Matemáticas

6º Semestre

Ecuaciones Diferenciales Parciales

Unidad 2. El Problema de Cauchy para EDP de Segundo Orden

Clave
050930934

Universidad Abierta y a Distancia de México

DCEIT

Índice

Presentación de la unidad

En esta segunda unidad se presenta una forma de clasificación de las EDP cuasilineales de segundo orden y se introduce el llamado problema de Cauchy para estas ecuaciones como una extensión del problema de Cauchy, presentado en la Unidad 1, para las ecuaciones de primer orden. Se te dará el planteamiento general del problema de Cauchy para ecuaciones de segundo orden y estudiaremos su relación con el concepto de superficie característica. En el caso de las ecuaciones clásicas de ondas y difusión del calor se estudian versiones particulares del problema de Cauchy y se obtienen fórmulas para la solución de los respectivos problemas que dependen de la dimensión espacial. Dichas fórmulas muestran las diferencias entre los procesos de propagación de ondas de acuerdo a la dimensión espacial y permiten explicar ciertas características particulares que distinguen los procesos de difusión del calor de los de propagación de ondas, como son las propiedades de regresión en el tiempo, la conservación de energía y la velocidad de propagación en ambos procesos.

Competencia específica

Obtener las soluciones del problema de Cauchy para las ecuaciones de onda y de calor en dimensiones uno, dos y tres; mediante la aplicación de las fórmulas correspondientes, para resolver los modelos asociados a problemas clásicos de la física matemática.

Logros

- Clasificar las EDP cuasilineales de segundo orden de acuerdo a su reducción a la llamada forma canónica.
- Presentar el llamado problema de Cauchy para una EDP cuasilineal de segundo orden y estudiar su relación con la noción de superficie característica y la clasificación vista previamente.

- Presentar un planteamiento particular para el problema de Cauchy para la ecuación de ondas y estudiar las propiedades de su solución de acuerdo a la dimensión espacial.
- Presentar un problema particular con condiciones iniciales para la ecuación del calor que puede ser considerado como una generalización del problema de Cauchy.

2.1. Clasificación de las EDP cuasilineales de segundo orden

Tras el estudio del problema de Cauchy para las ecuaciones de primer orden que se ha hecho en temas anteriores, parece natural plantear el mismo problema para ecuaciones de orden superior. Se limitará a dar algunos resultados de carácter cualitativo general, para ecuaciones de segundo orden y sólo en lo referente a la estructura algebraica de la ecuación, que es lo que permitirá la clasificación en tipos.

2.1.1. El problema de Cauchy para algunos ejemplos de EDP de segundo orden

Se comienza por estudiar algunos ejemplos que ayudan a ver los diferentes comportamientos del problema de Cauchy según las ecuaciones.

Todos ellos tienen en común que se trata de ecuaciones de orden dos en $\mathbb{R}^2$ y que, por tanto, fijando dos datos; el valor de la función y de la derivada respecto a la dirección normal en una recta.

Ejemplo

Considera el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{xt} = 0 \\ u(x,0) = \phi_0(x) \\ u_t(x,0) = \phi_1(x) \end{cases} \qquad (2.1.1.1)$$

Se supondrán los datos regulares, por ejemplo, con segunda derivada continua. Sea $u(x,t)$ una solución clásica, es decir, una función con segundas derivadas continuas que verifica la ecuación puntualmente. Entonces, en particular, se verifica

$$0 = u_{xt}(x,0) = \phi_{1,x} = \phi'(x),$$

es decir, ϕ_1 necesariamente es constante. En consecuencia el problema $(2.1.1.1)$ no es soluble para cualquier dato; pero, además, si se supone la condición de compatibilidad, $\phi_1 \equiv c$, donde c es constante, por integración elemental se tiene

$$u_t(x,t) = \alpha(t), \qquad independiente\ de\ x,$$

por lo que todas las funciones verificando la ecuación son de la forma

$$u(x,t) = w_1(x) + w_2(t)$$

De esta manera si tomamos una función $w_2(t) = ct + at^2$ con a arbitrario,

$$u_a(x,t) = \phi_0(x) + ct + at^2$$

es solución

Tenemos así una alternativa extrema

i) El problema $(2.1.1.1)$ no es soluble si ϕ_1 no es constante.
ii) Si ϕ_1 es constante, el problema $(2.1.1.1)$ tiene infinitas soluciones.

Como puedes notar la elección de w_2 sólo requiere que $w_2(0) = 0$ y $w_2'(0) = 0$. Por ejemplo, $w_2 = ct + t^r,\ r > 0$, son elecciones válidas.

Ejemplo

Considera el siguiente problema para la ecuación para la ecuación de calor

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = \phi_0(x), \\ u_t(x,0) = \phi_1(x) \end{cases} \qquad (2.1.1.2)$$

con datos regulares. Entonces en particular

$$\phi_1(x) = u_t(x,0) = u_{xx}(x,0) = \phi_0''(x).$$

Es decir, es un problema sobredeterminado. En este caso es más natural el resultado pues respecto a la variable t, la ecuación del calor es solo de orden 1.

Ejemplo

El problema que sigue requiere el uso de algunos resultados básicos de variable compleja. (Si fuese necesario, puedes encontrarlos en L.V. Ahlfors, *"Complex Analysis"*)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \;\; en\, y > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_y(x,0) = h(x) \end{cases}, \qquad (2.1.1.3)$$

Una función $u(x,y)$ con segundas derivadas continuas y verificando la ecuación es llamada **armónica** y se verifica que $u = \Re f(z)$ para $f = u + iv$ función analítica en $y > 0$.

El principio de reflexión de Schwarz prueba que en estas hipótesis la función

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \Im z \geq 0 \\ \bar{f}(\bar{z}), & \Im z < 0 \end{cases}$$

donde $\bar{f} = u - iv$ es la función conjugada de f, es analítica. Además $\Re \tilde{f} = \tilde{u}$ donde

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,y), & y \geq 0 \\ u(x,-y), & y < 0 \end{cases}$$

y por tanto es analítica real. Pero en particular, $\tilde{u}(x,0)$ y $\tilde{u}_y(x,0)$ son analíticas reales. En consecuencia, si h no es analítica no hay solución, o dicho de otra forma el problema $(2.1.1.3)$ es sobredeterminado. Se puede enunciar entonces que el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace es sobredeterminado.

Ejemplo

Por último se va a analizar otro problema de valores iniciales. Se trata de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}, \qquad (2.1.1.4)$$

Si se hace el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}(x+t) \\ T = \frac{1}{2}(x-t) \end{cases}$$

la ecuación se transforma en

$$u_{XT} = 0 \qquad (2.1.1.5)$$

(revisa el tema 2.2.1 para encontrar todos los detalles).

Como se vio en el Ejemplo 1 la solución general de (2.1.1.5) es

$$u(X,T) = w_1(X) + w_2(T)$$

o bien en las coordenadas primitivas

$$u(X,T) = w_1(x+t) + w_2(x-t)$$

Si se imponen los datos se obtiene de manera única que la solución de $(2.1.1.4)$ es

$$u(x,t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds$$

que es la conocida como fórmula de D'Alambert. (Ve el tema 2.2.1)

El problema de Cauchy respecto a existencia y unicidad de la solución depende de alguna misteriosa relación entre la ecuación en derivadas parciales y la superficie donde se prescriben los datos. Se estudiará este problema en detalle en los siguientes subtemas de esta Unidad.

2.1.2. formas canónicas y clasificación

Un problema típico en las EDP consiste en hallar la solución de una ecuación o sistema sujetos a condiciones iniciales y de contorno.

Para estudiar sistemáticamente se necesita un esquema de clasificación que caracterice a las ecuaciones por clase con propiedades comunes. El "tipo" de una ecuación determina la naturaleza de las condiciones iniciales y de contorno que le pueden ser impuestas para que tenga solución, el tipo de soluciones que puede tener y sus propiedades y los métodos que se pueden usar para obtener dichas soluciones.

Durante esta unidad revisarás la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de 2° orden cuasilineales, es decir, que son lineales con respecto a las derivadas de 2° orden:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\phi(x,u,\nabla u)=0, a_{ij} continuas,$$

el tipo de la ecuación se define en una vecindad de cada punto, es decir, la clasificación es local.

Comenzarás revisando cómo se transforma la ecuación ante un cambio de variable no singular con el objetivo de ver qué cambio se debe hacer para que en las nuevas variables simplifique la ecuación

$$x \leadsto y = y(x), \qquad y_\ell = y_\ell(x_1, \dots, x_n), \qquad \ell = 1,2, \dots, n$$

$$y_\ell \in C^2, \qquad D = \left(\frac{y_1, y_2, \dots, y_n}{x_1, x_2, \dots, x_n}\right),$$

esto último es el determinante de la matriz Jacobiana $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$.

Supón $D \neq 0$ en una vecindad del punto donde se quiere estudiar el tipo de ecuación.

Entonces por el teorema de la función inversa en un entorno de ese punto se puede invertir la transformación o expresar x en función de y: $x = x(y)$.

Se denota $u\big(x(y)\big) = \tilde{u}(y)$, de modo que $\tilde{u}\big(y(x)\big) = u(x)$.

