Matemáticas

6º Semestre

Ecuaciones diferenciales parciales

Unidad 1. Preliminares

Clave
050930934

Universidad Abierta y a Distancia de México

DCEIT

Índice

Índice de figuras y tablas

Figuras

Tablas

Presentación

Las ecuaciones diferenciales parciales son de una importancia muy grande en el área de las matemáticas modernas, especialmente en el sentido aplicado. Diversos fenómenos físicos tienen una modelación que resulta en una ecuación diferencial parcial; en este sentido, las EDP se aplican de manera muy directa al mundo real.

Esta primera unidad del curso se introduce las nociones necesarias de EDP (ecuaciones diferenciales parciales); el surgimiento de las mismas, que son el resultado de leyes físicas, por lo que se presenta una estructura según la cual son generalizaciones de las ecuaciones de la física-matemática. De la misma forma, se presenta su clasificación y el método de las características para dar solución a un problema clásico relacionado al problema de Cauchy.

Competencia específica

Aplicar las ecuaciones básicas de la física matemática y plantear los problemas de contorno asociados a ellas, para resolver problemas prácticos que puedan ser modelados por tales ecuaciones, mediante la vinculación y generalización de los conceptos y resultados de Álgebra Lineal, Análisis Matemático y EDO.

Logros

- Clasificar algunas de las EDP de acuerdo a las propiedades que tienen.
- Plantear el problema de Cauchy en los diferentes órdenes.
- Determinar métodos de solución para el problema de Cauchy.

1.1. Definiciones principales

En esta unidad revisarás los elementos necesarios para el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, recordando conceptos previos de cálculo y de análisis, así como algunos resultados necesarios estudiados con anterioridad.

1.1.1. ¿qué son y cómo surgen las EDP?

Una ecuación diferencial parcial o ecuación en derivadas parciales, (EDP) es una relación funcional de la forma:

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, D^\alpha u\right) = 0 \qquad (1.1.1.1)$$

Entre una función desconocida $u = u(x,t)$ de la variable espacial $x = (x_1, \dots, x_n)$, perteneciente a una región del espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$, y de la variable temporal t y sus derivadas parciales hasta un cierto orden.

La función desconocida u generalmente está asociada a una cantidad física, por ejemplo, temperatura, concentración de una sustancia en una solución, intensidad de una onda sonora, deformación de una estructura con respecto a un estado de equilibrio, etc.

Dentro de la ecuación utilizas la notación de Schwartz, según la cual $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice perteneciente a $\mathbb{N}^{n+1}$, de modo que $D^\alpha u$ denota una derivada parcial iterada de u de orden $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, en la que derivas α_0 veces con respecto a la variable temporal t y α_j veces en cada una de las variables x_j. Asignas el orden de la EDP $(1.1.1.1)$ como el de la derivada de mayor orden involucrada, es decir, el máximo de los módulos $|\alpha|$ entre los índices α que intervienen en la ecuación. Cuando la incógnita u de la ecuación no es una función escalar, sino un vector

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

Entonces (1.1.1.1) puedes representarlo como un sistema de ecuaciones. En este caso, si F es también una función vectorial con M componentes de la forma $(1.1.1.1)$, tienes un sistema de M ecuaciones diferenciales parciales con N funciones incógnitas.

La función escalar o vectorial u satisface la ecuación $(1.1.1.1)$ en una región Ω de $\mathbb{R}^n$, cuando al sustituir la función y las correspondientes derivadas parciales en la ecuación, se satisface la ecuación para todo $x \in \Omega$ y todo $t > 0$.

La ecuación $(1.1.1.1)$ puede ser lineal o no-lineal, dependiendo de que F lo sea o no con respecto a la incógnita u y sus derivadas $D^\alpha u$. Dentro de las ecuaciones no-lineales se distinguen también las ecuaciones cuasilineales, a las que revisarás en del desarrollo de este contenido.

Ecuaciones de la física matemática

La física matemática se dedica a la construcción e investigación de los modelos matemáticos de fenómenos físicos.

Desde los tiempos de Isaac Newton, la Física Matemática ha sido desarrollada paralelamente por matemáticos y físicos.

A fines del siglo XVII se descubrió el Cálculo Diferencial e Integral (Isaac Newton, Gottfried Leibniz), y Newton formuló matemáticamente las leyes básicas de la mecánica y la Ley de Gravitación Universal, utilizando el lenguaje de las ecuaciones diferenciales.

En el siglo XVIII los métodos de la física matemática se aplicaron al estudio de las vibraciones (oscilaciones) de cuerdas, barras y membranas, y a problemas relacionados con acústica e hidrodinámica. También se sentaron las bases de la mecánica analítica (Jean D'Alembert, Leonard Euler, Daniel Bernoulli, Joseph Lagrange y Pierre Laplace).

En el siglo XIX, las ideas de la física matemática surgen con nuevo ímpetu en problemas de conducción de calor, difusión, elasticidad, óptica, electrodinámica y procesos no lineales de propagación de ondas. Se desarrollan conjuntamente la teoría de potencial y la teoría de estabilidad del movimiento (Jean Fourier, Simeon Poisson, Carl Gauss, Augustin Cauchy, M.V. Ostrogradski, Peter Dirichlet, George Riemann, Sofia Vasílievna Kovalévskaya, Sir George Stokes, Henri Poincaré, Aleksandr Mikháilovich Liapunov, Vladímir Andréyevich Steklov, David Hilbert).

En el siglo XX se desarrollan la física cuántica, la teoría de la relatividad, nuevos problemas de dinámica de gases, el fenómeno de transporte de partículas y la física del plasma, cuyos modelos matemáticos se escriben en términos de ecuaciones diferenciales parciales.

Muchos problemas de la física matemática clásica se modelan mediante problemas de contorno para ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales que dan lugar a los conocidos como ecuaciones y problemas de la física matemática.

Las herramientas matemáticas básicas para estudiar estos problemas son:

- La teoría de las ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales).
- La teoría de ecuaciones integrales.
- El cálculo de variaciones.
- La teoría de funciones.
- El análisis funcional.
- La teoría de aproximación.
- Los métodos numéricos.
- La teoría de probabilidades.
- La matemática computacional.

Algunos modelos como los de la física cuántica requieren, además, de la aplicación de resultados de otras áreas como:

- La teoría de funciones generalizadas.
- La teoría de funciones de varias variables complejas.
- Los métodos topológicos y algebraico.

El desarrollo de la computación electrónica ha permitido realizar experimentos a través de simulaciones computacionales efectuadas con el uso de los modelos, cuyos resultados han podido ser corroborados en la práctica, lo cual confirma la validez de estos modelos.

De todos los problemas que estudia la física matemática, juegan un importante rol los llamados problemas **bien planteados,** los cuales satisfacen las hipótesis de Hadamard, es decir, su solución existe, es única y depende continuamente de los datos. Posteriormente verás que se requiere exigir condiciones adicionales a las soluciones de las ecuaciones diferenciales para que los problemas asociados sean bien planteados. Estas exigencias se expresarán en términos de “condiciones iniciales y de contorno” que debe satisfacer la solución. Lo más interesante es que estas “exigencias matemáticas” aparecen también de manera natural como consecuencia del “planteamiento físico” de los problemas modelados por las ecuaciones. Esta relación intrínseca entre los requerimientos matemáticos y el planteamiento físico de los problemas habla del importante papel de la matemática como herramienta para el desarrollo de la física, pero también de la física como fuente de problemas que incentiva el desarrollo de la matemática.

Aunque dichos requerimientos son naturales para los problemas físicos, su validez debe ser comprobada en el marco de una teoría desarrollada alrededor de un modelo matemático específico, y éste es precisamente el objetivo de la teoría de las ecuaciones de la física matemática. Es por ello que los modelos matemáticos de los fenómenos físicos deben satisfacer las siguientes propiedades matemáticas:

- No deben ser contradictorios, es decir, deben tener solución.
- No pueden dar una descripción ambigua del proceso físico estudiado, es decir, la solución debe ser única.
- Su solución no debe ser sensible a pequeños errores en los datos provocados por las mediciones de las magnitudes físicas, es decir, la solución debe depender continuamente de los datos.

Como puedes apreciar, se pueden resumir estas propiedades en la necesidad de que los problemas matemáticos asociados a los modelos de la física matemática sean bien planteados en el sentido de Hadamard. Mucho de lo que realizarás en lo sucesivo está relacionado con la demostración de este resultado para los diferentes problemas que estudiarás.

Finalmente, existen otros temas prácticos muy importantes relacionados con las soluciones de los modelos:

- Estabilidad.
- Representación.
- Estimaciones y asintóticas.
- Suavidad.

Algunos de estos temas, también podrás revisarlos a lo largo del curso.

1.1.2. los operadores grad, rot, div y laplaciano

Considera una función escalar $f(x)$ definida sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Entonces, a cada punto $a \in \Omega$ donde existen las derivadas parciales $D_i f(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$, se le puede asociar el vector $\left(D_1 f(a), \dots, D_n f(a)\right)$ llamado **gradiente de f** en el punto a y que se denota mediante el símbolo:

$$\nabla f(a) = \left(D_1 f(a), \dots, D_n f(a)\right) \qquad (1.2.1.1)$$

Es conocido de cursos previos de análisis vectorial que la existencia del vector $\nabla f(a)$ es una condición necesaria, pero no suficiente, para la existencia de la diferencial de f en a. Cuando f es diferenciable en el punto a, entonces su diferencial $d\,f(a)$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que actúa en la forma:

$$d\,f(a)(x) = \nabla f(a) \cdot x, \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad (1.1.2.2)$$

donde el punto representa el producto escalar de los vectores $\nabla f(a)$ y x.

Si e es un vector unitario de $\mathbb{R}^n$, la derivada direccional de f en el punto a en la dirección del vector e es un número que se representa mediante el símbolo $f'(a;e)$, y que se expresa a través del vector gradiente, en la forma:

$$f'(a;e) = \nabla f(a) \cdot e \tag{1.1.2.3}$$

es decir, esta derivada direccional es la componente del vector $\nabla f(a)$ en la dirección del vector unitario e.

En dos variables espaciales, el gradiente se escribe en la forma:

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\boldsymbol{j}$$

y en tres variables espaciales, la correspondiente fórmula es:

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

donde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ representan los vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados.

Una función vectorial $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ definida sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ es llamado un **campo vectorial en $\boldsymbol{\Omega}$**.

Toda función escalar $f: \Omega \to \mathbb{R}$ para la cual existen sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x),\ 1 \leq i \leq n$, en todo punto $x \in \Omega$, define un campo asociado al vector $\nabla f(x)$ llamado **campo gradiente de $\boldsymbol{f}$**.

Una situación importante en el estudio de los campos vectoriales resulta cuando el campo F en Ω coincide con el campo gradiente de alguna función escalar f definida en Ω; cuando esto ocurre, se dice que f es un **potencial** para el campo vectorial F.

El siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en el inciso 10.15 del libro *Calculus, Volumen II*, de Tom Apostol, te da una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial sea un campo gradiente.

1.1.2.1. Teorema. Un campo vectorial F definido en un abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^n$ es un campo gradiente, si y sólo si la integral de línea de F a lo largo de cualquier arco Γ suave a trozos contenido en Ω depende únicamente de los extremos de Γ.

Si $F = (f_1, \dots, f_n)$ cumple las condiciones del teorema anterior, donde f_i, $1 \le i \le n$, son funciones escalares definidas en Ω y mediante $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\big), t \in [a, b]$, una parametrización del arco Γ, entonces la integral de línea de F a lo largo de Γ se define como:

$$\int_\Gamma F \cdot ds = \int_a^b \left[f_1\big(\gamma(t)\big)\, d\gamma_1(t) + \cdots + f_n\big(\gamma(t)\big)\, d\gamma_n(t)\right] \qquad (1.1.2.4)$$

Que Γ sea suave a trozos significa que la parametrización γ es continua en $[a, b]$, excepto en un número finito de puntos $\{a_j\}, 1 \le j \le m$, en cuyo caso se obtiene:

$$\int_\Gamma F \cdot ds = \sum_{j=0}^{m} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \left[f_1\big(\gamma(t)\big)\, \gamma_1'(t)\, dt + \cdots + f_n\big(\gamma(t)\big)\, \gamma_n'(t)\, dt\right] \qquad (1.1.2.5)$$

asumiendo que $a_0 = a, a_{m+1} = b$.

Puedes observar que la condición del teorema anterior es equivalente a que la integral de línea de F se anule a lo largo de todo arco cerrado, suave a trozos, contenido en Ω.

