 172}{29} = -0.17$. Así

$$P(X > 167) = P(Z > -0.17) = 1 - P(Z < -0.17) \approx 0.5675.$$

Es decir, la probabilidad de que al seleccionar a un hombre su peso sea mayor a 167 libras es de 0.5675 o el 56.75% de la población tiene un peso mayor a 167 libras.

- b) Ahora nos preguntan por la media muestral $\bar{X}$ con $n = 12$, esto es no piden calcular $P(\bar{X} > 167)$.

Entonces aplicando el TCL para la **media muestral** se tiene que $z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} =$

$$\frac{167 - 172}{\frac{29}{\sqrt{12}}} \approx -0.59. \text{ Tomemos } z = -0.6 \text{ entonces}$$

$$P(\bar{X} > 167) = P(Z > -0.6) = 0.7257.$$

Es decir, con un 72.57% el peso medio de los 12 hombres será mayor a 167 libras.

Cierre

En esta unidad se trabajaron los diferentes tipos de convergencia en la teoría de la probabilidad sus conexiones y propiedades. Identificaste los principales teoremas de la probabilidad, las leyes de los grandes números y el teorema central del límite; algunas de sus aplicaciones y características. Con todos estos nuevos conocimientos amplias tu sabe probabilístico y tienes más bases para continuar con el desarrollo de tu carrera.



Unidad 3. Teoremas Límite

Fuentes de consulta

Básica

- Chao, L. L. (2000). *Introducción a la estadística*. Compañía Editorial Continental.
- Evans, M. (2005). *Probabilidad y estadística*. Reverté.
- Gámiz, B. (2003). *Probabilidad y estadística con prácticas en Excel*. Just in Time Press.
- Gutiérrez, E., & Panteleeva, V. (2014). *Probabilidad y estadística: Aplicaciones a la ingeniería y ciencias*. Grupo Editorial Patria.
- Hayslett, H. (1987). *Estadística simplificada*. Grupo Editorial Sayrols.
- Lipschutz, S., & Lipson, M. (2001). *Probabilidad*. (2ª ed.). McGraw-Hill.
- Milton, J. (2003). *Probabilidad y estadística con aplicaciones para ingeniería y ciencias computacionales*. McGraw-Hill.
- Petrov, V., & Mordecki, E. (2003). *Teoría de probabilidades*. Editorial URSS.
- Rincón, L. (2014). *Introducción a la probabilidad*. Universidad Nacional Autónoma de México.
https://gc.scalahed.com/recursos/files/r161r/w24189w/Semana%207/Intro_proba.pdf
- Ruiz, E., & Ruiz, E. (2007). *Probabilidad y estadística*. McGraw-Hill Interamericana.
- Wackerly, D., Mendenhall, W., & Scheaffer, R. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones*. Cengage Learning.