Se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_\ell} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_\ell \partial y_k} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_\ell} \frac{\partial^2 y_\ell}{\partial x_i \partial y_j}$$

Sustituyendo esto en la expresión del operador diferencial se tiene:

$$\sum_{k,\ell=1}^{n}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_\ell \partial y_k}\sum_{i,j=1}^{n} a_i\frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_\ell}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 y_\ell}{\partial x_i \partial x_j}+\phi^*(y,\tilde{u},\nabla\tilde{u})=0$$

Denotando $\tilde{a}_{\ell k}(y)=\sum_{i,j=1}^{n} a_i\frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}$ se obtiene

$$\sum_{k,\ell=1}^{n}\tilde{a}_{\ell k}(y)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_\ell \partial y_k}+\tilde{\phi}(y,\tilde{u},\nabla\tilde{u})=0$$

Fijando ahora un punto x_0, poniendo $y_0=y(x_0)$, $\alpha_{\ell i}=\frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}(x_0)$, $\alpha_{kj}=\frac{\partial y_k}{\partial x_j}$.

Entonces en el punto x_0 se puede escribir $\tilde{a}_{\ell k}(y_o)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\alpha_{\ell i}\alpha_{kj}$ que es la fórmula de transformación para los coeficientes a_{ij} en el punto x_0.

Se nota que la fórmula de transformación de los coeficientes a_{ij} coincide con la fórmula de transformación de la forma cuadrática

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)p_ip_j \qquad (2.1.2.1)$$

la cual es conocida como **Símbolo de la Ecuación Diferencial en x_0**.
Cuando se hace un cambio lineal de variables

$$p_i=\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_{\ell k}(y_0)q_\ell\,, \qquad \det(\alpha_{\ell i})\neq 0 \qquad (2.1.2.2)$$

que cambia la forma cuadrática (2.1.2.1) en

$$\sum_{k,\ell=1}^{n}\tilde{a}_{\ell k}(y_0)q_\ell q_k.$$

Entonces para simplificar la ecuación original en x_0 mediante un cambio de variables basta con simplificar la forma cuadrática (2.1.2.1) por una transformación no singular del tipo (2.1.2.2).
Del Álgebra Lineal es conocido que existe una transformación lineal no singular (2.1.2.2) que cambia la forma cuadrática (2.1.2.1) en la forma canónica:

$$\sum_{\ell=1}^{r} q_\ell^2 - \sum_{\ell=r+1}^{m} q_\ell^2 \quad con\, m \leq n \tag{2.1.2.3}$$

y que según el teorema de la Ley de Inercia para la forma cuadrática r y m no dependen del tipo de transformación $(2.1.2.2)$ y son iguales a la cantidad de valores propios positivos y negativos de la matriz $\left(a_{ij}(x_0)\right)$ con sus multiplicidades algebraicas.

Esto permite clasificar la ecuación en cada punto x_0:

(E) Si en la forma cuadrática $(2.1.2.3)$ se tiene $m = n$ y si $r = m$ o $r = 0$ se dice que la ecuación es de tipo **elíptico** en x_0 (en este caso todos los términos en $(2.1.2.3)$ son del mismo signo)

(H Si $m = n$, pero existen términos en $(2.1.2.3)$ con diferente signo, es decir, $1 \leq r \leq n-1$ se dice, que la ecuación es de tipo **hiperbólico** en x_0. En el caso cuando $r = 1$ o $r = n-1$ se dice que es de tipo **hiperbólico normal**. En otro caso se llama ultrahiperbólica.

(P) Si $m < n$ la ecuación se dice que es de tipo parabólico en x_0. Si $m = n-1$ y $r = 0$ o $r = n-1$ se dice que es de tipo parabólico normal.

Observaciones:

En el caso (E) todos los cuadrados son del mismo signo, es decir, (La forma cuadrática estrictamente definida).

En el caso (H) hay n cuadrados pero tienen diferente signo (La forma cuadrática indefinida).

En el caso (P) hay menos de n cuadrados (La forma cuadrática es degenerada).

Ejemplo. En todos los puntos:

- La ecuación de Laplace es elíptica.

- La ecuación de onda es hiperbólica normal.
- La ecuación del calor es parabólica normal.

En los últimos dos casos las variables son todas las espaciales y el tiempo.

2.1.3. EDP con coeficientes constantes

Sea

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots\right) = 0$$

Se considera por ahora ecuaciones de 2° orden con variables independientes:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

y de estas se tomarán solo ecuaciones cuasilineales:

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (2.1.3.1)$$

Un caso particular de estas son las lineales:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0$$

Donde sí $f = 0$ se trata de una ecuación homogénea, si $f \neq 0$ es una ecuación no homogénea.

Además, una **ecuación lineal con coeficientes constantes** es aquella en que a_{ij}, bi, c son constantes.

Es posible pasar de las variables (x, y) a (ξ, η) mediante un cambio de variables

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

El problema que no planteamos es: ¿Cómo elegir ξ y η de manera que en las nuevas variables la ecuación $(2.1.3.1)$ adquiera la forma más simple posible?

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, u_{xy}$$
$$= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, u_{yy}$$
$$= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación cuasilineal $(2.1.3.1)$ se tiene:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \overline{F_1} = 0$$

donde:

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y\bar{a}_{22}$$
$$= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2$$

y la función $\overline{F_1}$ no depende de segundas derivadas.

Nota que si la ecuación inicial fuera lineal la transformada también resulta lineal.

Si tomas ahora ξ y η como función de x e y de manera que el coeficiente $\bar{a}_{11}$ sea igual a cero, eso quiere decir que $\xi = \varphi(x, y)$ debe ser solución de la ecuación parcial no lineal de primer orden:

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \qquad (2.1.3.2)$$

Se deben probar algunos resultados necesarios para continuar.

1. Si $z = \varphi(x, y)$ es solución de la ecuación $(2.1.3.1)$ entonces la relación $\varphi(x, y) = C$ es una primera integral para la ecuación diferencial ordinaria

$$a_{11}d_y^2 - 2a_{12}d_xd_y + a_{22}d_x^2 = 0 \qquad (2.1.3.3)$$

(Ecuación de las curvas características).

2. Recíprocamente, si $\varphi(x,y)=C$ es una primera integral de la ecuación ordinaria $(2.1.3.3)$, entonces la función $z=\varphi(x,y)$ satisface la ecuación $(2.1.3.2)$, entonces se tiene:

- $z=\varphi(x,y)$ es solución de $(2.1.3.2) \Leftrightarrow \varphi(x,y)$ es primera integral de la ecuación $(2.1.3.3)$.

- Luego, las soluciones de la ecuación parcial $(**)$ son constantes sobre las características.

Demostración.

1. Del hecho que $z=\varphi(x,y)$ es solución de la ecuación entonces

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0$$

Para que $\varphi(x,y)$ sea una primera integral de $(2.1.3.3)$ basta ver que si la función y obtenidad de la relación implícita $\varphi(x,y)=C$ satisface $(2.1.3.3)$.
Sea $y=f(x,C)$, entonces

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\bigg|_{y=f(x,C)}.$$

Pero entonces:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,C)}=0$$

3. Sea ahora $\varphi(x,y)$ una primera integral de $(2.1.3.3)$. Entonces $\varphi(x,y)=C \Rightarrow y=f(x,C)$ por lo tanto:

4.

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right)^2+2a_{12}\left(\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,C)}=0$$

$$\Rightarrow a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0$$

■

Si se pone $\xi = \varphi(x,y)$ donde $\varphi(x,y)$ es una primera integral de $(2.1.3.3)$, entonces $\overline{a_{11}} = 0$ y si $\psi(x,y)$ es otra primera integral independiente y se pone $\eta = \psi(x,y)$ entonces se hace $\overline{a_{22}} = 0$.

La ecuación de las características se descompone en dos ecuaciones ordinarias de 1er orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

El signo de la expresión bajo el radical determina el tipo de ecuación en cada punto (x,y) de la región de definición de los coeficientes:

$$\begin{array}{lll} \textbf{Tipo hiperbólico} & si & a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \\ \textbf{Tipo elíptico} & si & a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \\ \textbf{Tipo parabóico} & si & a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \end{array}$$

La relación $\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12} - a_{11}a_{22})\left(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x\right)^2$ que es posible obtener, menciona que el tipo de ecuación no cambia ante un cambio de variables.

En el caso hiperbólico por cada punto de hiperbolicidad de la región pasan dos características reales diferentes, por los puntos de elipticidad pasan dos características complejas diferentes y por los puntos de parabolicidad una sola característica real doble.

Reducción a la forma canónica

a) En la región de hiperbolicidad tomando dos primeras integrales $\varphi(x,y)$ y $\psi(x,y)$ de la ecuación $(2.1.3.3)$ y haciendo $\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y)$ se reduce a:

$$u_{\xi\eta} = \phi(\xi, \eta, u, u_{\xi\eta}) \qquad (2.1.3.4)$$

donde

$$\phi = -\frac{\bar{F}_1}{2\bar{a}_{12}}$$

Haciendo $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$, es decir, $\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}, \beta = \frac{\xi-\eta}{2}$ se obtiene:

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \qquad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \qquad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

y por lo tanto la ecuación se puede expresar también en la forma:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \phi_1, \qquad \phi_1 = \phi$$

b) En la región de parabolicidad se tiene una sola primera integral $\varphi(x,y)$ y entonces se hace el cambio $\xi = \varphi(x,y), \eta = \eta(x,y)$ donde $\eta(x,y)$ es cualquier función independiente con $\varphi(x,y)$.

En este caso $\bar{a}_{11} = 0$ y además como $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \Rightarrow a_{12} = \sqrt{|a_{11}||a_{22}|}$ y por lo tanto

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$
$$= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0$$

ya que $0 = \bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2$.