Se definen las nociones de **rotacional** para un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y de divergencia para un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ con $n \ge 2$.

Sea $F(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$ un campo vectorial definido en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, para el cual existen las derivadas parciales con respecto a x, y, z de las componentes P, Q y R. El **rotacional** de F se define como otro campo vectorial en Ω dado por la fórmula:

$$rot\ F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1.1.2.6}$$

Como se muestra en el inciso 12.11 del libro de *Calculus, Volumen II*, de Tom Apostol, el vector $rot\ F$ aparece en la integral de superficie de la llamada Fórmula de Stokes, que es una de las fórmulas integrales más importantes del cálculo integral en varias variables:

$$\iint_S (rot\ F) \cdot n\ ds = \int_\Gamma F \cdot dx \tag{1.1.2.7}$$

Donde, en la parte derecha de (1.1.2.7), aparece la integral de línea del campo vectorial F a lo largo del arco Γ, que se encuentra en el borde de la superficie S, contenida en Ω, y n es el vector normal unitario a la superficie, definido por:

$$n = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right|} \tag{1.1.2.8}$$

donde $r(u,v) = X(u,v)\boldsymbol{i} + Y(u,v)\boldsymbol{j} + Z(u,v)\boldsymbol{k}$ denota una parametrización de la frontera para la cual se supone que existen las derivadas parciales con respecto a u y v de las componentes X, Y y Z.

En (1.1.2.8) el símbolo $\times$ representa al producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$. En el caso especial en que el campo vectorial F no depende de la variable z, es posible considerar que F es un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$. En este caso, si S es una superficie plana, entonces $n = \boldsymbol{k}$ y la fórmula de Stokes se reduce a

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_\Gamma P\, dx + Q\, dy \tag{1.1.2.9}$$

esta última igualdad es llamada **fórmula de Green**.

De la fórmula de Stokes se puede concluir que para campos F definidos en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que tengan un rotacional, la condición:

$$rot\ F \equiv \vec{0} \tag{1.1.2.10}$$

es equivalente a que la integral de F a lo largo de cualquier arco cerrado Γ contenido en Ω, se anula, y por lo tanto, según el teorema 1.1.2.1, F es un campo gradiente.

Además, para un campo en $\mathbb{R}^3$, condición (1.1.2.10) es también una condición necesaria y suficiente para que sea un campo gradiente.

En particular, si $F(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ es un campo plano definido en un abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^2$, la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.1.2.11}$$

en Ω es una condición necesaria y suficiente para que $F(x,y)$ sea un campo gradiente.

Se observa que el $rot\ F$ puede ser expresado a través del cálculo formal de un determinante:

$$rot\ F = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{1.1.2.12}$$

Si se calcula formalmente este determinante por menores, partiendo de la primera fila, se obtiene la expresión de $rot\ F$ dada en (1.1.2.6).

Una forma sintética de expresar la fórmula (1.1.2.12) es mediante:

$$rot\ F = \nabla \times F \tag{1.1.2.13}$$

donde el símbolo ∇ representa el operador gradiente:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1.1.2.14}$$

Se define el producto escalar formal del operador ∇ con un campo vectorial $F = (P, Q, R)$ en $\mathbb{R}^3$ y se obtiene:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{1.1.2.15}$$

Esta expresión es conocida como la **divergencia** del campo F y se denota mediante $div\, F$. Se observa que la definición (1.1.2.15) se puede generalizar a cualquier campo vectorial en $\mathbb{R}^n$.

Finalmente se llega a que los conceptos básicos que se han introducido se pueden representar simbólicamente a través de los tres productos:

$$grad\, \varphi = \nabla\varphi, \qquad div\, F = \nabla \cdot F, \qquad rot\, F = \nabla \times F \tag{1.1.2.16}$$

El operador **de Laplace**, que es fundamental en la física matemática, está definido por:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2 \tag{1.1.2.17}$$

se puede expresar mediante

$$\Delta = div\,(grad) = \nabla \cdot \nabla \tag{1.1.2.18}$$

De estas definiciones es posible obtener algunas identidades que permiten facilitar algunas operaciones en el cálculo vectorial y para lo que se desarrollará de EDP. Pueden practicarse las definiciones demostrando las siguientes fórmulas:

$$rot\, grad = \vec{0}, \qquad div\, rot = 0, \qquad rot\, rot = grad\, div - \Delta \tag{1.1.2.19}$$

1.1.3. problemas con condiciones iniciales y de contorno asociados a las EDP

Como se menciona en el tema 1.1.1, las EDP pueden, en general, tener una cantidad infinita de soluciones.

Verás que esto ocurre precisamente en el caso de las EDP lineales que corresponden a los modelos clásicos de la física matemática y que se estudiarán en el tema 1.2. En efecto, por ejemplo, la solución general de la ecuación $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 0$, tiene la forma $u(x,y) = f(x) + g(y)$, donde f y g son dos funciones arbitrarias de la clase C^2. Entonces, para obtener una solución específica de esta ecuación, que describa un proceso físico real que está siendo modelado con ella, se requiere imponer condiciones adicionales.

Este hecho distingue radicalmente el estudio de las EDP lineales con respecto a las EDO lineales, dado que es conocido que en este segundo caso el conjunto de soluciones es un espacio vectorial de dimensión n, donde n es el grado de la ecuación. Es por ello que en el estudio de las EDO lineales se utilizan muchos resultados del álgebra lineal que son insuficientes para el estudio de las EDP lineales, donde se requiere, además, la aplicación de resultados de la teoría de funciones analíticas, los espacios de Sobolev, el análisis funcional y la teoría espectral de operadores, entre otros.

Sería imposible construir una teoría general acerca de las condiciones adicionales que deben exigirse a las soluciones de una EDP arbitraria, para que puedas encontrar una solución única. Sin embargo, dado que las EDP son el modelo por excelencia de los problemas que aparecen en la mecánica de medios continuos, deberás ajustar estas condiciones adicionales a los requerimientos físicos a las soluciones de estos problemas. Resulta que las exigencias físicas conducen al planteamiento de problemas matemáticos que corresponden a la búsqueda de soluciones de las EDP que, además, satisfagan ciertas **condiciones iniciales y de contorno** adicionales.

Lo realmente sorprendente es que, desde el punto de vista matemático, estos problemas satisfacen las condiciones del buen planteamiento de Hadamard (existencia y unicidad de la solución y dependencia continua de la solución con respecto a los datos) en un sentido que será precisado más adelante.

En la Unidad 2 verás que, en la teoría clásica de las EDP, éstas se clasifican en parabólicas, hiperbólicas y elípticas, las cuales se distinguen no sólo por sus propiedades matemáticas, sino también por su ámbito de aplicación física, En efecto, las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas, representadas por la **ecuación de calor** y la **ecuación de ondas,** son los modelos más clásicos y representativos de las llamadas EDP de evolución.

Mientras que la ecuación de calor permite describir fenómenos altamente irreversibles en el tiempo en los que la información se propaga a la velocidad infinita, la ecuación de onda es el prototipo de modelos de propagación de perturbaciones a la velocidad infinita y que son completamente reversibles en el tiempo.

Como ya se mencionó, las ecuaciones parabólicas, como la ecuación del calor, y las hiperbólicas, como la ecuación de ondas, se distinguen también por sus ámbitos de aplicación.

Mientras que el primero es frecuente en la dinámica de fluidos, a través de una versión más complicada que es la ecuación de Stokes, o en fenómenos de difusión (del calor, de partículas, etc.), el operador de onda y sus variantes intervienen de forma sistemática en elasticidad (frecuentemente a través de sistemas más sofisticados, como el de Lamé, por ejemplo) o en la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas (ecuaciones de Maxwell).

La mecánica de medios continuos está llena también de otras ecuaciones, operadores y modelos, pero en todos ellos están presentes de una u otra forma el operador del calor, de ondas o una variante muy próxima de los mismos.

Con frecuencia los modelos más realistas son más sofisticados que una simple ecuación aislada que es sobre lo que se centra este texto. Se trata a menudo de sistemas acoplados de EDP, en los que es habitual encontrar componentes parabólicas e hiperbólicas, como ocurre, por ejemplo, en los modelos de termoelasticidad o hidroelasticidad. En estos casos, si bien el conocimiento de los aspectos más relevantes de la ecuación del calor y de ondas aisladamente puede no ser suficiente a causa de las interacciones de las diferentes componentes, sí resulta indispensable para entender el comportamiento global del sistema.

Por todo ello resultan naturales e importantes todos los aspectos matemáticos fundamentales de estas dos piezas claves de los modelos de la mecánica de medios continuos: la ecuación de calor y la de onda.

Cabe señalar que estos modelos aparecen también, con otras interpretaciones de las funciones desconocidas y de los parámetros del modelo, en el estudio de procesos biológicos, fisiológicos, económicos, etc., y no solamente en la física.

En consecuencia, se requiere un estudio exhaustivo de estos modelos que involucran no sólo el análisis cualitativo de los problemas con condiciones iniciales y de contorno asociados a ellos, sino también su análisis numérico, con el objetivo de buscar soluciones aproximadas, lo cual no será tratado en el presente texto, donde básicamente se dedicará a obtener expresiones explícitas de las soluciones en el caso cuando los modelos se expresen en su forma más simple, por ejemplo, cuando tienen coeficientes constantes.

Sin embargo, cuando estas ecuaciones modelan fenómenos en medios heterogéneos cuyas componentes tienen diferentes propiedades físicas, adoptan formas más complejas y se presentan con coeficientes variables, dependientes de la variable espacial x, de la variable temporal t o de ambos.

Hay otros dos términos que son clave en la modelación de fenómenos complejos que son: **no lineal** y **no determinista**, los cuales quedan fuera de los objetivos de este curso. No obstante, de nuevo se puede asegurar que los elementos aquí expuestos serán sin duda de gran utilidad, si no indispensables, a la hora de adentrarse en otros modelos más complejos que involucran términos no-lineales y estocásticos.

Desde un punto de vista estrictamente matemático, no hay alguna razón para distinguir la variable temporal t de las n variables espaciales $x_1,..,x_n$. Si se tratara simplemente de una variable más, indistinguible de las otras, puede denotarse como x_0 o x_{n+1}. Sin embargo, de acuerdo a la realidad física que se modela con estas ecuaciones, conviene distinguir la variable temporal de las variables espaciales.

En algunas ocasiones es posible reducir las EDP a EDO para funciones de la variable temporal $u(\cdot,t)$ de la variable temporal t que también toman valores en un espacio de funciones de la variable espacial.

Esta distinción entre variable temporal y variables espaciales es también conveniente para traducir las ecuaciones físicas a las soluciones de los modelos en lo que, por convención, pueden llamarse **condiciones iniciales** y **condiciones de contorno**.

Más adelante revisarás que los problemas clásicos de la física matemática se reducen al estudio de EDP de primer orden de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = a(x_1, \dots, x_n, u) \tag{1.1.3.1}$$

y a EDP de segundo orden de la forma:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div\,(p\;grad\;u) - q\;u + F(x,t) \tag{1.1.3.2}$$

que es la forma general de la ecuación clásica de propagación de ondas,

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = div\,(p\;grad\;u) - q\;u + F(x,t) \tag{1.1.3.3}$$

es la forma general de la ecuación clásica de difusión, y finalmente la ecuación:

$$-div\,(p\;grad\;u) + q\;u = F(x) \tag{1.1.3.4}$$

que describe los correspondientes procesos estacionarios.

Se denota mediante $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ la región espacial en la cual transcurre el correspondiente proceso y por S su frontera, la cual se considera como una superficie suave a trozos.

La región Ω es la región de definición de la ecuación (1.1.3.4), mientras que la región de definición de las ecuaciones (1.1.3.2) y (1.1.3.3) es el cilindro abierto $\Omega \times (0, T)$ de altura T con base Ω, su frontera está compuesta por la superficie lateral $S \times [o, T]$, la “base” $\bar{\Omega} \times \{0\}$ y la “tapa” $\bar{\Omega} \times \{T\}$.

En adelante se supondrá que los coeficientes ρ, p y q en las ecuaciones (1.1.3.2)-(1.1.3.4) no dependen del tiempo t y que, de acuerdo a su sentido físico, deben satisfacer $\rho(x) > 0,\; p(x) > 0,\; q(x) \geq 0,\; x \in \bar{\Omega}$. Finalmente, de acuerdo con el significado matemático de estas ecuaciones, es necesario considerar $\rho \in C(\bar{\Omega}), p \in C^1(\bar{\Omega})$ y $q \in C(\bar{\Omega})$.

En el caso de la ecuación (1.1.3.1), se supondrá que las funciones $a_i, a \in C^1(\bar{\Omega})$ y además $\sum_{i=1}^{n} a_i + a^2 \not\equiv 0$ en $\bar{\Omega}$.

La condición auxiliar que se impone para obtener una solución única, al menos localmente en t, de la ecuación $(1.1.3.1)$, conduce al llamado problema de Cauchy para ecuaciones cuasilineales parciales de primer orden.

El planteamiento del problema de Cauchy para estas ecuaciones está relacionado con el concepto de curva característica que será introducido en el tema 1.3., y que son precisamente aquellas curvas en Ω a lo largo de las cuales las soluciones de $(1.1.3.1)$ son constantes. El tema 1.3. se dedica al estudio del problema de Cauchy para el caso lineal cuando las funciones a_i no dependen de la solución u y $a \equiv 0$.

En lo siguiente se introducirán las condiciones iniciales y de contorno para las ecuaciones $(1.1.3.2)$ y (1.1.3.4). En el tema 1.3. Básicamente el significado de estas condiciones en el caso particular de cada una de las ecuaciones.

Para una descripción completa de un proceso físico, no es suficiente con dar únicamente la ecuación que describe el proceso, sino también el estado inicial del proceso (condiciones iniciales) y el comportamiento de la solución en la frontera de la región en la cual transcurre el proceso, durante todo el intervalo de tiempo de interés.

Se obtiene, entonces, un problema asociado a la EDP que se llama un **problema de contorno**. Existen tres tipos básicos de problemas de contorno para las ecuación del tipo $(1.1.3.2)$-$(1.1.3.4)$.

a) El **problema de Cauchy** para ecuaciones del tipo parabólico e hiperbólico, donde se dan únicamente condiciones iniciales, la región Ω coincide con todo el espacio $\mathbb{R}^n$ y no se imponen condiciones en la frontera.

b) Los **problemas de Cauchy** para ecuaciones de tipo elíptico, donde se imponen condiciones adicionales a la solución en la frontera S de Ω, y naturalmente no se exigen condiciones iniciales.

c) Los **problemas mixtos** para las ecuaciones de tipo parabólico e hiperbólico donde se exigen condiciones iniciales y de frontera adicionales y $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Problema de Cauchy. Para la ecuación hiperbólica (1.1.3.2), el problema de Cauchy se formula en la forma siguiente: hallar una función $u(x,t)$ de clase $C^2(t>0) \cap C^1(t \geq 0)$ que satisfaga la ecuación (1.1.3.2) en el semiespacio $t>0$ y las siguientes condiciones iniciales en $t=0$:

$$u|_{t=+0} = u_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0_+} = u_1(x) \tag{1.1.3.5}$$

Sobre los datos del problema se exige que:

$$F \in C(t>0), \qquad u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n), \qquad u_1 \in C(\mathbb{R}^n) \tag{1.1.3.6}$$

Para la ecuación parabólica (1.1.3.3) el problema de Cauchy se formula de la siguiente forma: hallar una función $u(x,t)$ de clase $C^2(t>0) \cap C(t \geq 0)$ que satisfaga la ecuación (1.1.3.3) en el semiespacio $t>0$ y la condición inicial en $t=0$:

$$u|_{t=+0} = u_0(x) \tag{1.1.3.7}$$

y se considera que

$$F \in C(t>0), \qquad u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \tag{1.1.3.8}$$

Verás más adelante que existe un planteamiento general del problema de Cauchy para EDP de segundo orden. Este planteamiento general consiste en encontrar una solución $u(x,t)$ de la EDP que sobre una superficie Σ de codimensión 1 dada en $\mathbb{R}^n$, satisfaga las condiciones de contorno:

$$u|_\Sigma = u_0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = u_1 \tag{1.1.3.9}$$

donde n es el vector normal unitario a Σ. En el tema 2.1 se define el concepto de superficie característica y se muestra que el problema de Cauchy está sobredeterminado cuando se plantea sobre una superficie característica, es decir, tiene sentido plantear el problema de Cauchy únicamente sobre superficies características. En este caso, cuando la EDP tiene coeficientes analíticos, los datos u_0 y u_1 son analíticos y la superficie no característica Σ es analítica, el teorema de Cauchy-Kovalévskaya dice que el problema de Cauchy tiene una única solución local, definida en una vecindad de Σ que también es analítica.

En un teorema siguiente se demostrará que la superficie $\{t=0\}$ es una superficie non característica para la ecuación hiperbólica (1.1.3.2), y por ello el problema particular de Cauchy

$(1.1.3.5)$ tiene solución cuando los datos son analíticos. Se puede ver que la solución de este problema de Cauchy también existe, y es única, si se exigen únicamente las condiciones más restrictivas $(1.1.3.6)$.

También revisarás que $\{t = 0\}$ es una superficie característica para la ecuación parabólica $(1.1.3.3)$, y que la ecuación elíptica $(1.1.3.4)$ no admite superficies características reales. Es por ello que el problema de Cauchy $(1.1.3.3)$ tiene una formulación diferente al planteamiento general $(1.1.3.9)$.

Se puede demostrar que el problema de Cauchy para las ecuaciones elípticas es un problema mal planteado en el sentido de que su solución es muy sensible a pequeñas variaciones de los datos de Cauchy.

Problema de contorno para ecuaciones de tipo elíptico

El problema de contorno más general para la ecuación elíptica $(1.1.3.4)$ consiste en hallar una función $u(x)$ de clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que satisfaga la ecuación $(1.1.3.4)$ es la región Ω y una condición de contorno de la forma

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = \psi \qquad (1.1.3.10)$$

sobre la frontera S de Ω, donde α y β son funciones continuas sobre S, con:

$$\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \text{ y } \alpha + \beta > 0. \qquad (1.1.3.11)$$

Los siguientes casos particulares de la condición de contorno $(1.1.3.10)$ tienen un significado práctico importante, según se verá más adelante en el tema 1.2:

Condición de contorno de Dirichlet ($\boldsymbol{\alpha = 1,\ \beta = 1}$)

$$u|_S = \varphi \qquad (1.1.3.12)$$

Condición de contorno de Neumann ($\boldsymbol{\alpha = 0,\ \beta = 1}$)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi \qquad (1.1.3.13)$$

Condición de contorno de Robin; en este caso, si $\{S_1, S_2\}$ es una partición de S, se cumple:

$$u|_{S_1} = \varphi, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_2} = \psi \qquad (1.1.3.14)$$

Los correspondientes problemas de contorno se llaman: de Dirichlet, de Neumann y de Robin para la ecuación (1.1.3.4), respectivamente.

Problemas mixtos. Para la ecuación hiperbólica (1.1.3.2) el problema de contorno mixto se plantea de la siguiente forma:

Hallar una función $u(x,t)$ de clase $C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$ que satisfaga la ecuación (1.1.3.2) en el cilindro $\Omega \times (0,T)$, la condición inicial (1.1.3.5) cuando $t = 0$ y $x \in \overline{\Omega}$ y condiciones de contorno del tipo (1.1.3.10) donde α y β son funciones de la variable espacial que satisfacen las condiciones (1.1.3.11) y $\psi(x,t)$ es una función definida en $S \times [0,T]$. Adicionalmente, es necesario exigir las condiciones de suavidad

$$F \in C(\Omega \times (0,T)), \qquad u_0 \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad u_1 \in C(\overline{\Omega}), \qquad \psi \in C(S \times [0,T]) \qquad (1.1.3.16)$$

Análogamente, para la ecuación parabólica (1.1.3.3) el problema mixto se plantea de la forma:

Hallar una función $u(x,t)$ de clase $C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ y que satisface la ecuación (1.1.3.3) en $\Omega \times (0,T)$, la condición inicial (1.1.3.7) y la condición de frontera (1.1.3.10), satisfaciendo las condiciones (1.1.3.11).

Es posible demostrar que no siempre existen soluciones de los problemas de contorno formulados que tengan suavidad de clase C^1 hasta la frontera de la región de definición del problema. Es por ello que, en general, se requiere que la solución sólo sea continua hasta la frontera de la región. Esta formulación es natural cuando las condiciones de contorno del problema no contienen primeras derivadas de la solución como ocurre, por ejemplo, en el caso de la condición de Neumann.

Si intervienen primeras derivadas de la solución en las condiciones de contorno es necesario indicar, en cada caso, el sentido en que se interpreta el cumplimiento de la condición de contorno. Por ejemplo, en el caso del problema mixto para la ecuación hiperbólica $(1.1.3.2)$, la segunda condición inicial en $(1.1.3.5)$ se interpreta en sentido de $L_2(\Omega)$, es decir:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - u_1 \right\|_{L_2(\Omega)} \longrightarrow 0, t \to +0 \qquad (1.1.3.17)$$

En el caso del problema de Neumann para la ecuación de Laplace, la condición $(1.1.3.13)$ se interpreta en el sentido que $\frac{\partial u}{\partial n_x}(x') \quad (x \in S)$, converge a $u_1(x)$ cuando $x' \in \Omega$ converge a x por una dirección no tangencial a S.

1.2. Ejemplos clásicos de EDP de la física matemática y significado de los problemas de contorno asociados

La descripción o modelación matemática de muchos procesos físicos conduce a EDP, a ecuaciones integrales y, en algunos casos, ecuaciones integro-diferenciales.
En esta sección se deducen algunas de las EDP principales de la física matemática y se plantean los problemas de contorno que tienen un significado físico para estos modelos. Verás que una amplia clase de problemas importantes para la física matemática se describe a través de EDP lineales de segundo orden. Una característica importante de los problemas matemáticos obtenidos es su carácter universal, dado que un mismo modelo puede representar diferentes situaciones físicas si se abstrae del significado físico de la función desconocida en cada situación.

1.2.1. Ecuación de la difusión: la ecuación del calor

Los procesos de difusión del calor y de partículas en un medio se describen por la ecuación general de difusión:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(p\, \nabla u) - q\, u + F(x,t) \qquad (1.2.1.1)$$

En lo que sigue te dedicarás a deducir la ecuación de difusión del calor. En este caso $u(x,t)$ representa la temperatura del medio en el punto $x=(x_1,x_2,x_3)$ en el instante t. En el caso de la difusión de partículas $u(x,t)$ representa la concentración de la sustancia en el punto x en el instante t.

Se considera un medio isotrópico (es decir, el calor se conduce por igual en cualquier dirección)

y se denota mediante:

- $\rho(x)$ la densidad del medio.
- $c(x)$ la capacidad calórica específica (cantidad de calor necesaria por unidad de masa para aumentar la temperatura en el punto x en un grado).
- $k(x)$ el coeficiente de conducción del calor (la ley empírica de Fick dice que el flujo de calor o de partículas J es proporcional y opuesto al gradiente de temperatura o al gradiente de concentración de partículas, la formulación matemática de esta ley se expresa en la forma: $J=-k(x)\nabla u$).
- $F(x,t)$ la intensidad de la fuente de calor.

Calcula el balance de calor en cualquier volumen V del medio en el intervalo de tiempo $(t,t+\Delta t)$. Sea S la frontera de V y n el vector unitario normal exterior a S. De acuerdo a la ley de Fourier, a través de S llega o sale de V una cantidad de calor a igual a:

$$Q_1=\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}ds\,dt=\int_S (k\,\nabla u,n)ds\,dt.$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss:

$$Q_1=\int_V div(k\,\nabla u)\,dx\,dt.$$

Por otra parte, el aporte de las fuentes de calor al calor en V es igual a:

$$Q_2 = \int_V F(x,t)\,dx\,dt.$$

Como la temperatura en el intervalo $(t, t+dt)$ crece (o decrece) en una cantidad:

$$u(x,t+dt) - u(x,t) \approx \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

para que ello ocurra se requiere gastar una cantidad de calor igual a:

$$Q_3 = \int_V c\,\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt.$$

Estableciendo un balance se tiene que $Q_3 = Q_1 + Q_2$, de donde se concluye que:

$$\int_V \left[div(k\,\nabla u) + F - c\,\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right] dx\,dt = 0,$$

y por la arbitrariedad de V se obtiene la llamada **ecuación de difusión del calor**:

$$c\,\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(k\,\nabla u) + F(x,t) \qquad (1.2.1.2)$$

Si c, ρ y k son constantes, entonces se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f \qquad (1.2.1.3)$$

donde $a = \sqrt{\frac{k}{c\varrho}}$ y $f = \frac{F}{c\varrho}$, que es la llamada ecuación clásica de conducción del calor.