Si se divide a cada lado por el coeficiente de $u_{\eta\eta}$, se obtiene la forma canónica

$$u_{\eta\eta} = \phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), donde\ \phi = -\frac{\bar{F}_1}{\bar{a}_{22}}$$

Si no aparece u_ξ en la parte derecha entonces se tiene una ecuación ordinaria con ξ como parámetro.

c) En la región de elipticidad, sea $\varphi(x,y)$ una primera integral compleja de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Entonces $\bar{\varphi}(x,y)$ sea una primera integral de la ecuación conjugada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Introduciendo las nuevas variables

$$\alpha = \operatorname{Re}\varphi, \qquad \beta = \operatorname{Im}\varphi$$
$$\xi = \alpha + i\beta, \qquad \eta = \alpha - i\beta \tag{2.1.3.5}$$

Entonces:

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$$
$$= \left(a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2\right) - \left(a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2\right)$$
$$+ 2i\left(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}\left(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x\right) + a_{22}\alpha_y\beta_y\right) = 0$$

es decir, en el cambio (2.1.3.5) se tiene:

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}\,, \bar{a}_{12} = 0$$

Entonces la ecuación toma la forma:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \phi(\xi, \eta, u, u_\alpha, u_\beta), \qquad \phi = -\frac{\bar{F}_1}{\bar{a}_{22}}$$

En fin se tienen tres modelos canónicos:

$$\begin{array}{llll} u_{xx} - u_{yy} = \phi & (hip) & si & a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \\ u_{xx} + u_{yy} = \phi & (elip) & si & a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \\ u_{xx} = \phi & (parab) & si & a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \end{array}$$

Ahora es momento de revisar la Forma canónica de ecuaciones lineales de 2º orden en 2 variables con coeficientes constantes, de la forma:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0$$

Primero de acuerdo al signo de la discriminante $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ se reduce a uno de los tipos:

En este caso las curvas características son rectas:

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + c_1,\ y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + c_2.$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u + \bar{f}(\xi,\eta) = 0 \qquad \text{tipo elíptico}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{\xi\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u + \bar{f}(\xi,\eta) = 0 \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u + \bar{f}(\xi,\eta) = 0 \end{array}\right\} \text{tipo hiperbólico}$$

$$u_{\xi\xi} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u + \bar{f}(\xi,\eta) = 0 \qquad \text{tipo parabólico}$$

y ahora se introduce una nueva función v en lugar de u:

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} v$$

Entonces:

$$u_\xi = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi + \lambda v)$$

$$u_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta + \mu v)$$

$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v)$$

$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v)$$

$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v)$$

Sustituyendo en la ecuación del tipo elíptico queda:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (\bar{b}_1 + 2\lambda)v_\xi + (\bar{b}_2 + 2\mu)v_\eta + (\lambda^2 + \mu^2 + \bar{b}_1\lambda + \bar{b}_2\mu + c)v + f_1 = 0.$$

Se seleccionan λ y μ de manera que los coeficientes de v_ξ y v_η se anulen y queda de la forma:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0$$

Actuando de manera análoga para los otros tipos resulta:

$$\begin{array}{ll} v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0 & \text{tipo elíptico} \\ \left.\begin{array}{l} v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \end{array}\right\} & \text{tipo hiperbólico} \\ v_{\xi\xi} + \bar{b}_2 v_\eta + f_1 = 0 & \text{tipo parabólico} \end{array} \qquad (2.1.3.6)$$

Observación. En el caso de varias variables se tiene la ecuación lineal de 2º orden con coeficientes constantes:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

primero con un cambio lineal de coordenadas se reduce a la forma canónica y después se hace el cambio: $u = \{\exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)\ v\}$ y se seleccionan los λ_i de manera conveniente obteniendo una forma similar a $(2.1.3.6)$ para el caso $n = 2$.

Clasificación de las Ecuaciones de 2º orden con varias variables.

Consideremos la ecuación lineal

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0, \qquad (a_{ij} = a_{ji})(Simetría)$$

Si introducimos las nuevas variables independientes:

$$\xi_k = \xi_k(x_1, \dots, x_n),$$

Entonces:

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} \alpha_{ik}\,, \qquad \alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial se tiene:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0$$

Donde c y f son las mismas, pero en las nuevas variables y:

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}$$

$$\bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_{ik} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}$$

Nota que si se tiene la forma cuadrática:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{o} y_i y_j \ donde\ a_{ij}^{o} = aij(x_i^{o}, \dots, x_n^{o})\ y\ (x_i^{o}, \dots, x_n^{o}) \in \Omega$$

entonces haciendo el cambio lineal de variables

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_k \ ,$$

se obtiene la nueva expresión:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl}^{o}\eta_k\eta_l \quad donde\ \bar{a}_{kl}^{o} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{o}\alpha_{ik}\alpha_{jl}.$$

Es decir, los coeficientes de las segundas derivadas se transforman como los coeficientes de una forma cuadrática bajo una transformación lineal.

Como la matriz (a_{ij}^{o}) es simétrica, se sabe que se puede seleccionar el cambio de variables de manera que la forma cuadrática se reduzca a la forma diagonal:

$$|\bar{a}_{ii}^{o}| = 1 \text{ ó } 0$$

$$\bar{a}_{ii}^{o} = 0\ (i \neq j), i, j = 1, \dots, n \qquad (2.1.3.7)$$

Además, la cantidad de elementos de la diagonal nulos, iguales a 1 o a -1 no varía independientemente de la transformación lineal que reduzca la forma cuadrática a la forma $(2.1.3.7)$. Para eso se menciona la siguiente definición.

Definición.

	Tipo elíptico si los n coeficientes $\bar{a}_{ii}^{o}$ son distintos de 0 y del mismo signo.
	Tipo hiperbólico normal sí $(n-1)$ coeficientes $\bar{a}_{ii}^{o}$ son del mismo signo y el que falta es de signo opuesto.
La ecuación original en el punto $(x_i^o, \dots, x_n^o)$	**Tipo ultrahiperbólico** si todos los coeficientes $\bar{a}_{ii}^{o}$ son distintos de 0, siendo m de ellos del mismo signo y $n-m$ del signo opuesto, donde $m > 0$ y $n-m > 0$

	Tipo parabólico si alguno de los coeficientes $\bar{a}_{ii}^{o}$ es igual a 0 (este último tiene muchas subdivisiones: elípticamente parabólico, hiperbólicamente parabólico, etc.).

Para eso se deben seleccionar las nuevas variables ξ_i tales que en $(x_i^o, \ldots, x_n^o)$ se cumpla que la transformación lineal asociada a $\alpha_{ik}(x_i^o, \ldots, x_n^o) = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}(x_i^o, \ldots, x_n^o) = \alpha_{ik}^o$ reduzca la forma cuadrática $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^o y_i y_k$ a la forma canónica, si se pone $\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}^o x_i$.

Entonces en cada punto $(x_i^o, \ldots, x_n^o)$ se reduce la ecuación a cada una de las formas canónicas:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + \phi = 0 \qquad \text{tipo elíptico}$$

$$u_{x_1 x_1} = \sum_{i=2}^{n} u_{x_i x_i} + \phi \qquad \text{tipo hiperbólico normal o hiperbólico}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} = \sum_{i=m+1}^{n} u_{x_i x_i} + \phi \qquad \text{tipo ultrahiperbólico } (\mathrm{n} - 1 > \mathrm{m} > 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} \pm u_{x_i x_i} + \phi = 0 \qquad \text{tipo parabólico } (\mathrm{m} > 0)$$

Revisarás el problema de cuando la ecuación puede ser reducida a una forma canónica en toda una vecindad de un punto $\left(x_i^0, \ldots, x_n^0\right)$, mediante un único cambio de variables, suponiendo que en cada punto de una vecindad la ecuación produzca el mismo tipo.

En primer lugar, es necesario que las funciones $\xi_i(x_1, \ldots, x_n)$ satisfagan las ecuaciones diferenciales:

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} = 0$$

que son $\frac{n(n-1)}{2}$. Pero $\frac{n(n-1)}{2} > n$ (número de funciones ξ_i) para $n > 3$, es decir, hay más ecuaciones que funciones a determinar y por esta razón puede no haber solución para $n > 3$, por lo que puede no existir el cambio de variables que haga cero los elementos no diagonales.

Además, para $n = 3$ los elementos no diagonales pueden hacerse iguales a cero pero entonces quedan fijados los $\bar{a}_{ii}$ que pueden cambiar de región muy arbitrariamente.

Luego para $n \geq 3$ en general no se puede reducir la ecuación a una forma canónica en una vecindad de un punto con un único cambio de variable aunque en toda la vecindad sea del mismo tipo. En el caso $n = 2$ esto es posible, como ya se ha visto. En el caso de coeficientes constantes se puede reducir mediante un cambio de variables a una forma canónica en todo $\mathbb{R}^n$ y después mediante el cambio:

$$u = \left\{\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) v\right\}$$

Esto se reduce a una forma muy simple pues se pueden generalmente eliminar los términos en primeras derivadas (salvo en el caso parabólico).

2.1.3. problema de Cauchy y superficies características

A la vista de las consideraciones anteriores se vuelve al problema inicial de intentar entender la diversidad de comportamiento de los ejemplos de los que se partió el estudio. Por claridad considera sólo el caso $n = 2$.