Para obtener una única solución de esta ecuación se debe dar la distribución inicial de la temperatura:

$$u(x,t_0) = T(x), x \in \Omega\ (Condición\ inicial)$$

y una condición de contorno de alguno de los tipos siguientes:

a) $u|_s = u_0(x,t)$, se conoce la distribución de temperatura en la frontera durante todo el proceso (condición de Dirichlet).

b) $-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = u_1(x,t)$, se conoce el flujo de calor en la frontera durante todo el proceso (condición de Neumann).

c) Si en S hay intercambio de calor, entonces, de acuerdo a la ley de Newton:

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + \hbar(u - u_0)|_S = 0$$

donde $\hbar$ es el coeficiente de intercambio calórico y u_0 es la temperatura del medio circundante (condición mixta).

Un caso particular importante puedes observarlo cuando f depende de una dimensión espacial, en cuyo caso la función u se busca dependiente de una variable espacial unidimensional y se dice que la correspondiente ecuación describe la propagación del calor en una barra.

Observación: Una ecuación intermedia es la ecuación de la línea de transmisión, también conocida como ecuación del cable o ecuación telegráfica, la cual describe el paso de la corriente a través de un cable que tiene propiedades conductivas y capacitivas y $v(x,t)$ representa la variación del potencial a lo largo del cable en cada instante de tiempo

$$\frac{1}{r_l}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = c\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{r}$$

donde

- r_l denota la resistencia longitudinal al paso de la corriente por unidad de área de la sección transversal del cable, y el término $-\frac{1}{r_l}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ representa la carga total por unidad de longitud acarreada por la corriente longitudinal.
- c representa la capacitancia del cable y el término $c\frac{\partial v}{\partial t}$ es llamado corriente de desplazamiento local o corriente capacitiva, y corresponde a la capacidad del cable para almacenar carga.
- r es la resistencia superficial del cable y el término $\frac{v}{r}$ denota la corriente que pasa a través de las paredes del cable en la dirección radial.

1.2.2. Ecuaciones de la cuerda y la membrana vibrantes

Observa cómo muchos problemas de la mecánica (oscilaciones de cuerdas, barras, membranas y volúmenes tridimensionales) y de la física (oscilaciones electromagnéticas) conducen a ecuaciones de la forma:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(p\,\nabla u) - q\,u + F(x,t) \qquad (1.2.2.1)$$

donde

- $x = (x_1, \dots, x_n), n = 1,2,3.$
- $u(x,t)$ denota la amplitud de oscilación con respecto a la posición de equilibrio.
- ρ, p, q denotan las propiedades del medio donde se estudia el proceso de oscilatorio (por ejemplo, ρ es la densidad de masa del medio).
- $F(x,t)$ es la intensidad de la perturbación externa.

De las definiciones de los operadores divergencia y gradiente, se puede ver que:

$$div(p\,\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Deducirás la ecuación anterior a partir del ejemplo de las pequeñas oscilaciones transversales de una cuerda elástica alrededor de la posición de equilibrio que coincide con un segmento del eje x.

Una cuerda es un hilo elástico que se deforma ante una flexión. En el estado de equilibrio, supón que sobre la cuerda sólo actúa la fuerza de tensión y el objetivo es describir las oscilaciones pequeñas transversales de la cuerda cuando sobre ella comienzan a actuar fuerzas aplicadas en la dirección transversal a su posición de equilibrio.

El desplazamiento que sufre la cuerda en la dirección transversal a cada punto x de la posición de equilibrio en el instante t se denota por $u(x,t)$, luego $u = u(x,t)$ es la ecuación de la forma que adquiere la cuerda en el instante de tiempo t.

Se consideran sólo pequeñas oscilaciones, es decir, aquellas para las cuales $\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ es pequeño, y por eso se desprecia en los cálculos todos los términos en potencias de $\frac{\partial u}{\partial x}$.

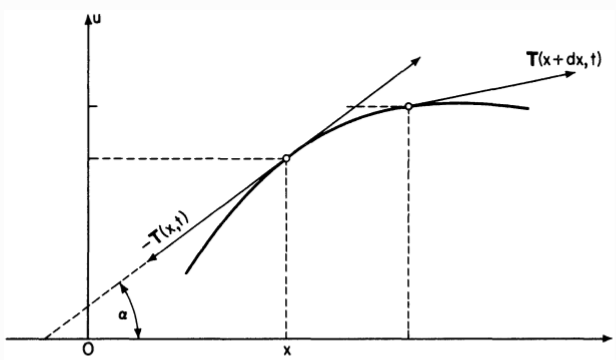

Figura 1. Tensión T(x,t), dirigida en dirección tangente.

Como la cuerda no se resiste a ser flexionada (a diferencia de una barra), entonces, en cada punto x se genera una tensión $T(x,t)$ dirigida en dirección tangente a la cuerda en el punto x.

Con la suposición de pequeñas oscilaciones, cualquier sección (a,b) de la cuerda no cambia su longitud al ser deformado, pues

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx b - a.$$

y por la ley de Hook, como la relación de tensión y deformación es lineal y la deformación es constante, entonces $|T(x,t)| = cte = T_0$.

Denota mediante $F(x,t)$ la densidad de fuerzas externas actuando sobre la cuerda en dirección perpendicular al eje x en el plano (x,u), y sea $\rho(x)$ la densidad lineal de masa de la cuerda en x, así que $\rho(x)dx$ es la masa del elemento de cuerda $(x, x+dx)$.

Ahora, para componer la ecuación de movimiento de la cuerda en cada elemento $(x, x+dx)$, nota que sobre él actúan (Figura 1):

- Fuerzas de tensión $T(x+dx,t)$ y $-T(x,t)$ y la fuerza externa.
- De acuerdo a la ley de Newton, la fuerza resultante debe ser igual al producto de la masa elemento $(x, x+dx)$ multiplicada por su aceleración.

Si proyectas esta igualdad vectorial sobre el eje u, obtienes:

$$T_0 \operatorname{sen} \alpha(x+\Delta x) - T_0 \operatorname{sen} \alpha(x) + F(x,t)dx = \rho(x)dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Según la aproximación, se tiene que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} \approx \tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$$

y, por lo tanto

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{dx}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] + F(x,t)$$

Cuando $dx \longrightarrow 0$ se tiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F \qquad (1.2.2.2)$$

que es la llamada **ecuación de pequeñas oscilaciones transversales de una cuerda**.

Cuando $F = 0$ se le llama **ecuación de oscilaciones libres,** y si $F \neq 0$, se le llama **ecuación de oscilaciones forzadas.**

Si F no depende de t, entonces se pueden buscar soluciones de la ecuación (1.2.2.2) que se llaman estados de equilibrio para una cuerda sujeta a una distribución de fuerzas transversales $F(x)$. Obviamente los estados de equilibrio satisfacen la ecuación estacionaria $T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F=0$.

Si ρ es constante y se define $f=\frac{F}{\rho}$, $a^2=\frac{T_0}{\rho}$, la ecuación resultante es la llamada **ecuación clásica de ondas unidimensional** o **ecuación clásica de oscilaciones de una cuerda:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f \qquad (1.2.2.3)$$

la cual se generaliza a dimensiones mayores mediante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f \qquad (1.2.2.4)$$

En el caso de dimensión 2, se obtiene la **ecuación de oscilaciones de una membrana**

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t^2}=T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+F$$

y en dimensión 3, la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)+f$$

representa la **propagación del sonido en un medio homogéneo** y también la propagación de ondas electromagnéticas en un medio homogéneo no conductor.

Esta ecuación la satisfacen también la densidad y la presión en un gas y su potencial del campo de velocidades, así como las componentes de la tensión de un campo eléctrico y magnético y sus correspondientes potenciales.

Una ecuación del tipo (1.2.2.2) también describe las oscilaciones longitudinales de una barra elástica

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t) \tag{1.2.2.5}$$

donde:

- $S(x)$ es el área de la sección transversal.
- $E(x)$ es el módulo de Young longitudinal en el punto x.
- $\rho(x)$ es la densidad longitudinal de la barra.
- $F(x,t)$ es la densidad de fuerzas aplicadas en la dirección longitudinal.

En este caso, $u(x,t)$ denota el desplazamiento longitudinal con respecto al equilibrio en el punto x y en el instante de tiempo t.

Cabe mencionar que para las oscilaciones transversales de una barra se tiene una ecuación donde aparecen derivadas parciales de 3er orden, ya que en este caso aparecen nuevas tensiones debidas a la rigidez de la barra.

Estas ecuaciones tienen infinitas soluciones, por ejemplo, si $f = 0$, toda función de la forma $u(x,t) = \alpha x + \beta$ con constantes α, β arbitrarias son solución de $(1.2.2.2)$.

Desde el punto de vista de las aplicaciones físicas, se necesita encontrar una única solución, para lo cual hay que imponer condiciones adicionales a la solución $u(x,t)$ buscada. Estas condiciones se llaman condiciones iniciales y de contorno, al igual que en el caso de la ecuación de difusión. De un análisis físico se ve que es necesario dar el desplazamiento de la cuerda con respecto a la posición de equilibrio, así como la velocidad de la cuerda en el instante inicial: $u(x,0)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$.

Además, se necesita imponer el régimen oscilatorio en los extremos en todo instante de tiempo (condiciones de contorno).

Diferentes tipos de condiciones de contorno:

a) Si el extremo x_0 de la cuerda se mueve según una ley $\mathcal{M}(t)$, entonces:

$$u(x_0, t) = \mathcal{M}(t).$$

La condición $\mathcal{M}(t) \equiv 0$ corresponde al caso cuando el extremo está fijo durante el proceso oscilatorio y se llama **condición de extremo fijo**.

b) Si en el extremo actúa una fuerza $\nu(t)$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = \frac{\nu(t)}{T_0}$$

En el extremo sobre el que no actúa ninguna fuerza se tiene que: $\nu(t) \equiv 0$, y en ese caso se obtiene la llamada **condición de extremo libre**.

c) Si el extremo x_0 está fijado por un resorte elástico a la base y $\mathcal{k}$ es el coeficiente de rigidez de la fijación y E el módulo de Young del muelle, entonces se tiene la condición mixta

$$E\frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{k}u|_{x=x_0} = 0.$$

Por comodidad, en ocasiones se utilizará la notación

$$\square_a^n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})$$

que representa el operador de ondas en $\mathbb{R}^n$ con velocidad de propagación a, también llamado operador de D'Alembert.

1.2.3. Ecuaciones estacionarias y ecuaciones para los potenciales de campos ideales: las ecuaciones de Laplace y Poissson

Para procesos estacionarios donde $F(x,t)=F(x)$, se puede buscar soluciones de las ecuaciones de oscilaciones y difusión en la forma $u(x,t)=u(x)$. En este caso, para $u(x)$ se obtiene la ecuación estacionaria:

$$-div\ (p\ \nabla u)+q\ u=F(x) \qquad (1.2.3.1)$$

que, en el caso de dimensión 1, se llama **ecuación de Sturm-Liouville**.

Cuando $p=cte$, $q=0$, se obtiene la **ecuación de Poisson:**

$$\Delta u=-f, \qquad f=\frac{F}{p} \qquad (1.2.3.2)$$

Si $f=0$, se le llama **ecuación de Laplace**:

$$\Delta u=0,$$

cuyas soluciones son las llamadas funciones armónicas, que en dos dimensiones son la parte real e imaginaria de las funciones analíticas.

Para obtener una solución única en el caso de un medio acotado Ω, se debe dar una de las 3 siguientes condiciones de contorno en la frontera S de Ω:

- Dirichlet: $u|_S=\varphi(x)$
- Neumann: $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\psi(x)$
- Robin (mixta): $a\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S+bu|_S=g(x)$

donde $\varphi(x),\ \psi(x)$ y $g(x)$ son funciones dadas definidas en la frontera S de Ω.

Supón que en la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(x,t)$$

la perturbación externa es periódica con frecuencia ω y amplitud $a^2 f(x)$: $f(x,t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}$, si se busca $u(x,t)$ en la forma $u(x,t) = u(x) e^{i\omega t}$, entonces, para $u(x)$se obtiene la ecuación estacionaria:

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}. \tag{1.2.3.3}$$

que se llama **ecuación de Helmholtz**.