Se tiene que la ecuación que define las características asigna un cono de direcciones a cada punto x_0,

$$C(x_0) = \{(\eta_1, \eta_2) : a_{11}(x_0)\eta_1^2 + 2a_{12}(x_0)\eta_1\eta_2 + a_{22}(x_0)\eta_2^2 = 0\},$$

al cual se llamará cono característico.

Si se toma una dirección$\eta \in C(x_0)$ y la característica con tal dirección como normal, el cambio de variables que se hizo antes resulta que:

La ecuación no es de orden dos en la dirección $\boldsymbol{\eta}$.

Como consecuencia:

Si se fijan datos sobre una característica el problema de Cauchy resultante es sobredeterminado.

Ejemplo.

1. La ecuación $u_{xt} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2) : \eta_1 \eta_2 = 0\}.$$

Las direcciones características son $(1,0)$ y $(0,1)$ y las curvas características son

$$x = \alpha, \qquad t = \beta.$$

El Ejemplo (1) del Tema 2.1.1 tiene fijados los datos sobre la característica $t = 0$ y es sobredeterminado.

2. La ecuación $u_t - u_{xx} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2) : \eta_2^2 = 0\}.$$

Las direcciones características son $(0,1)$ y las curvas características son

$$t = \beta.$$

En el Ejemplo (2) del Tema 2.1.1 se tiene fijos los datos sobre la característica $t = 0$ y es sobredeterminado.

Se verá en el subtema correspondiente a la ecuación del calor, que en este caso tiene sentido considerar el problema de Cauchy con único dato $u(x, 0)$.

3. La ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2) : \eta_1^2 + \eta_2^2 = 0\} \equiv \{0\}$$

es decir, el cono es degenerado. No hay características reales. El ejemplo 3) del Tema 2.1.1 tiene fijados los datos sobre $t = 0$ y es sobredeterminado.

En este caso se necesitarán consideraciones de otro tipo, que se harán más adelante

4. La ecuación $u_{tt} - u_{xx} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2) : \eta_1^2 - \eta_2^2 = 0\}$$

Las direcciones características son $(1,1)$ y $(1,-1)$ y las curvas características son

$$x + t = \alpha, \qquad x - t = \beta$$

En este caso el problema 4 tiene fijos los datos sobre $t = 0$, **que no es característica** y el problema tiene solución única.

Considera el problema de Cauchy con datos en la superficie

$$S = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$$

es decir

$$\begin{cases} a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + \\ +b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \\ u(x,y) = u_0(x,y), \qquad si\ (x,y) \in S \\ u_v(x,y) = u_1(x,y), \qquad si\ (x,y) \in S \end{cases} \qquad (P)$$

donde u_v significa la derivada de u en dirección v de la normal S. Como resumen de este subtema se tiene:

- El comportamiento del problema de Cauchy (P) depende de si la curva S sobre la que se fijan los datos es solución o no de

$$a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 = 0$$

es decir, si S es característica o no.

- Si S es característica la ecuación no es genuinamente de orden dos en la dirección de su normal y, en consecuencia, el problema (P) es sobredeterminado.

- En el caso en que no hay características reales, es decir, cuando la ecuación es de tipo elíptico el problema (P) es sobredeterminado, pero en este caso el comportamiento está determinado por la propia ecuación.

Su estudio se hará más adelante.

2.2. El problema de Cauchy para la ecuación de onda en dimensiones espaciales uno, dos y tres

Nos ocupa ahora el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas. Ya se ha visto que la condición necesaria para que el problema de Cauchy no característico esté bien planteado, es que se verifique la condición de Hadamard. Tal condición se verifique en particular para la ecuación de ondas en cualquier dimensión, como se puede comprobar de manera elemental.

Se demostrará que, en el caso particular de la ecuación de ondas, el problema de Cauchy no característico está bien planteado. Es decir, en este caso particular, la condición de Hadamard resulta ser también suficiente.

Aunque queda fuera de los límites de este texto, hay que decir que, en general para una ecuación con coeficientes constantes de segundo orden, la condición de Hadamard es necesaria y suficiente para que el problema no característico de Cauchy esté bien planteado.

El contenido de este tema se reduce a estudiar el caso más clásico y también el más concreto e interesante de la ecuación de ondas en una, dos y tres dimensiones espaciales respectivamente. Precisamente, se plantea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = F(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

donde $N = 1,2,3$.

Para todo ello, deberás adquirir el dominio de la fórmula de D´Alembert para la ecuación de ondas homogéneas en una dimensión espacial, además de manera consecutiva el método de medias esféricas para resolver la ecuación de ondas en tres dimensiones espaciales y el método de descenso de Hadamard para su solución en dos dimensiones espaciales, y para finalizar el tema, resolverás la ecuación homogénea por la fórmula de Duhamel, además del estudio de los resultados de la unicidad mediante la integral de energía, la velocidad de propagación y el comportamiento que según cada dimensión se observa en la ecuación de ondas.

2.2.1. La ecuación de onda en dimensión uno: la fórmula de D'Alembert

Considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.2.1.1}$$

donde se suponen los datos con regularidad suficiente para que podamos efectuar todos los cálculos. Al final se precisan las condiciones de regularidad que se requieren.

Observación. Si se tiene la ecuación de ondas con **velocidad de propagación c**, es decir, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, haciendo un cambio de escala en la variable espacial se reduce a la ecuación (2.2.1.1). (para ello, Hágase $y = x/c$).

El método que sigue es debido a D'Alembert y puede resumirse en las siguientes etapas

1) Mediante un cambio de variables se obtienen **todas** las soluciones de la ecuación.

2) Se determina una solución que satisfaga los datos. Se comprueba que hay una única solución.

La idea del cambio de variable a realizar viene sugerida por una sencilla observación.

Si supones $u^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, se tiene

$$u_{tt} - u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u \qquad (2.2.1.2)$$

la idea es considerar nuevas variables $\bar{x}, \bar{t}$ de forma que se verifique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{t}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases} \qquad (2.2.1.3)$$

con lo que la ecuación (2.2.1.2) se convierte en

$$u_{tt} - u_{xx} = u_{\bar{x}\bar{t}} \qquad (2.2.1.4)$$

Para conseguir (2.2.1.3) basta tomar el cambio variable

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{2}(x+t) \\ \bar{t} = \dfrac{1}{2}(x-t) \end{cases} \qquad (2.2.1.5)$$

o bien,

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \bar{t} \\ t = \bar{x} - \bar{t} \end{cases} \qquad (2.2.1.6)$$

Se te deja comprobar que se obtiene (2.2.1.4) haciendo los cambios de haciendo los cambios de variable anteriores

En resumen, si se parte de la ecuación de onda

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

en el cambio (2.2.1.6) se pasa a

$$u_{\bar{x}\bar{t}} = 0, \qquad (2.2.1.7)$$

que tiene por soluciones aquellas funciones tales que

$$u_{\bar{t}} = \Phi(\bar{t}),$$

o bien

$$u(\bar{x},\bar{t}) = \int^{\bar{t}} \Phi(s)ds + \Psi(\bar{x}).$$

Es decir, las soluciones de (2.2.1.7) son de la forma

$$u(\bar{x},\bar{t}) = w_1(\bar{x}) + w_2(\bar{t}), \qquad (2.2.1.8)$$

con w_1 y $w_2$funciones arbitrarias. Deshaciendo el cambio de variables obtenemos

$$u(x,t) = w_1(x+t) + w_2(x-t), \qquad (2.2.1.9)$$

soluciones de la ecuación de ondas. La expresión (2.2.1.9) es una suma de **ondas planas**. De $w_1(x\ +\ t)$ se dice que es una onda plana progresando a la izquierda con velocidad1, mientras que $w_2(x\ -\ t)$ es una onda plana progresando hacia la derecha, también con velocidad 1. Con esta nomenclatura lo que se obtiene en (2.2.1.9) es la expresión de las soluciones de la ecuación de ondas como suma de ondas planas.

Para determinar la solución del problema (2.2.1.1) hemos de determinar w_1 y w_2 tales que

$$\begin{cases} u(x,0) = w_1(x) + w_2(x) = f(x) \\ u_t(x,0) = w_1'(x) - w_2'(x) = g(x) \end{cases} \qquad (2.2.1.10)$$

o bien

$$\begin{cases} w_1(x) + w_2(x) = f(x) \\ w_1(x) - w_2(x) = \int^x g(s)ds + c, \end{cases} \qquad (2.2.1.11)$$

es decir

$$\begin{cases} w_1(x) = \dfrac{1}{2}\left[f(x) + \int^x g(s)ds + c \right] \\ w_2(x) = \dfrac{1}{2}\left[f(x) - \int^x g(s)ds - c \right] \end{cases} \qquad (2.2.1.12)$$

Sustituyendo en (2.2.1.9) obtenemos la fórmula de D’Alembert

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds \qquad (2.2.1.13)$$

Como puede observarse la fórmula (2.2.1.13) no depende de la primitiva de g que se tome, por tanto, w_1 y w_2 quedan determinadas de forma única por los datos.

Como consecuencia de los cálculos y consideraciones anteriores es posible formular el siguiente resultado.

2.2.1.1 Teorema

Sean $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$, entonces la única solución del problema (2.2.1.1) viene expresada por la fórmula de D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds \qquad (2.2.1.14)$$

Además $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y **depende continuamente de los datos iniciales con respecto a la convergencia uniforme sobre compactos.**

Demostración.

Es clara la regularidad de u por las hipótesis sobre los datos y la formula (2.2.1.14).