Un problema de contorno importante para la ecuación de Helmholtz es el llamado problema de difracción de ondas. Supón que $f \equiv 0$ en la ecuación $(1.2.3.3)$, que el medio es el exterior de una región acotada Ω, y que hay una onda plana que viaja desde ∞ en la dirección de un vector fijo γ y que tiene la forma:

$$e^{ik(\gamma,x)}, \qquad |\gamma| = 1, k > 0$$

donde (γ, x) denota el producto escalar del vector fijo γ con el vector de posición espacial x. La **onda plana** $e^{ik(\gamma,x)}$ se ve alterada al encontrarse con el obstáculo que representa la región acotada Ω. Si Ω representa un **obstáculo absorbente blando,** en ese caso se supone que se satisface la condición homogénea de Dirichlet $u|_S = 0$. En el caso de un obstáculo duro, se supone la condición de rebote $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, que no es más que la condición homogénea de Neumann.

Se puede expresar la onda u como suma de la onda plana incidente en el obstáculo y una onda reflejada: $u(x) = e^{ik(\gamma,x)} + v(x)$.

El obstáculo genera una onda reflejada $v(x)$, la cual, lejos de los centros dispersores es cercana a la onda esférica

$$v(x) = A\left(\frac{x}{|x|}\right)\frac{e^{ik|x|}}{|x|} + o(|x|^{-1})$$

donde $A(s)$ se llama amplitud de *scattering* de la onda reflejada.

Para que esto se cumpla, es necesario exigir que cuando $|x| \longrightarrow \infty$, $v(x)$, debe satisfacer las condiciones de radiación de Sommerfeld:

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \qquad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - i\,k\,v(x) = o(|x|^{-1}) \tag{1.2.3.4}$$

Utilizando estas condiciones es posible encontrar el comportamiento de la amplitud de *scattering*.

1.2.4. Ecuaciones de Maxwell: la ecuación de ondas

Supón que en un medio se tiene un campo electromagnético variable. Se denota mediante $E(x,t) = (E_1, E_2, E_3)$ la tensión del campo eléctrico, $H(x,t) = (H_1, H_2, H_3)$ la tensión del campo magnético, $\rho(x)$ la densidad de carga eléctrica, ε la constante dieléctrica del medio, $\mathcal{M}$ el coeficiente de penetrabilidad magnética del medio, $I(x,t) = (I_1, I_2, I_3)$ la corriente conductiva. Entonces, se satisface el sistema de ecuaciones de Maxwell:

$$div(\varepsilon E) = 4\pi\rho, div(\mu H) = 0\ (Ausencia\ de\ fuentes\ de\ campo\ magnetico) \tag{1.2.4.1}$$

$$rot\ E = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu H)}{\partial t}(Ley\ de\ Faraday) \tag{1.2.4.2}$$

$$rot\ H = \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(Ley\ de\ Ampere) \tag{1.2.4.3}$$

donde $c = 3 \times 10^{10}\ cm/s$ es la velocidad de la luz en el vacío.

Se analizarán a continuación algunos casos particulares de las ecuaciones de Maxwell:

a) $\rho = 0,\ \varepsilon = cte, \mathcal{M} = cte, I = \sigma E$ (Ley de Ohm) σ-conductividad (constante). Aplicando a (1.2.4.2) y (1.2.4.3) el operador rot y usando (1.2.4.1), para las componentes de E y H se obtiene la llamada ecuación telegráfica:

$$_{a}u + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ \ a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mathcal{M}}}\ (Ecuacion\ de\ ondas\ con\ fricción)$$

b) $I = 0,\ \varepsilon = cte, \mathcal{M} = cte$. Se introduce el potencial electromagnético cuatridimensional $(\varphi_0, \vec{\varphi}) = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ y se buscan las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en la forma:

$$E = \nabla\varphi_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}, \qquad H = \frac{1}{\mathcal{M}}\, rot\, \vec{\varphi} \tag{1.2.4.4}$$

y para las componentes del potencial electromagnético se satisfacen las ecuaciones de ondas:

$$\Box_a \varphi_0 = -\frac{4\pi c^2}{\varepsilon\mathcal{M}}\rho, \qquad \Box_a \vec{\varphi} = 0 \tag{1.2.4.5}$$

y la condición de Lorentz:

$$\frac{\mathcal{M}\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} - div\ \varphi = 0 \tag{1.2.4.6}$$

c) Si el proceso es estacionario, las ecuaciones de Maxwell se transforman en las ecuaciones de la electrostática:

$$div\ (\varepsilon E) = 4\pi\rho, \qquad rot\ E = 0 \tag{1.2.4.7}$$

y de la magnetostática

$$div\ (\mathcal{M}H) = 0, \qquad rot\ H = \frac{4\pi}{c} I \tag{1.2.4.8}$$

Del hecho que $rot\ E = 0$, se tiene que $E = \nabla u$ (u potencial electrostático), y de la primera ecuación de la electrostática se tiene:

$$div(\varepsilon\ \nabla u) = 4\pi\rho \tag{1.2.4.9}$$

Si $\varepsilon = cte$, se obtiene la ecuación de Poisson $\Delta u = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$ para el potencial electrostático.

1.2.5. ecuaciones de primer orden: conservación de masa, Euler y las ecuaciones de la mecánica de fluidos

---

Ley de conservación de la masa en un medio en movimiento:

Considera un medio donde las partículas ubicadas en el punto $\bar{x} = (x, y, z)$ se mueven con una velocidad $v(\bar{x}, t)$ en cada instante de tiempo t. Entonces, si denotas por $\rho(\bar{x}, t)$ la densidad variable del medio, tendrás que en cualquier subregión Ω de la región donde se mueven las partículas, se cumple:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho(\bar{x}, t) d\mathrm{v} = -\int_{\partial\Omega} \rho\, v \cdot \vec{n}\, ds = -\int_{\Omega} div\, \rho v\, d\mathrm{v}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \rho v\, d\mathrm{v} = 0.$$

Por la arbitrariedad de Ω se concluye que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \rho v = 0 \qquad (1.2.5.1)$$

que es la ecuación que describe cómo se transporta la masa de una sustancia en un campo de velocidades. Si, además, ρ no cambia a lo largo de las trayectorias de las partículas del medio en movimiento, entonces

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho \cdot v = 0 \qquad (1.2.5.2)$$

Pero de (1.2.5.1) se tiene que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho \cdot v + \rho\, div\, v = 0 \Rightarrow div\, v = 0$ que es la llamada **condición de incompresibilidad** en un fluido.

En un medio incompresible se cumple:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho \cdot v = 0, \qquad div\, v = 0 \qquad (1.2.5.3)$$

que son EDP de primer orden, ya que sólo contiene derivadas parciales de primer orden de la función desconocida.

Si ρ es constante, entonces la primera ecuación se cumple automáticamente y, en este caso, se caracterizan los flujos incompresibles por la condición $div\, v = 0$. Si, además, el flujo es irrotacional, o sea, cumple que $rot\ v = 0$, entonces $\vec{v} = \nabla u$ y la condición de incompresibilidad conduce a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ para el potencial del campo de velocidades.

Considera el movimiento de un líquido o gas ideal, es decir, donde no hay fuerzas intermoleculares y denota mediante $v(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$ el campo de velocidades del movimiento, $\rho(x,t)$ la densidad del medio, $p(x,t)$ la presión hidrostática, $f(x,t)$ la intensidad de fuentes que proveen líquido o gas al medio y $F(x,t) = (F_1, F_2, F_3)$ la intensidad de fuerzas masivas que actúan sobre el líquido o gas, entonces, estas magnitudes satisfacen el sistema no lineal de ecuaciones de la hidrodinámica de flujos ideales:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ (\rho v) = f$ (Ley del balance de masa) (**ecuación de continuidad**) $(1.2.5.4)$

$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v + \frac{1}{\rho}\nabla p = F$ (Ecuación de movimiento) (**ecuación de Euler**) $(1.2.5.5)$

El sistema de ecuaciones $(1.2.5.4)$ y $(1.2.5.5)$ se completa añadiendo una relación entre presión y densidad:

$$\Phi(p, \rho) = 0$$

Por ejemplo, para el movimiento adiabático de un gas, la ecuación de estado toma la forma:

$$p = \frac{cte}{\rho^{\kappa}}\ , \qquad \kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

donde:

c_p es la capacidad calorífica a presión constante y

c_v es la capacidad calorífica a volumen constante.

En un fluido con $\rho = cte$ la ecuación de continuidad se reduce a $div\, v = \frac{f}{\rho}$.

En particular, si el flujo es irrotacional, entonces se puede encontrar un potencial del campo de velocidades $(v = -\nabla u)$, y de la ecuación de continuidad sale que el potencial u satisface la ecuación de Poisson:

$$\Delta u = -\frac{f}{\rho}.$$

Si, además, consideras únicamente los movimientos de fluidos a velocidades bajas, entonces puedes eliminar los términos cuadráticos en la ecuación de Euler, obteniendo la ecuación de Euler linearizada.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\nabla p = F$$

Si, adicionalmente, se supone que $f = 0$ y que el campo de fuerzas masivas depende únicamente de la variable x, entonces aplicando el operador divergencia a la ecuación anterior, obtienes que la presión hidrostática también satisface una ecuación de Poisson del tipo:

$$\Delta p = \rho\, divF(x)$$

1.3. EDP de primer orden y su relación con las EDO: el problema de Cauchy

Las EDP de primer orden puedes incluirlas como parte integrante de un curso de EDO debido al hecho que se puede desarrollar un esquema de construcción de su solución general con base en los métodos que se desarrollan en la teoría de las EDO. No obstante, se ha preferido incorporarlas como un caso particular dentro de este curso de EDP.

1.3.1. EDP lineales y cuasilineales de primer orden

Una EDP de primer orden definido en un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$ se expresa en forma general como una relación funcional entre la variable independiente $x = (x_1, \dots, x_n) \epsilon\, \Omega$, una función desconocida u de la variable x y sus derivadas parciales de primer orden:

$$F(x, u, \nabla u) = 0$$

La EDP de primer orden se llama **lineal** cuando adquiere la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

y es **cuasilineal** cuando se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a(x_1, \dots, x_n, u)$$

donde las funciones a_i y a son diferenciables con respecto a sus argumentos en sus respectivos dominios de definición.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x) \neq 0 \,, \forall x \in \Omega$$

A continuación, conocerás el llamado **método de las características**, que se basa en los métodos desarrollados en la teoría de las EDO de primer orden y que permite expresar la solución general de las EDP lineales y cuasilineales de primer orden. Plantearás el llamado **problema de Cauchy** para estas ecuaciones, y con la ayuda del método de las características, verás bajo qué condiciones este problema tiene solución única y darás una expresión explícita de la solución.

Para una mejor comprensión del método de las características y el planteamiento del problema de Cauchy, se comenzará definiendo el problema de Cauchy de manera general y luego explicándolo en el caso particular de las EDP lineales de primer orden en dimensión 2, donde se visualiza mejor la idea geométrica que conduce al desarrollo del método. Posteriormente lo generalizarás al caso lineal en dimensión mayor a 2, y finalmente, al caso cuasilineal.

1.3.2. el problema de Cauchy

El problema de Cauchy puede definirse de manera general de la siguiente forma:

Encontrar la solución de

$$\begin{cases} F(x, u, \nabla u) = 0 \; tal\ que\ se\ verifique\ el\ dato \\ \quad u\big(\gamma(s)\big) = \phi(s), \qquad s \in \Omega \end{cases}$$

Este planteamiento es muy general y depende de la dimensión que se pueda plantear de las condiciones iniciales o condiciones de frontera a este sistema de ecuaciones. Diversos problemas prácticos, al ser modelados, arrojan un sistema de ecuaciones del tipo del problema de Cauchy, y para dar la función u que cumpla el sistema existen diversos métodos, aplicables cada uno bajo condiciones especiales, a continuación, se describe más a fondo el buen planteamiento del problema de Cauchy para ciertos tipos de EDP, dando, de la misma forma, para cada caso, el método de las características como una forma para encontrar una solución general. La razón de dar el planteamiento del problema de Cauchy para cada tipo está relacionada a que, a cada dimensión, orden o linealidad, corresponden distintas formas de expresar o determinar las condiciones iniciales o de contorno.

1.3.3. Método de las características y soluciones generales

Se presentan los planteamientos de las EDP lineales y cuasilineales de primer en dimensión igual o mayor que dos de manera independiente, así como las interpretaciones del método de las características en cada caso.

EDP lineales de primer orden en dimensión 2

Se explica la idea general para la construcción de la solución de una ecuación lineal de primer orden, en el caso particular de la ecuación:

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (1.3.3.1)$$

Donde A y B son funciones diferenciables en una región Ω de $\mathbb{R}^2$ y que no se anulan simultáneamente en ningún punto de Ω, es decir, $A^2 + B^2 \neq 0$.