Que u es solución del problema (2.2.1.1) resulta del cálculo que se ha hecho para obtenerla. Puede comprobarse también derivando directamente y sustituyendo en la ecuación. La unicidad es consecuencia de estar determinadas w_1y w_2 de forma única a partir de los datos.

Se establecerá la dependencia continua respecto a los datos. Supongamos que se tienen datos $\overline{f}, \overline{g}$ tales que

$$\begin{cases} f(x) - \overline{f}(x) = 0, & x \notin [a,b] \\ g(x) - \overline{g}(x) = 0, & x \notin [a,b], \end{cases} \qquad (2.2.1.15)$$

Y

$$\begin{cases} \left|f(x) - \overline{f}(x)\right| \leq \dfrac{\epsilon}{1+|b-a|}, & x \in [a,b] \\ |g(x) - \overline{g}(x)| \leq \dfrac{\epsilon}{1+|b-a|}, & x \in [a,b], \end{cases} \qquad (2.2.1.16)$$

Consideremos las correspondientes u y $\overline{u}$ dadas por la fórmula de D'Alembert se tiene

$$|u(x,t)-\overline{u}(x,t)| \leq$$

$$\leq \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-\left(\overline{f}(x+t)+\overline{f}(x-t)\right)}{2}\right| + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} |g(s)-\overline{g}(s)|ds \leq \qquad (2.2.1.17)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{1+|b-a|} + \frac{\epsilon}{1+|b-a|}|b-a| = \epsilon$$

Que es lo que se quería. ■

Observación. Resulta del teorema (2.2.1.1): La solución no mejora la regularidad de los datos.

De otra parte, si se fija (x_0, y_0), punto del **espacio-tiempo,** la fórmula de D'Alembert establece que el valor de la solución en dicho punto, $u(x_0, t_0)$, depende **exclusivamente** de los valores de los datos en el intervalo cerrado $\mathcal{A}(x_0,t_0) = [x_0 - |t_0|, x_0 + |t_0|]$del eje $t = 0$. A $\mathcal{A}(x_0, t_o)$se le llama **dominio de dependencia del punto** $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$. Si ahora se considera el intervalo cerrado $I = [a, b]$ del eje $t = 0$, los puntos del **espacio-tiempo** en los cuales el valor de la solución de la ecuación de ondas depende del valor de los datos sobre I, esta dado por

$$\mathcal{B}(I) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | x+t \in [a,b] \text{ ó } x-t \in [a,b]\}$$

La región $B(I)$ es llamada **dominio de influencia** del intervalo I. La frontera de $\mathcal{B}(I)$ en $t > 0$ esta formada por las semirrectas $x - t = b$ y $x + t = a$. Siendo simétrico el dominio de influencia respecto al eje $t = 0$, la frontera en $t < 0$ resulta ser $x - t = a\ x + t = b$ Es decir, la frontera la podemos escribir como $x + |t| = a,\ x - |t| = b$. Dicha frontera está formada por rectas características, de acuerdo con lo estudiado en el tema 2.1.4.

La forma que tiene el dominio de influencia se traduce en que la velocidad de propagación de las ondas es finita, más precisamente, en nuestro caso es uno.

Para entender mejor esta afirmación supongamos que I se reduce a un punto, es decir, $I \equiv \{x_0\}$, $t = 0$. Entonces en $t_0$unidades de tiempo, la señal producida por los datos en x_0 ha llegado a los puntos del intervalo de la recta $t = t_0$ común al dominio de influencia del punto x_0, es decir,

$\mathcal{B}(x_0) \cap \{t = t_0\}$. Pero según la frontera obtenida para el dominio de influencia, tal intervalo es hacia la izquierda $[x_0 - t_0, x_0]$ y hacia la derecha $[x_0, x_0 + t_0]$. Entonces

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \frac{t_0}{t_0} = 1.$$

Estas observaciones sobre la fórmula de D'Alembert concuerdan con la experiencia física en el estudio de la luz y el sonido.

2.2.2. La ecuación de onda en dimensión espacial tres: método de las medias esféricas

Se estudia el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \qquad (2.2.2.1)$$

donde a f y g se les supone por el momento regularidad suficiente para que los cálculos puedan llevarse a cabo. Al final se precisarán las hipótesis de regularidad de los datos para que la solución sea clásica.

Seguramente la experiencia física de que las ondas se **propagan esféricamente**, sugirió a Poisson el método para resolver el problema (2.2.2.1) que se estudia detalladamente a continuación. La idea conductora del método es buscar una expresión de la solución que permita usar la fórmula de D'Alembert unidimensional estudiada en el subtema previo.

Supongamos que $u(x,t)$ es una solución de (2.2.2.1) y fijemos $x \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$.

Integrando la ecuación en la bola centrada en x y con radio r, es decir, en $|x-y| \leq r$,

$$\int_{|x-y|\leq r} u_{tt}(y,t)dy = \int_{|x-y|\leq r} \Delta u(y,t)dy. \qquad (2.2.2.2)$$

Utilizando el teorema de la divergencia obtenemos

$$\int_{|x-y|\leq r} \Delta u(y,t)dy = \int_{|x-y|=r} u_v(y,t)d\sigma(y) =$$

$$= \int_{|x-y|=r} \left(\sum_{i=1}^{3} u_{x_i}(y,t)\, v_i\right) d\sigma(y) = \int_{|v|=1} \left(\sum_{i=1}^{3} u_{x_i}(x+rv,t)\, v_i\right) d\sigma(rv) = \qquad (2.2.2.3)$$

$$= r^2 \int_{|v|=1} \left(\sum_{i=1}^{3} u_{x_i}(x+rv,t) v_i\right) d\omega = r^2 \int_{|v|=1} u_r(x+rv,t)\, d\omega,$$

ya que la medida sobre la esfera de radio r, $d\sigma(y)$ viene expresada por $d\sigma(y) = r^2 d\omega$, donde $d\omega$ es el elemento de área en la esfera unidad y v es la normal exterior.

Por otro lado, el término de la izquierda en (2.2.2.2) se calcula pasando a coordenadas polares

$$\int_{|x-y|\leq r} u_{tt}(y,t)dy = \int_0^r \rho^2 \int_{|v|=1} u_{tt}(x+\rho v,t)d\omega d\rho. \qquad (2.2.2.4)$$

De (2.2.2.3) y (2.2.2.4) se obtiene que (2.2.2.2) puede escribirse

$$\int_0^r \rho^2 \int_{|v|=1} u_{tt}(x+\rho v,t)d\omega d\rho = r^2 \int_{|v|=1} u_r(x+rv,t)d\omega \qquad (2.2.2.5)$$

Derivando en (2.2.2.5) respecto a r resulta

$$r^2 \int_{|v|=1} u_{tt}(x+rv,t)d\omega =$$

$$= 2r \int_{|v|=r} u_r(x+\rho v,t)d\omega + r^2 \int_{|v|=1} u_{rr}(x+rv,t)d\omega, \qquad (2.2.2.6)$$

de donde

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{r}{4\pi}\int_{|v|=1} u(x+rv,t)d\omega\right) =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{|v|=1} u(x+rv,t)d\omega\right) + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{|v|=1} u(x+rv,t)d\omega\right) \quad (2.2.2.7)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{r}{4\pi}\int_{|v|=1} u(x+rv,t)d\omega\right)$$

obteniendo

$$\mathcal{M}u(x,r,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{|v|=1} u(x+rv,t)d\omega \quad (2.2.2.8)$$

Llamado media sobre la esfera de radio r de u, en el punto x y el instante t, la expresión (2.2.2.7) se traduce en

$$(r\mathcal{M}u)_{tt} - (r\mathcal{M}u)_{rr} = 0 \quad (2.2.2.9)$$

que es la ecuación de ondas en una dimensión. Es decir, fijado $x \in \mathbb{R}^3$ **el producto del radio por las medias esféricas**, $r\mathcal{M}u$, de una solución u de (2.2.2.1), verifica la ecuación de ondas respecto a las variables r y t. Por consiguiente, podemos expresar $r\mathcal{M}u$ como suma de ondas planas de acuerdo con lo estudiado en el tema anterior, es decir,

$$r\mathcal{M}u(x,r,t) = \omega_1(x,r+t) + \omega_2(x,r-t). \quad (2.2.2.10)$$

En particular, si tomamos límites para $r \to 0$

$$0 = \omega_1(x,t) + \omega_2(x,-t), \quad (2.2.2.11)$$

o bien

$$-\omega_1(x,t) = \omega_2(x,-t). \quad (2.2.2.12)$$

por lo que (2.2.2.10) se convierte en

$$r\mathcal{M}u(x,r,t) = \omega_1(x,r+t) - \omega_1(x,t-r). \quad (2.2.2.13)$$

Derivando en (2.2.2.13) respecto a la variable r resulta

$$\mathcal{M}u(x,r,t) + r(\mathcal{M}u)_r(x,r,t) = \omega'_1(x,r+t) - \omega'_1(x,t-r). \tag{2.2.2.14}$$

y tomando límites de nuevo para $r \to 0$ en (2.2.2.14), se obtiene

$$\lim_{r\to 0} \mathcal{M}u(x,r,t) = 2\omega'_1(x,t), \tag{2.2.2.15}$$

Pero si se supone que u es continua se tiene también

$$\lim_{r\to 0} \mathcal{M}u(x,r,t) = u(x,t)$$

luego la ecuación (2.2.2.15) nos permite recuperar la solución u en términos de la onda plana ω_1, es decir,

$$u(x,t) = 2\omega'_1(x,t), \tag{2.2.2.16}$$

La idea que se sugiere ahora de forma natural es intentar determinar $\omega'_1(x,t)$ a partir de los datos iniciales del problema (2.2.2.1). Pero de la ecuación (2.2.2.13), se concluyen las dos identidades siguientes

$$\begin{cases} (r\mathcal{M}u)_r(x,r,t) = \omega'_1(x,r+t) + \omega'_1(x,t-r) \\ (r\mathcal{M}u)_t(x,r,t) = \omega'_1(x,r+t) - \omega'_1(x,t-r) \end{cases} \tag{2.2.2.17}$$

o bien,

$$(r\mathcal{M}u)_r(x,r,t) + (r\mathcal{M}u)_t(x,r,t) = 2\omega'_1(x,r+t). \tag{2.2.2.18}$$