Se presenta una interpretación geométrica a la solución de (1.3.3.1):

- u es solución de $A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow$ para cada punto (x,y) de Ω el vector $(A(x,y), B(x,y))$ es ortogonal al gradiente de u $((A,B) \perp \nabla u) \Leftrightarrow$ la derivada de u en la dirección de $(A(x,y), B(x,y))$ es nula.

Considera las curvas Γ en Ω, expresadas paramétricamente en la forma $\{x(t), y(t)\}$, cuyos vectores tangentes en cada punto son colineales a $\big(A\big(x(t), y(t)\big), B\big(x(t), y(t)\big)\big)$. Estas curvas satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = A(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = B(x,y) \tag{1.3.3.2}$$

y su espacio de fase está formado por las curvas integrales de la EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)} \tag{1.3.3.3}$$

o, equivalentemente, en forma diferencial $\frac{dx}{A(x,y)} = \frac{dy}{B(x,y)}$, las cuales se llaman **curvas características** de la EDP (1.3.3.1).

Del hecho que $A^2 + B^2 \neq 0$ sale que, por cada punto de Ω, pasa una y sólo una característica.

Cualquier solución u de (1.3.3.1) es constante sobre las curvas características, dado que:

$$\frac{d}{dt}u\big(x(t),y(t)\big)=\frac{\partial u}{\partial x}A+\frac{\partial u}{\partial y}B=0$$

es decir, las curvas características son curvas de nivel de las superficies integrales que corresponden a las soluciones de (1.3.3.1).

Considera ahora una curva $\gamma=\{\gamma_1(\theta),\gamma_2(\theta)\}$ en Ω, que en ningún punto sea tangente a alguna curva característica, y que corta a cada curva característica en un solo punto. Bajo estas suposiciones, se dice que la curva γ satisface la **condición de transversalidad**. Entonces, con respecto a γ y las curvas características, se puede definir un nuevo sistema de coordenadas en Ω en el cual a cada punto P de coordenadas (x,y) se le hace corresponder las nuevas coordenadas (θ,t), donde θ corresponde al valor del parámetro en el punto sobre γ que intersecta a la característica que contiene a P, y t es el valor del parámetro que corresponde al punto P sobre la característica. Sin pérdida de generalidad, el valor $t=0$ del parámetro corresponde a los a los puntos de intersección de cada curva característica con la curva γ. En particular, el parámetro θ puede tomarse como la distancia con signo, sobre la curva γ, a un punto fijo (x_0,y_0) ubicado sobre ella.

La correspondencia $(x,y)\leftrightarrows(\theta,t)$ es biyectiva, lo cual se expresa analíticamente en la forma:

$$\begin{aligned}x&=X(\theta,t), \qquad y=Y(\theta,t)\\ \theta&=\Theta(x,y), \qquad t=T(x,y)\end{aligned}\tag{1.3.3.4}$$

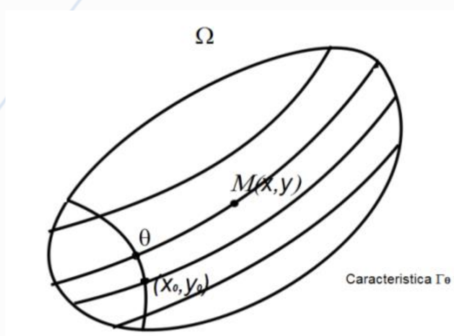

Figura 2. Característica Γe.

En las variables (θ, t), la ecuación de las curvas características adquiere la forma: $\frac{d\theta}{dt} = 0$, ya que el valor de θ es constante sobre cada característica, es decir, $\Theta(x,y) = c,\ \forall(x,y)$ en una misma característica.

En las variables (θ, t) se puede obtener fácilmente la solución de la EDP $A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

En efecto, si para la solución u de la ecuación $(1.3.3.1)$ se hace el cambio de variables $u(x,y) = u\big(X(\theta,t), Y(\theta,t)\big) = v(\theta,t)$, entonces se cumple que, para cada θ fijo $\big(X(\theta,t), Y(\theta,t)\big) = \big(x(t), y(t)\big)$, es la parametrización en t de la curva característica que intersecta a γ en θ, y por ello:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}A + \frac{\partial u}{\partial y}B = 0$$

Luego, para v la ecuación $(1.3.3.1)$ se reduce a:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \Rightarrow v = F(\theta)$$

y por lo tanto, se llega a que la expresión general de la solución de $(1.3.3.1)$ es $u(x,y) = F\big(\theta(x,y)\big)$ para cualquier función $F(\theta)$ derivable con respecto a la variable θ.

Nota que, dada la arbitrariedad de F, se puede sustituir $\Theta(x,y)$ en la expresión anterior por cualquier función $\varphi(x,y)$ diferenciable que sea constante sobre las características. Así se concluye que toda solución de $(1.3.3.1)$ se puede expresar en la forma:

$$u(x,y) = F(\varphi(x,y)) \qquad (1.3.3.5)$$

con F derivable.

Observa ahora bajo qué condiciones adicionales es posible obtener una solución única de la ecuación (1.3.3.1).

Con este objetivo, considera una curva γ que satisface la condición de transversalidad con respecto a las curvas características de la ecuación (1.3.3.1), y parametrizada mediante $\big(x(s), y(s)\big)$. Entonces, se dirá que u satisface la **condición de Cauchy** sobre γ si sobre los puntos de γ, los valores de u coinciden con los de una función dada ω, es decir, si:

$$u(x,y)|_{\gamma} = u\big(x(s), y(s)\big) = \omega(s) \qquad (1.3.3.6)$$

A la función $\omega(s)$ se le llama un **dato de Cauchy** sobre γ.

Si $\varphi(x,y)$ es una función diferenciable que es constante sobre las curvas características de la ecuación (1.3.3.1), entonces cada valor fijo del parámetro ξ determina una curva característica de dicha ecuación dada por:

$$\Gamma_{\xi} = \{(x,y): \varphi(x,y) = \xi\}$$

Entonces, al resolver la ecuación $\varphi(x(s), y(s)) = \xi$, se obtiene el único valor $\mathfrak{P}(\xi)$ del parámetro s que corresponde al punto de intersección $(x(\mathfrak{P}(\xi)), y(\mathfrak{P}(\xi)))$ de la curva γ con la curva característica Γ_{ξ}. De esta manera se puede representar el dato de Cauchy $\omega(s)$ con respecto al parámetro ξ, mediante $\omega(s) = \omega(\mathfrak{P}(\xi))$ y como sobre toda la curva característica Γ_{ξ} se tiene $\varphi(x,y) = \xi$, se obtiene que la función:

$$u(x,y) = \ \omega(\mathfrak{P}(\varphi(x,y))) \qquad (1.3.3.7)$$

Es la solución de la ecuación (1.3.3.1) que satisface la condición de Cauchy (1.3.3.6), donde, según la notación (1.3.3.5), se tiene $\omega \circ \mathfrak{P} = F$.

En el lenguaje de las EDO, a la función $\varphi(x,y)$ se le llama también una **primera integral** de la EDO de las curvas características.

El que la expresión $(1.3.3.7)$ sea la única solución del problema de Cauchy $(1.3.3.1)$, $(1.3.3.6)$ se desprende del hecho que si este problema tuviera dos soluciones u_1 y u_2, entonces $v = u_1 - u_2$, sería solución de la ecuación $(1.3.3.1)$ con condición de Cauchy nula sobre γ, pero como estas soluciones deben ser constantes sobre las características, las cuales cubren todo Ω, se concluye que $v \equiv 0$ en Ω y, por lo tanto, $u_1 = u_2$.

Ejemplo.

Supón $A = A_0,\ B = B_0$ constantes en $(1.3.3.1)$, y sea $v_0 = B_0/A_0$. Si interpretas $y = s$ como una variable espacial y $x = t$ como el tiempo, entonces la ecuación para las curvas características es:

$$\frac{dt}{A_0} = \frac{ds}{B_0} \Rightarrow d(s - v_0 t) = 0 \Rightarrow s - v_0 t = cte$$

de donde se concluye que las curvas características son rectas paralelas con pendiente v_0.

La función $\varphi(s,t) = s - v_0 t$ es constante sobre las características y, por lo tanto, la solución general de la correspondiente ecuación parcial es $u(s,t) = F(s - v_0 t)$, que se llama onda viajera de perfil F con velocidad v_0.

Si consideras el problema de Cauchy sobre la curva γ determinada por el eje de las t (el cual satisface la condición de transversalidad en este caso): $u(0,t) = \mu(t)$, para encontrar la correspondiente solución, comenzarás resolviendo la ecuación $\varphi(s,t)|_{s=0} = -v_0 t = \xi \Rightarrow t = \frac{\xi}{-v_0}$ y por lo tanto, la solución es $u(s,t) = \mu\left(\frac{\varphi(s,t)}{-v_0}\right) = \mu\left(t - \frac{s}{v_0}\right)$, que es una onda viajera con perfil $\mu\left(\frac{x}{v_0}\right)$ que se traslada con velocidad v_0 en la dirección positiva del eje s si $v_0 > 0$ y en dirección opuesta si $v_0 < 0$.

A continuación observa que, cuando el dato de Cauchy se impone sobre una curva característica, el correspondiente problema de Cauchy puede tener muchas soluciones o no tener solución. En efecto, sea γ_1 una curva característica de la ecuación $(1.3.3.1)$, considera los dos casos siguientes:

a) $u(x,y)|_{\gamma_1} = \omega_0 = cte$. En este caso, si $\varphi(x,y)$ es una función constante sobre las características de la ecuación parcial, tal que $\varphi(x,y)|_{\gamma_1} = \xi_1$, entonces, para cualquier función derivable $f(\xi)$ tal que $f(\xi_1) = \omega_0$, se tiene que la función $u(x,y) = f\big(\varphi(x,y)\big)$ es solución del correspondiente problema de Cauchy.

b) $u(x,y)|_{\gamma_1} \neq cte$. En este caso no existe solución del problema de Cauchy, dado que cualquier solución de la ecuación (1.3.3.1) debe ser constante sobre las curvas características.

EDP lineales de primer orden en dimensión n >2

En correspondencia con la ecuación de las curvas características (1.3.3.3), se definirá el sistema de EDO:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, \dots, x_n)$$

y sus trayectorias de fase:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} \tag{1.3.3.8}$$

cuyas soluciones se llamarán **curvas características** de la EDP lineal de primer orden:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{1.3.3.9}$$

definida en una región Ω de $\mathbb{R}^n$.

Supón que los coeficientes a_i no se anulan simultáneamente en ningún punto de Ω, es decir, satisfacen la condición

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x) \neq 0 \,, \forall x \in \Omega$$

de la cual se obtiene que, por cada punto de Ω, pasa una y sólo una curva característica.

A lo largo de cada característica, la solución de la EDP satisface:

$$\frac{d}{dt}u\big(x_1(t),\dots,x_n(t)\big)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}a_i=0$$

y por ello las soluciones de ($1.3.3.9$) son constantes sobre las curvas características.

Igual que en dimensión 2, se le llama **primera integral** del sistema ($1.3.3.8$) a cualquier función $\varphi(x_1,..x_n)$ que sea constante sobre sus soluciones, es decir, sobre las curvas características.

Se demuestra que el sistema ($1.3.3.8$) siempre tiene $n-1$ primeras integrales independientes $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}$, es decir, tales que:

$$\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}{D(x_1,\dots,x_{n-1})}\neq 0\ en\ \Omega \qquad (1.3.3.10)$$

Una manera de encontrar un sistema de primeras integrales es considerando una superficie Γ en Ω de dimensión $n-1$ que satisfaga una **condición de transversalidad** con respecto a las curvas características, es decir, cada curva característica intersecta a Γ en un solo punto y ninguna curva característica es tangente a la superficie Γ, es decir, en cada punto x de Γ, el espacio tangente $\tau(x)$ en ese punto no puede contener al vector $\big(a_1(x),\dots,a_n(x)\big)$, que es el vector tangente a la curva característica en x.

Por ejemplo, si la superficie Γ está dada por una ecuación de la forma $f(x_1,\dots,x_n)=0$, entonces el vector normal a Γ en $x=(x_1,\dots,x_n)\epsilon\Gamma$: $\vec{n}(x)=\nabla f(x_1,\dots,x_n)$ no puede ser ortogonal al vector $\big(a_1(x),\dots,a_n(x)\big)=\vec{a}(x)$, por lo tanto:

$$\nabla f\cdot\vec{a}\neq 0 \qquad (1.3.3.11)$$

Ésta es la expresión matemática de la condición de transversalidad.

Una vez dada la superficie Γ, se sabe que al menos localmente los puntos $x \in \Gamma$ admiten una parametrización del tipo:

$$x_1 = \alpha_1(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$$

$$x_2 = \alpha_2(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \qquad \text{donde } rg\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n-1}} = n-1$$

$$\vdots \qquad \qquad (1.3.3.12)$$

$$x_n = \alpha_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$$

Si Γ se da en forma paramétrica, entonces el espacio tangente $\tau(x)$ en cada punto x correspondiente a un valor de los parámetros $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ es el espacio vectorial generado por los vectores $\frac{\partial X}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial \theta_{n-1}}$, donde $X = \big(\alpha_1(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \dots, \alpha_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})\big)$, y por lo tanto, la condición $(1.3.3.11)$ es equivalente a que el vector $\vec{a}(x)$ no está generado por los vectores $\frac{\partial X}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial \theta_{n-1}}$, lo cual se expresa a través de la propiedad siguiente:

$$\det\left(\frac{\partial X}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial \theta_{n-1}}, \vec{a}\right) \neq 0.$$

donde el símbolo $\det$ representa el determinante de la matriz formada por los n vectores.

Si Γ está dada, se puede, entonces, construir la solución de la EDP de la siguiente forma. A cada juego de parámetros $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ se asocia el vector $\big(\alpha_1(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \dots, \alpha_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})\big) \in \Gamma$ y a este punto se le hace corresponder la solución del sistema $(1.3.3.8)$ (curva característica) que pasa por él, evaluada en el instante t:

$$x_i = X_i(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, t), \qquad i = 1, .., n$$

Por la unicidad de la solución del problema de Cauchy para las EDO, es claro que se puede expresar:

$$\theta_i = \Theta_i(x_1, \dots, x_n), \qquad i = 1, \dots, n-1, \qquad t = T(x_1, \dots, x_n).$$

Con respecto a las nuevas coordenadas $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, t$, la EDP $(1.3.3.9)$ se escribe en la forma simplificada $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, donde:

$$v(\theta_1,\dots,\theta_{n-1},t)=u\big(X_1(\theta_1,\dots,\theta_{n-1},t),\dots,X_n(\theta_1,\dots,\theta_{n-1},t)\big)$$

dado que al calcular $\frac{\partial v}{\partial t}$, se supone que $\theta_1,\dots,\theta_{n-1}$ son constantes, es decir, se considera que se está en una característica para la cual $\frac{\partial x_i}{\partial t}=a_i$. Pero, entonces, la solución general de (1.3.3.9) tiene la forma:

$$u(x_1,\dots,x_n)=F\big(\theta_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\theta_{n-1}(x_1,\dots,x_n)\big) \qquad (1.3.3.13)$$

para cualquier función F dependiente de $n-1$ variables θ_i, con derivadas parciales continuas.

Por la arbitrariedad de F y el hecho que las funciones θ_i son constantes sobre las características, ellas pueden ser sustituidas en la expresión (1.3.3.13) por un sistema arbitrario de primeras integrales independientes $\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)$, del sistema (1.3.3.8), y por ello, es posible dar la expresión general de la solución de la ecuación lineal (1.3.3.9) en la forma:

$$u(x_1,\dots,x_n)=G\big(\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_n)\big) \qquad (1.3.3.14)$$

donde $G(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ es una función diferenciable arbitraria de n-1 variables.

Como caso particular, se obtiene que cada una de las primeras integrales φ_i son necesariamente soluciones de la ecuación lineal (1.3.3.9).

Finalmente se puede concluir que cualquier solución de la ecuación parcial lineal de primer orden (1.3.3.9) es una primera integral del sistema de ecuaciones de las curvas características (1.3.3.8), y recíprocamente, cualquier primera integral del sistema (1.3.3.8) es solución de la ecuación (1.3.3.9).

Ejemplo

Considera la ecuación:

$$x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \qquad (1.3.3.15)$$

El correspondiente sistema para las curvas características es:

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = dx_3$$

o también:

$$\frac{dx_1}{dx_3} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dx_3} = x_1 \qquad (1.3.3.16)$$

de donde, sumando ambas ecuaciones, se tiene:

$$\frac{d(x_1 + x_2)}{dx_3} = (x_1 + x_2)$$

y por lo tanto:

$$x_1 + x_2 = Ce^{x_3}$$

De aquí se concluye que una primera integral para el sistema de las características es:

$$\varphi_1 = (x_1 + x_2)e^{-x_3}$$

Si ahora se restan las ecuaciones en (1.3.2.9), queda:

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dx_3} = -(x_1 - x_2)$$

y por lo tanto, otra primer integral es:

$$\varphi_2 = (x_1 - x_2)e^{x_3}$$

Entonces se tiene que:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_1, x_2)} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = e^{-x_3} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = e^{-x_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = e^{x_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -e^{-x_3} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Luego, ambas primeras integrales son independientes en el sentido de (1.3.2.3), y por ello, toda solución de (1.3.2.8) es de la forma:

$$u(x_1, x_2, x_3) = G\big((x_1 + x_2)e^{-x_3}, (x_1 - x_2)e^{x_3}\big)$$

donde G es una función diferenciable de dos variables.

Cuando $a_n \neq 0$ en todo punto de Ω, entonces el sistema de ecuaciones de las características se puede escribir como:

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{a_i}{a_n}, \qquad i = 1, \dots, n-1$$

y entonces, si se fija un valor x_n^0, se puede tomar como $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ las condiciones iniciales que satisfacen $x_i(x_n)$ en x_n^0, es decir, $x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$, y en lugar del parámetro t, se toma x_n, entonces:

$$x_i = X_i(x_n; x_1^0, \dots, x_{n-1}^0; x_n^0)$$

Por la unicidad de la solución del problema de Cauchy se puede despejar:

$$x_i^0 = X_i(x_n^0; x_1, \dots, x_{n-1}; x_n), \qquad i = 1, \dots, n-1$$

Como x_n^0 se puede considerar fijo, entonces se puede poner

$$\theta_i = x_i^0 = X_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), \qquad i = 1, \dots, n-1$$

y se tiene, entonces, que:

$$\frac{D(X_1, \dots, X_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_{n-1})} \neq 0$$

por el hecho de que la relación es biunívoca.

Se pondrá ahora una condición de Cauchy sobre una superficie Γ de $\dim n-1$ contenida en Ω que satisfaga la condición de transversalidad con respecto a las curvas características de la ecuación lineal de primer orden (1.3.3.9):

$$u|_{\Gamma} = \omega(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \tag{1.3.3.17}$$

es decir, se fija el valor que debe tomar la solución u de (1.3.3.9) sobre la superficie Γ, la cual, se supone, se expresa en la forma paramétrica (1.3.3.12).

Sean φ_i, $i = 1, \dots, n-1$, $n-1$ primeras integrales independientes del sistema de las características (1.3.3.8).

Se tiene que $\varphi_i|_{\Gamma} = \varphi_i\big(\alpha_1(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \dots, \alpha_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})\big) = \xi_i$.

Si este sistema es soluble con respecto a $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, entonces se pueden obtener:

$$\theta_i = \Omega_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Se concluye que la solución de la EDP (1.3.3.9) que satisface la condición de Cauchy (1.3.3.17) se expresa mediante:

$$u(x_1, \dots, x_n) =$$
$$= \omega\left[\Omega_1\big(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)\big), \dots, \Omega_{n-1}\big(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)\big)\right] \tag{1.3.3.18}$$

Ejemplo.

Considera la misma ecuación del ejemplo anterior y toma en $\mathbb{R}^3$ la superficie $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 = 0$ (en este caso, la ecuación paramétrica de la superficie viene dada directamente en términos de las variables cartesianas), la cual satisface la condición de transversalidad con las características de la EDP, dado que (ver (1.3.3.11)):

$$\nabla f \cdot \vec{a} = (0,0,1) \cdot (x_2, x_1, 1) = 1 \neq 0$$

Si consideras la condición de Cauchy:

$$u(x_1, x_2, 0) = \lambda(x_1, x_2)$$

Entonces, como $\varphi_1 = (x_1 + x_2)e^{-x_3}, \varphi_2 = (x_1 - x_2)e^{x_3}$, y

$$\varphi_1|_{x_3=0} = x_1 + x_2 = \xi_1, \qquad \varphi_2|_{x_3=0} = x_1 - x_2 = \xi_2 \Rightarrow x_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, x_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2},$$

tendrás que (ver (1.3.3.18)):

$$u(x_1, x_2, x_3) = \lambda\left(\frac{(x_1 + x_2)e^{-x_3} + (x_1 - x_2)e^{x_3}}{2}, \frac{(x_1 + x_2)e^{-x_3} - (x_1 + x_2)e^{x_3}}{2}\right)$$

■

EDP cuasilineales de primer orden en dimensión n ≥2

Ahora revisarás las soluciones de la ecuación cuasilineal de primer orden

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = a(x_1, \dots, x_n, u) \qquad (1.3.3.19)$$

donde las funciones a_i y a están definidas en una región $(n+1)$-dimensional D, de las variables $(x_1, \dots, x_n, u)$ y son diferenciables con respecto a sus argumentos.

La solución de la EDP es cualquier función $u(x_1, \dots, x_n)$ derivable con respecto a cada x_i y que satisface la identidad definida por la ecuación. Al igual que en el caso de las ecuaciones lineales, la solución de (1.3.3.19) se puede interpretar geométricamente como una superficie integral en el espacio de las variables $(x_1, \dots, x_n, u)$.

Le asociarás a la ecuación $(1.3.3.19)$ la siguiente ecuación auxiliar lineal:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial v}{\partial x_i} + a(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial v}{\partial u} = 0 \tag{1.3.3.20}$$

y observarás el resultado siguiente que relaciona la solución de una ecuación cuasilineal con la solución de la ecuación lineal asociada.

Teorema 1.3.3.1. Sea $v = V(x_1, \dots, x_n, u)$ solución de $(1.3.3.20)$ y supón que en una región $\mathfrak{S}$ de las variables $x_1, \dots, x_n$, la ecuación

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0 \tag{1.3.3.21}$$

permite definir una función $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ t.q. $\frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{u=\varphi} \neq 0\ \forall x \in \mathfrak{S}$. Entonces, $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ es solución de la EDP cuasilineal (1.3.3.19).

Demostración. Por el teorema de la función implícita:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{-\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial u}}$$

y por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial u}}$$

que es igual a $a(x_1, \dots, x_n, u)$ por ser V solución de $(1.3.3.20)$.

■

Entonces, la solución de las ecuaciones cuasilineales se reduce al estudio de las lineales usando el procedimiento explicado en el segundo subtema $1.3.3$, aplicado a las soluciones del sistema

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{a}$$

cuyas soluciones se llaman curvas características de la EDP cuasilineal $(1.3.3.19)$.

Si se cumple que $a_i, a \in C^1(D)$ y $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + a^2 \neq 0$, entonces, por cada punto de D, pasa una y sólo una curva característica.

Puedes resumir el procedimiento de obtención de la solución u de la ecuación cuasilineal $(1.3.3.19)$, en los pasos siguientes:

- Se escribe la solución general de la ecuación auxiliar lineal en la forma:

$$v = F\big(\varphi_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u)\big) = V(x_1, \dots, x_n, u),$$

  donde $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son n primeras integrales independientes de dicha ecuación lineal.

  Si se pone $v = V(x_1, \dots, x_n, u) = 0$, se obtiene u en forma implícita.

Nota que, a diferencia del caso lineal, las curvas características no están en el espacio de los vectores $(x_1, \dots, x_n)$, sino de $(x_1, \dots, x_n, u)$, sin embargo, se tiene:

1.3.3.2. Teorema. Supón que $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$. Entonces, cada superficie integral $u = f(x_1, \dots, x_n)$ de la EDP cuasilineal está compuesta de curvas características, es decir, por cada punto de esta superficie pasa una curva característica completa.

Demostración. El sistema de ecuaciones diferenciales: $\frac{dx_i}{dt} = a_i\big(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\big)$ describe una familia de curvas que llenan el espacio de las variables $(x_1, \dots, x_n)$, dado que $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$ y, por lo tanto, las curvas: $x_i = x_i(t), u = f\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ están sobre la curva integral $u = f(x_1, \dots, x_n)$ y la llenan completamente.

Para ver que estas curvas son características, hay que ver que:

$$\frac{d}{dt}\, u\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) = a\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$$

lo cual se deduce del hecho que

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = a$$

■

Observación

Del teorema anterior resulta que, para construir soluciones de una ecuación cuasilineal, hay que saber pegar curvas características de forma suave para formar una superficie integral de la ecuación.