Pero si ahora se toman límites en (2.2.2.18) para $t \to 0$, resulta

$$\begin{gathered} 2\omega'_1(x,r) = \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{4\pi}\int_{|v|=1} u(x+rv,0)d\omega\right) + \frac{r}{4\pi}\int_{|v|=1} u_1(x+rv,0)d\omega = \\ = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{4\pi}\int_{|v|=1} f(x+rv)d\omega\right) + \frac{r}{4\pi}\int_{|v|=1} g(x+rv)d\omega. \end{gathered} \tag{2.2.2.19}$$

Como $(2.2.2.19)$ determina ω'_1en función de los datos iniciales y (2.2.2.16) expresa u en términos de ω'_1, podemos escribir

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{|v|=1} f(x+tv)d\omega\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{|v|=1} g(x+tv)d\omega. \tag{2.2.2.20}$$

A la vista de la anterior expresión es natural requerir que $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ si se quiere obtener $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$, en este sentido podemos enunciar el resultado central de ese tema.

Teorema 2.2.2.1

Sean $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$entonces la función $u(x,t)$ definida por (2.2.2.20) tiene segundas derivadas continuas y es la solución del problema de Cauchy (2.2.2.1).

Además la solución del problema (2.2.2.1) depende continuamente de los datos con respecto a la convergencia uniforme sobre compactos de los datos y de sus primeras derivadas.

Demostración.

Una vez hecha la construcción de $u(x,t)$ por la formula (2.2.2.20), sólo queda comprobar que, en efecto, es solución del problema (2.2.2.1). En primer lugar se tiene que u satisface los datos iniciales pues

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) =$$

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{|v|=1} f(x+tv)\,d\omega + \frac{t}{4\pi}\int_{|v|=1}\langle\nabla f(x+tv), v\rangle\,d\omega + \frac{t}{4\pi}\int_{|v|=1} g(x+tv)\,d\omega\right\} \qquad (2.2.2.21)$$

$$= f(x)$$

por la regularidad de f y g. Y también

$$\lim_{t\to 0} u_t(x,t) = \qquad (2.2.2.22)$$

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|v|=1} g(x+tv)\,d\omega+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|v|=1}\langle\nabla f(x+tv),v\rangle\,d\omega\right\}+$$
$$+\lim_{t\to 0} t\left\{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\limits_{|v|=1} f(x+tv)d\omega\right)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|v|=1} g(x+tv)d\omega\right)\right\}=$$
$$=g(x)$$

por la continuidad de los datos iniciales y de sus derivadas parciales y porque

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|v|=1}\langle\nabla f(x+tv),v\rangle\,d\omega=\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}(f_{x_i}(x)\int\limits_{|v|=1} v_i\,d\omega)$$

ya que las componentes de la normal en la esfera son funciones impares y entonces su integral se anula.

Para ver que es solución basta notar que si $h\in C^2(\mathbb{R}^3)$ y se define

$$v(x,t)=t\overline{M}h(x,t),$$

donde

$$\overline{M}h(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|v|=1} h(x+tv)\,d\omega \qquad (2.2.2.23)$$

entonces, $v(x,t)$ es solución de la ecuación de ondas. Pero

$$v_{tt}(x,t)=2\frac{\partial}{\partial t}\overline{M}h(x,t)+t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{M}h(x,t). \qquad (2.2.2.24)$$

Calcularemos ahora Δv para ello se observa que

$$\frac{1}{4\pi t^2}\int\limits_{|x-y|\le t}\Delta h(y)dy=\frac{1}{4\pi t^2}\int\limits_{|x-y|=t} h_v(y)d\sigma(y)=$$
$$=\frac{1}{4\pi t^2}\int\limits_{|x-y|=t}\sum_{i=1}^{3} h_{x_i}(y)v_i d\sigma(y)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|v|=1}\sum_{i=1}^{3} h_{x_i}(x+tv)v_i d\omega= \qquad (2.2.2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{M}h(x,t),$$

donde se ha aplicado el teorema de la divergencia y que $d\sigma(y) = t^2 d\omega$.

Pero el primer término de (2.2.2.25) se calcula también pasando a coordenadas polares y resulta

$$\frac{1}{4\pi t^2}\int_{|x-y|\le t}\Delta h(y)dy = \frac{1}{4\pi t^2}\int_0^t\int_{|x-y|=\rho}\Delta h(y)d\sigma(y). \qquad (2.2.2.26)$$

Por lo tanto, de (2.2.2.25) y de (2.2.2.26) se concluye

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{M}h(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi t^2}\int_0^t\int_{|x-y|=\rho}\Delta h(y)d\sigma(y) =$$

$$\frac{-1}{2\pi t^3}\int_0^t\int_{|x-y|\le t}\Delta h(y)d(y) + \frac{1}{4\pi t^2}\int_0^t\int_{|x-y|=t}\Delta h(y)d\sigma(y) \qquad (2.2.2.27)$$

Entonces sustituyendo (2.2.2.25) y (2.2.2.27) en (2.2.2.24) se tiene

$$v_{tt} = \Delta v,$$

como se quería demostrar.

La conclusión de que u es solución de ecuación de ondas es consecuencia de ser suma de medias esféricas, como v.

La dependencia continua resulta como sigue. Supongamos datos f, g y $\bar{f}, \bar{g}$, y sean u y $\bar{u}$ las respectivas soluciones. Supondremos que

a) $f(x) = \bar{f}(x)$ y $g(x) = \bar{g}(x)$ en $x \in \mathbb{R}^N - B(0,R)$.

b) Para $T > 0$ dado $\epsilon > 0$

$$\left|f(x) - \bar{f}(x)\right| < \frac{\epsilon}{3+T}, \quad \left|\nabla \mathrm{f}(\mathrm{x}) - \nabla \bar{f}(x)\right| < \frac{\epsilon}{3+T}, \quad |\nabla \mathrm{g}(\mathrm{x}) - \nabla \bar{g}(x)| < \frac{\epsilon}{3+T}$$

Entonces partir de (2.2.2.20), obtenemos
$|u(x,t) - \bar{u}(x,t)| \leq \epsilon.$ ■

2.2.3. El problema de Cauchy en dimensión espacial dos: método de descenso de Hadamard

Una vez resuelto el problema de Cauchy para la ecuación de ondas en dimensión espacial 3, nos ocupamos en esta sección de obtener fórmulas explícitas para la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x_1,x_2,t) - \Delta u(x_1,x_2,t) = 0 \ \ (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ u(x_1,x_2,0) = f(x_1,x_2)(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x_1,x_2,t) = g(x_1,x_2)(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}, \tag{2.2.3.1}$$

La idea para obtener la solución de (2.2.3.1) en función de los datos es sencilla y debida a J. Hadamard. De forma precisa es la siguiente.

Se consideran los datos en (2.2.3.1) como funciones definidas en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, independientes de x_3, es decir,

$$\begin{cases} \tilde{f}(x_1,x_2,x_3) = f(x_1,x_2) \\ \tilde{g}(x_1,x_2,x_3) = g(x_1,x_2) \end{cases}, \tag{2.2.3.2}$$

y se calcula la solución de la ecuación de ondas en tres dimensiones espaciales con los datos (2.2.3.2). Tal solución viene dada por la expresión

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{|v|=1} \tilde{f}(x+tv)d\omega\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{|v|=1} \tilde{g}\,(x+tv)\,d\omega, \qquad (2.2.3.3)$$

La no dependencia de $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ de la variablex_3, motiva que v sea independiente de x_3, en particular entonces $v_{x_3x_3} = 0$. Por tanto, v es solución de la ecuación del problema (2,2.3.1).

Con estas ideas, la solución de (2.2.3.1) viene expresada por

$$u(x_1,x_2,t) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{|v|^2=1} \tilde{f}\big(x_1+tv_1, x_2+tv_{2,}x_3+tv_3\big)d\omega\right) + \qquad (2.2.3.4)$$

$$\frac{t}{4\pi}\int_{|v|^2=1} \tilde{g}\,(x_1+tv_1, x_2+tv_{2,}x_3+tv_3)\,d\omega,$$

y vamos a expresar las medias esféricas tridimensionales en términos bidimensionales. Para ello observemos que, por ejemplo,

$$\frac{t}{4\pi}\int_{v_1^2+v_2^2+v_3^2=1} \tilde{f}\,(x_1+tv_1, x_2+tv_{2,}x_3+tv_3)\,d\omega = \frac{t}{4t\pi}\int_{|x-y|=1} \tilde{f}(y)d\sigma(y), \qquad (2.2.3.5)$$

En consecuencia hemos de integrar sobre la esfera

$$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + y_3^2 = t^2.$$

Por tanto, escribiendo

$$y_3 = \pm\sqrt{t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}$$

el elemento de área es

$$d\sigma(y) = \frac{t dy_1 dy_2}{(t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2)^{1/2}}$$

Llamado $|\overline{x} - \overline{y}| = (t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$ se tiene que (2.2.3.5) se transforma

$$\frac{t}{4t\pi} \int_{|x-y|=1} \tilde{f}(y) d\sigma(y) = \frac{2}{4t\pi} \int_{|\overline{x}-\overline{y}|=1} f(y_1, y_2) \frac{t dy_1 dy_2}{(t^2 - |\overline{x} - \overline{y}|^2)^{1/2}}.$$

$$\frac{t}{4\pi} \int_{v_1^2+v_2^2+v_3^2=1} \tilde{f}\,(x_1 + tv_1, x_2 + tv_2, x_3 + tv_3)\, d\omega = \frac{t}{4t\pi} \int_{|x-y|=1} \tilde{f}(y) d\sigma(y), \qquad (2.2.3.6)$$

Con este planteamiento podemos formular el teorema de existencia y unicidad para dimensión espacial dos que se obtienen del teorema (2.2.2.1).

Teorema 2.2.3.1 Sean $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$,entonces la solución única del problema (2.2.3.1) viene dada por la expresión siguiente

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{|\overline{x}-\overline{y}|=t} \frac{f(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{(t^2 - |\overline{x} - \overline{y}|^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2\pi} \int_{|\overline{x}-\overline{y}|=t} \frac{g(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{(t^2 - |\overline{x} - \overline{y}|^2)^{\frac{1}{2}}}\right), \qquad (2.2.3.7)$$

Además la solución depende continuamente de los datos en el mismo sentido que en el teorema (2.2.2.1).

El método de Hadamard que hemos estudiado se conoce como método de descenso, nombre que resulta ahora transparente. Lo que quiere decir es que resolviendo la ecuación en dimensión 3, se puede "descender" a dimensión dos por simple reinterpretación de las fórmulas explícitas. Este método se aplica en todas las dimensiones pares. De hecho, se resuelve el problema de Cauchy en las dimensiones impares y a partir de dichas soluciones se obtiene la solución en dimensiones pares por el método de Hadamard. Las demás propiedades que pueden concluirse de (2.2.3.7) se estudian en la sección 2.2.5.

2.2.4. La ecuación de onda no homogénea

Se considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = \omega(x,t)(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.2.4.1}$$

donde $\omega \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ y $N = 1, 2$ o 3.

Es evidente que si se resuelve el problema (2.2.4.1), con los resultados de las secciones anteriores y la linealidad de la ecuación, se habrá resuelto el problema general

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = \omega(x,t)(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.2.4.2}$$

La idea de cómo obtener la solución de (2.2.4.1) es sugerida por el método de variación de las constantes de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, que se ve complicado aquí por el hecho de que el espacio de soluciones de la ecuación homogénea no es de dimensión finita. Desde un punto de vista físico se puede obtener el método por la siguiente idea: Puesto que el impulso, es decir, la fuerza por unidad de tiempo, es igual a la masa por la velocidad, o cantidad de movimiento, entonces la solución del problema (2.2.4.1) parece que debe poder expresarse como una "suma" de soluciones de los problemas.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t,s) - \Delta u(x,t,s) = 0 \\ u(x,s,s) = 0 \\ u_t(x,s,s) = \omega(x,s), \end{cases} \tag{2.2.4.3}$$

Esta estrategia es la seguida por Duhamel y la recogemos en el siguiente proceso:.

Teorema 2.2.4.1 Sea $\omega \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$, entonces la solución de (2.2.4.1) es

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,s)\, ds \qquad (2.2.4.4)$$

Demostración. Se tiene que $u(x,0) = 0$, y

$$u_t(x,t) = v_t(x,t,t) + \int_0^t v_t(x,t,s)\, ds = \int_0^t v_t(x,t,s)\, ds \qquad (2.2.4.5)$$

por ser solución de (2.2.4.3), entonces también se tiene que $u_t(x,0) = 0$. Por otro lado, derivando respecto a t en (2.2.4.5) resulta

$$u_{tt}(x,t) = v_t(x,t,t) + \int_0^t v_{tt}(x,t,s)\, ds \qquad (2.2.4.6)$$

$$= \omega(x,t) + \int_0^t \Delta v(x,t,s)\, ds \; = \omega(x,t) + \Delta\left(\int_0^t v(x,t,s)\, ds\right) =$$

$$= \omega(x,t) + \Delta u(x,t),$$

es decir, u es solución

■

Como tenemos fórmulas precisas para los problemas (2.2.4.3) en dimensiones $N = 1, 2$ y 3, podemos obtener explícitamente la solución de (2.2.4.1). Haremos una primera observación que implicará los cálculos posteriores. Como la ecuación de ondas es invariante por traslaciones, si se define $U(x,t,s) = v(x,t+s,s)$, entonces se verifica

$$\begin{cases} U_{tt}(x,t,s) - \Delta U(x,t,s) = 0 \\ U(x,0,s) = 0 \\ U_t(x,0,s) = \omega(x,s). \end{cases} \qquad (2.2.4.7)$$

Por lo tanto, en virtud de (2.2.1.14), (2.2.3.7) y (2.2.2.20), respectivamente, se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \omega(y,s)dy, \text{ si } N=1 \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{|x-y|\le t} \dfrac{\omega(y,s)dy}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}} \text{ si } N=1 \\ \dfrac{1}{4\pi t}\displaystyle\int_{|x-y|=t} \omega(x,s)d\sigma(y), \quad si \quad N=3\,. \end{cases} \tag{2.2.4.8}$$

Según el teorema (2.2.4.1) ha de ser

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,s)ds \equiv \int_0^t U(x,t-s,s)ds,$$

y entonces la fórmula para la solución de (2.2.4.1) de acuerdo con la dimensión es

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \omega(y,s)dy, \text{ si } N=1 \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \int_{|x-y|\le(t-s)} \dfrac{\omega(y,s)dy}{\sqrt{(t-s)^2-|x-y|^2}} \text{ si } N=1 \\ \dfrac{1}{4\pi t}\displaystyle\int_0^t \left(\dfrac{1}{t-s}\int_{|x-y|=(t-s)} \omega(x,s)d\sigma(y)\right)ds \quad si \quad N=3. \end{cases} \tag{2.2.4.9}$$

2.2.5. Energía y unicidad de solución del problema de Cauchy

Considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \;\; (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, N = 1,2,3 \end{cases} \tag{2.2.5.1}$$

y supongamos que f y g verifican las hipótesis de regularidad de los teoremas de existencia probados en las secciones anteriores, y que tienen soporte compacto, es decir, son cero fuera de una bola $B(0, R)$.

De acuerdo con las fórmulas explícitas obtenidas para la solución $u(x, t)$ de (2.2.5.1) el soporte de u satisface para cada t fijo

$$\text{sop}\, u(x, t) \subset B(0, R + |t|).$$

Si se multiplica la ecuación por u_t se tiene

$$0 = u_t\big(u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t)\big) = \frac{1}{2}(U_t)_t^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left|u_{x_i}\right|_t^2 - \sum_{i=1}^{N}\left(u_{x_i}u_t\right)_{x_i} = \tag{2.2.5.2}$$
$$\frac{\partial}{\partial}\frac{1}{2}\{u_t^2 + |\nabla_x u|^2\} - \text{div}\left\{\left(u_{x_i}u_t\right)_{i=1,\dots,N}\right\},$$

donde ∇_x denota el gradiente respecto a las variables espaciales. Integrando (2.2.5.2) sobre una bola $B(0, \rho) \subset \mathbb{R}^2$ con $\rho > R + |t_0|$ para t_0 fijado

$$0 = \frac{1}{2}\int_{B(0,\rho)} \frac{\partial}{\partial t}\{u_t^2(x, t_0) + |\nabla_x u(x, t_0)|^2\}dx - \tag{2.2.5.3}$$
$$\int_{B(0,\rho)} \text{div}\left\{\left(u_{x_i}(x, t_0)u_t(x, t_0)\right)_{i=1,\dots,N}\right\}dx,$$

llamando $S(0, \rho)$ a la frontera de la bola $B(0, \rho)$ y v a su normal exterior, por el teorema de la divergencia obtenemos

$$-\int_{B(0,\rho)} \text{div}\left\{\left(u_{x_i}(x, t_0)u_t(x, t_0)\right)_{i=1,\dots,N}\right\}dx = \tag{2.2.5.4}$$
$$-\int_{S(0,\rho)} \langle\left(u_{x_i}(x, t_0)u_t(x, t_0)\right)_{i=1,\dots,N}, v\rangle\, d\sigma \to 0 \quad \text{para} \quad \rho \to \infty,$$

en efecto, la integral es cero si $\rho > R + |t_0|$. Por tanto, a partir de (2.2.5.3) y (2.2.5.4) se concluye

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{B(0,\rho)} \{u_t^2(x,t_0) + |\nabla_x u(x,t_0)|^2\}dx. \tag{2.2.5.3}$$

La expresión

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{B(0,\rho)} \{u_t^2(x,t_0) + |\nabla_x u(x,t_0)|^2\}dx.$$

representa la energía, de forma que (2.2.5.5) se traduce diciendo que **la energía es constante en el tiempo**, o bien que

$$\mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{E}(0) = \frac{1}{2}\int_{B(0,\rho)} \{|g(x)| + |\nabla_x f(x)|^2\}dx. \tag{2.2.5.4}$$

Es evidente que el resultado que acabamos de obtener sobre la conservación de la energía, implica la unicidad de solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 \;\; (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ v(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \\ v_t = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, N = 1,2,3 \end{cases} \tag{2.2.5.5}$$

y según (2.2.5.6)

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{B(0,\rho)} \{|u_t(x,0)|^2 + |\nabla_x v(x,0)|^2\}dx$$

de donde, $v_t(x,t) = 0$ y $\nabla_x v(x,t) = 0$, es decir, v es constante y como $v(x,0) = 0$, $v(x,t) \equiv 0$, o bien, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

Observamos que el argumento anterior sigue siendo válido en cualquier dimensión y para cualquier solución con energía finita.