Del hecho de que el vector $(a_1, \dots, a_n, a)$ es tangente a las características también debe ser tangente a la superficie integral, y por lo tanto, es ortogonal al vector normal $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1\right\}$. La condición de ortogonalidad es precisamente la expresión de la EDP cuasilineal.

Esta idea geométrica conduce a la siguiente interpretación de la fórmula $(1.3.3.21)$ que resulta útil cuando se quiere obtener una solución que satisfaga ciertas condiciones adicionales (problema de Cauchy).

Se debe notar que cualquier superficie integral tiene dimensión n en D (que es de dimensión $n + 1$), y por ello, se dará la siguiente definición:

1.3.3.1. Definición. El problema de Cauchy para la ecuación cuasilineal consiste en dar una superficie Γ de dimensión $n - 1$ en el espacio D de las variables $(x_1, \dots, x_n, u)$, y encontrar una superficie integral en D que pase por Γ.

Supón que Γ viene dada en la forma paramétrica:

$$x_i = \omega_i(s_1, \dots, s_{n-1}), \qquad i = 1, \dots n$$

$$u = \omega(s_1, \dots, s_{n-1})$$

Si consideras el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\varphi_i\big(\omega_1(s_1,\dots,s_{n-1}),\dots,\omega_n(s_1,\dots,s_{n-1}),\omega(s_1,\dots,s_{n-1})\big)=\theta_i,$$

donde $\varphi_i,\ \ 1\le i\le n$ son n primeras integrales del sistema de ecuaciones de las características, entonces, como se trata de n ecuaciones con $n-1$ incógnitas, es posible encontrar una relación funcional $\Phi(\theta_1,\dots,\theta_n)=0$ entre las variables θ_i y de aquí, volviendo a las φ_i se obtiene la relación ampliada a toda la superficie integral que pasa por Γ:

$$\Phi\big(\varphi_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n,u)\big)=0, \qquad (1.3.3.22)$$

de la cual se obtiene, finalmente, la solución al problema de Cauchy en forma implícita.

Observa cómo se aplica la fórmula anterior para obtener la solución del problema de Cauchy para una ecuación cuasilineal en el caso de dos variables espaciales x,y:

$$A(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=C(x,y,u) \qquad (1.3.3.23)$$

Hay que notar que, como en este caso, $3=n+1$, entonces Γ debe tener dimensión $n-1=1$ y, por lo tanto, se trata de una curva en D.

Resolviendo el sistema de las características:

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}=\frac{du}{C}$$

y calculando las dos primeras integrales independientes:

$$\varphi_1(x,y,u),\qquad \varphi_2(x,y,u)$$

que son constantes sobre las soluciones de este sistema.

Ahora $\varphi_i\big(X(s), Y(s), U(s)\big) = \theta_i,\ i = 1{,}2$ donde $X(s), Y(s), U(s)$ constituyen una parametrización de la curva Γ y encuentras una relación funcional entre θ_1 y θ_2:

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = 0$$

Y, finalmente, llegas a la ecuación:

$$\Phi\big(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)\big) = 0 \qquad (1.3.3.24)$$

que te da la solución u de la ecuación $(1.3.3.23)$ en forma implícita. El sentido geométrico de este procedimiento es muy simple: por cada punto de la curva Γ se hace pasar la correspondiente curva característica, y la unión de todas estas características conforman la superficie integral buscada (ver Figura 3).

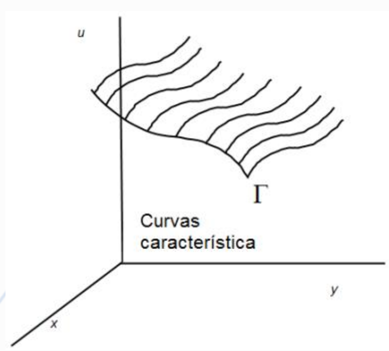

Figura 3. Curvas características.

En algunas ocasiones, en lugar de $(1.3.3.24)$, se busca una representación paramétrica de la superficie integral. Por ejemplo, si $C(x, y, u) = 0$ en la ecuación $(1.3.3.23)$, se obtiene una ecuación lineal, la cual puede ser resuelta utilizando el método propuesto para resolver las ecuaciones cuasilineales. En este caso, se puede tomar como un parámetro la variable x y las ecuaciones de las características son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{0}{A} = 0$$

y por lo tanto, una primera integral es $\varphi_1(x, y, u) = u$, supón que la otra es $\varphi_2(x, y, u)$.

Entonces, si $\Gamma = \{X(s), Y(s), U(s)\}$ está parametrizada por s, buscarás la superficie integral solución del correspondiente problema de Cauchy, en la forma $x = x, u = U(s), y = y(x, s)$, donde $y(x, s)$ se determina de la ecuación:

$$\varphi_2\big(x, y(x, s), U(s)\big) = \varphi_2\big(X(s), Y(s), U(s)\big)$$

Esta ecuación da la proyección en el plano (x, y) de la característica que pase por el punto de Γ correspondiente al parámetro s y $u = U(s)$, da el valor de la componente u de esa proyección.

Observación. Puede darse un caso singular para la obtención de la ecuación implícita $(1.3.3.24)$, que es cuando $\varphi_i\big(X(s), Y(s), U(s)\big) = cte = \theta_i = c_i$, entonces, la función Φ puede ser cualquiera, siempre que satisfaga la condición $\Phi(c_1, c_2) = 0$. Si Φ_0 es una función arbitraria de las variables $\theta_1, \theta_2,$ se puede tomar:

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = \Phi_0(\theta_1, \theta_2) - \Phi_0(c_1, c_2).$$

Ejemplo.

Considera la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)\, u = 0$$

donde $c(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + f(x,t)$.

(La ecuación original es: $\frac{\partial u}{\partial t} + div(vu) + f(x,t)u = 0$).

Se supone, que por una tubería cerrada, se mueve con una velocidad $v(x,t)$ en la dirección longitudinal x, una cierta sustancia cuya densidad lineal varía como $u(x,t)$. Durante el proceso de transporte se va asentando una cierta cantidad de sustancia sobre las paredes de la tubería con una densidad de distribución $f(x,t)u(x,t)$.

En lo que sigue se considera $v = cte$, y por lo tanto, la ecuación queda en la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)\,u = 0, \qquad c = f$$

Las ecuaciones para las características son:

$$\frac{\partial t}{1} = \frac{dx}{v} = -\frac{du}{c(x,t)\,u}$$

de las cuales se obtiene inmediatamente una primera integral $\varphi_1(x,t,u) = x - vt$ y, además, resulta:

$$\frac{du}{dt} = -c(x,t)\,u = -c(\varphi_1 + vt, t)\,u = b(t,\varphi_1)\,u$$

donde φ_1 es constante (sobre las características y, por lo tanto, lo es en la ecuación anterior).

Luego $u = cte \cdot e^{b_1(t,\varphi_1)}$ donde b_1 es una primitiva de b respecto a t.

De aquí se tiene que $\varphi_2 = u\,e^{-b_1(t,x-vt)}$ es otra primera integral para el sistema de las características.

Supón ahora que se exige la condición de Cauchy: $u(0,t) = u_0(t)$, lo cual significa dar la curva dato de Cauchy en la forma $\Gamma = \{(0,t,u_0(t))\}$.

Entonces:

$$\varphi_1(0,t,u_0(t)) = -vt = \theta_1$$

$$\varphi_2\big(0,t,u_0(t)\big)=u_0(t)e^{-b_1(t,-vt)}=\theta_2$$

de donde se obtiene la relación:

$$\theta_2=u_0\left(\frac{-\theta_1}{v}\right)e^{-b_1\left(\frac{-\theta_1}{v},\theta_1\right)}$$

y de la fórmula (1.3.3.24) se tiene que la solución viene dada en la forma implícita:

8

$$\Phi\big(\varphi_1(x,t,u),\varphi_2(x,t,u)\big)=0$$

donde:

$$\Phi(\theta_1,\theta_2)=\theta_2-u_0\left(\frac{-\theta_1}{v}\right)e^{-b_1\left(\frac{-\theta_1}{v},\theta_1\right)},$$

es decir,

$$u\,e^{-b_1(t,x-vt)}=u_0\left(t-\frac{x}{v}\right)e^{-b_1\left(t-\frac{x}{v},x-vt\right)}$$

de donde se obtiene la expresión explicita para $u(x,t)$

$$u(x,t)=u_0\left(t-\frac{x}{v}\right)e^{b_1(t,x-vt)-b_1(t-\frac{x}{v},x-tv)}$$

que representa la solución de la ecuación de transporte con v constante.

Observación. Las ecuaciones lineales las puedes resolver como cuasilineales con $a\equiv 0$, de donde, de manera directa, tienes una primera integral $\varphi_1(x,y,u)=u$, debido al hecho de que las soluciones u de las ecuaciones lineales son constantes sobre las características.

Ejemplo.

Resolver de forma cuasilineal la ecuación lineal:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Del hecho que tiene dos primeras integrales considerada como ecuación cuasilineal: $\varphi_1 = u$, $\varphi_2 = (x^2 + y^2)$, entonces la solución general es de la forma $\Phi(u, x^2 + y^2) = 0$, de donde se debe despejar $u = \varphi(x^2 + y^2)$, que es la forma general de la solución que corresponde a superficies integrales que son superficies de revolución.

Se plantean diferentes problemas de Cauchy:

a) Γ una línea recta, $x = s, y = s, u = s$. Entonces

$$\varphi_1\big(x(s), y(s), u(s)\big) = \theta_1 = s$$
$$\varphi_2\big(x(s), y(s), u(s)\big) = \theta_2 = 2s^2$$

de donde se tiene la relación $\theta_2 = 2\theta_1^2$, y por lo tanto, la solución en este caso es:

$$\varphi_2(x, y, u) = 2\varphi_1^2(x, y, u),$$

es decir, $x^2 + y^2 = 2u^2$.

b) Si Γ es un círculo $x = \cos t\,, y = \operatorname{sen} t\,, u = 1$, en este caso Γ es una característica de la ecuación, vista como ecuación cuasilineal, y por lo tanto, $\theta_1 = 1, \theta_2 = 1$ y para cualquier función $\phi(u, x^2 + y^2)$, la superficie solución se da en forma implícita por $\phi(u, x^2 + y^2) - \phi(1,1) = 0$.

Observación. Geométricamente es claro que por esta curva Γ se pueden pasar infinitas superficies de revolución que son todas soluciones de la ecuación. En este caso, la solución del problema de Cauchy no es única.

c) Por ejemplo, si se considera la ecuación como lineal y se da también la curva γ en x, y, mediante $x = \cos t\,, y = \operatorname{sen} t\,, u|_\gamma = t$, entonces, como cualquier superficie de revolución $u = \varphi(x^2 + y^2)$ es constante sobre la circunferencia γ, la condición de Cauchy $u|_\gamma = t$ no puede satisfacerse, y por eso, en este caso, el problema de Cauchy no tiene solución.

Cierre de la unidad

Las EDP son de gran importancia en el ámbito de la matemática aplicada. Por su origen basado en las leyes físicas y naturales, da cuenta de su importancia al momento de trabajar y tratar de realizar modelos que aproximen de manera precisa la forma en que un fenómeno ocurre. Es así que las EDP se encuentran presentes en las distintas disciplinas que estudian el universo natural. De manera más directa, las EDP son usadas de manera común en la industria para optimizar muchos procesos. Manejar las propiedades y definiciones de las EDP en su forma clásica te permitirá tener un primer panorama para un estudio más profundo de esta importante área de la matemática moderna.

Para saber más

Puedes consultar libros clásicos de cálculo vectorial para profundizar en las definiciones de los operadores básicos, por ejemplo, en

Apostol, T. (1967). *Calculus. Vol. 2. Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability.* México, Editorial Reverte.

Fuentes de consulta

Básica

- Apostol, T. (1967). *Calculus. Vol. 2. Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probabilityy.* México, Editorial Reverte
- Kurmyshev, E.V. (2003). *Fundamentos de métodos matemáticos para física e ingeniería*. México: Limusa.
- Mauch, S. (2003). *Introduction to Methods of Applied Mathematics or Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. https://dl.icdst.org/pdfs/files3/f32860fc08c3b37c86871c7dc499151a.pdf
- Peral Alonso, I. (2004). *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales.* Universidad Autónoma Metropolitana.
- Zuazua, E. *Ecuaciones en derivadas parciales.* Universidad Autónoma Metropolitana.