2.2.6. Propiedades de la solución de la ecuación de onda de acuerdo a la dimensión espacial

Por el mismo tipo de técnica que hemos usado para establecer la unicidad, vas a analizar lo relativo a la velocidad de propagación de las ondas. Este estudio te dará las bases para estudiar también el comportamiento de la propagación de las ondas según la dimensión.

Teorema.2.2.6.1 Sea $u \in C2^\wedge(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ y tal que $u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$ sobre la región $R^N \times [0,T]$.Supón que $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ sobre

$$B = \{(x,0) | \, |x - x_0| \leq t_0\}, \qquad \text{para algun } t_0 \in (0,t).$$

Entonces $u \equiv 0$ sobre la región canoníca

$$\mathcal{C} = \{(x,t) | \, 0 \leq t \leq t_1, \qquad |x - x_0| < t_0 - t\}.$$

Demostración. Para $0 < t_1 < t_0$ se considera el tronco de cono como

$$\mathcal{C} = \{(x,t) | \, 0 \leq t \leq t_1, \qquad |x - x_0| < t_0 - t\}$$

Se integra la identidad $0 = u_t(u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t))$ sobre $\mathcal{C}_{t_1}$, es decir

$$0 = \int_{\mathcal{C}_{t_1}} u_t(\Delta u - u_{tt})dxdt =$$

$$\int_{\mathcal{C}_{t_1}} \left(\sum_{i=1}^{N} (u_{x_i} u_t)_{x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \{ |u_t|^2 + |\nabla_x u|^2 \} \right) dxdt \qquad (2.2.6.1)$$

y aplicando el teorema de Gauss se tiene

$$0 = \int_S \left(-\frac{1}{2}(\{|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2\})v_0 + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i} u_t v_i \right) d\sigma(y) - \int_{B_{t_1}} \frac{1}{2}(\{|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2\})dx \quad (2.2.6.2)$$

siendo B_{t_1} el círculo superior del tronco de cono, S es la superficie lateral, $d\sigma(y)$ es el elemento de área en S y $v = (v_0, v_1, .., v_N)$ es la normal unitaria exterior a S. Observa que la base del tronco de cono no aparece en (2.2.5.9) por suponerse los datos nulos en $t = 0$.

Se calcula la integral sobre la superficie lateral S. En primer término, se tiene

Que $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, v_1 .., v_N)$ y entonces $\sum_{i=1}^{N} v_i^2 = 1 - v_0^2 = \frac{1}{2}$; en segundo lugar si I_s designa la integral sobre S en (2.2.6.2) se tiene

$$\begin{aligned} I_s &= \int_S \left(-\frac{1}{2}(|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2)v_0 + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i} u_t v_i \right) d\sigma(y) \\ &= \frac{-1}{2} \int_S \left(u_t^2 \left(v_0 - \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \right) + \frac{1}{v_0} \sum_{i=1}^{N} (v_{x_i} v_0 - u_t v_i)^2 \right) d\sigma(y) \le 0 \end{aligned} \quad (2.2.6.3)$$

como resulta por ser suma de cuadrados. De esta forma (2.2.6.2) y (2.2.6.3) permiten concluir

$$0 = \frac{1}{2} \int_{B_{t_1}} (|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2)\, dx \quad (2.2.6.4)$$

La regularidad de u y (2.2.6.4) implican que $u_t(x, t_1) = 0$ y $\nabla_x u(x, t_1) = 0$ para cualquier $x \in B_{t_1}$ y cualquier $0 < t_1 < T$. Por tanto u es constante en la región cónica $\mathcal{C}$ y como en la base de $\mathcal{C}$, es decir, sobre $t = 0$ y $x \in B, u(x, 0) \equiv 0$, resulta $u(x,t) \equiv 0$ para $(x,t) \in \mathcal{C}$.■

2.2.6.1 Definición

i) Dada una bola $B = \{x \in \mathbb{R}^N | \; |x - x_0| \leq r\}$ el dominio de determinación $C(x_0, r)$ es el conjunto de puntos $(x\ t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ para los que se determina de manera única la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas con datos en B.

ii) Dada una bola B en el plano $t = 0$ llamamos dominio de influencia de B al conjunto de puntos en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ en los que el valor de la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas depende de los datos en B. Lo notaremos por $\mathcal{B}(B)$.

2.2.6.2 Definición.

Dado un punto $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ el dominio de dependencia $\mathcal{A}_N(x_0, t_0 0)$ es el conjunto de puntos $(x, 0) \in \mathbb{R}^N \times \{0\}$ tales que la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas en el punto (x_0, t_0) depende de los valores de los datos en $\mathcal{A}_N(x_0, t_0)$

El teorema anterior junto con las fórmulas (2.2.1.14), (2.2.2.20) y (2.2.3.7), permiten determinar $\mathcal{C}(x_0, r)$ como el doble cono

$$\mathcal{C}(x_0, r) = \{(x, t)\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid |x - x_0| = r - |t| \}\ N = 1,2,3\ ,$$

A las superficies canónicas

$$S(x_o, r) = \{(x, t) | \; |x - x_0| = r - |t|\},$$

Se les llama **conos característicos** por coincidir con las características de la ecuación de ondas estudiadas en la tema 2.2.3. En otras palabras, los conos característicos son las fronteras de los dominios de determinación.

De esta forma dada una bola B en el plano $t = 0$, el dominio de anuencia $\mathcal{B}(B)$ es

el conjunto de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tal que los conos característicos con vértice en $\mathcal{B}(B)$ cortan a

B.

El mismo cálculo hecho para la ecuación de ondas en una dimensión en la tema

2.2.1, demuestra en general que la $velocidad\ de\ propagación\ es\ 1$.

De nuevo consideramos las fórmulas (2.2.1.14), (2.2.2.20) y (2.2.3.7). Se aprecia una diferencia sustancial entre lo que ocurre en dimensiones 1 y 2 y lo que ocurre en dimensión 3. En efecto, en el caso de dimensiones $N = 1$ y $N = 2$ el dominio de dependencia de un punto (x_0, t_0) es

$$\mathcal{A}_N(x_0, t_0) = \{(x, 0) |\ |x - x_0| \leq |t_0|\} \quad N = 1,2,3$$

Mientras que en dimensión $N = 3$ el dominio de dependencia es

$$\mathcal{A}_3(x_0, t_0) = \{(x, 0) |\ |x - x_0| \leq |t_0|\}.$$

En dimensión espacial tres resulta que el dominio **de dependencia es la intersección del cono característico con el plano** $t = 0$, es decir, si tomamos el cono característico

$S_3(x_0, |t_0|)$ con vértice en (x_0, t_0), se tiene

$$\mathcal{A}_3(x_0, t_0) = S_3(x_0, |t_0|) \cap \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}^3\}. \qquad (2.2.6.5)$$

Por el contrario en dimensiones 1 y 2 el dominio de dependencia es toda la bola y la intersección del cono característico con $t = 0$ es sólo la frontera de $A_1(x_0, t_0)$ y $A_2(x_0, t_0)$ en $\mathbb{R}^N$y $\mathbb{R}$, respectivamente.

La propiedad que expresa (2.2.5.12) se refiere diciendo que la ecuación de ondas en dimensión 3 satisface el **principio fuerte de Huygens**. Así pues la ecuación de ondas en dimensiones 1 y 2 no satisface el principio fuerte de Huygens.

Analizaremos que significa el principio fuerte de Huygens. Supongamos los datos en el problema de Cauchy (2.2.6.5) soportados en una bola $B \subset \mathbb{R}^N$.

En el caso de no verificarse el principio fuerte de Huygens, el dominio de influencia de una bola B es el tronco de cono con base B y superficie lateral generada por las características pasando por la frontera de B. Esto quiere decir que si tomamos un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ existe un tiempo t_0 en el cual el dominio de determinación $\mathcal{C}(x_0, t_0)$ corta a B en $t = 0$. Pero entonces es claro que a partir de ese instante continua verificándose que $\mathcal{C}(x_0, t_0)$ corta a B si $t > t_0$. En este sentido una propagación de ondas en dimensiones 1 y 2 con señal inicial de soporte compacto, tiene la propiedad que cuando la perturbación alcanza un punto permanece perturbándole para todo tiempo posterior. Piénsese en las ondas de agua de un estanque como ejemplo. Si el agua vuelve al reposo es por rozamiento y otras perturbaciones externas.

Si se verifica el principio fuerte de Huygens, es decir si estamos en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, y se toma un punto $x_0 \in R_3$ entonces los tiempos t que verifican que el cono característico con vértice en (x_0, t) interseca B es un intervalo acotado.

Esto quiere decir que el dominio de influencia de una bola B es el tronco de cono con base B, menos un cono interior.

Es decir, en tres dimensiones espaciales una perturbación de soporte compacto, llega a cada punto y después de un tiempo desaparece. El principio de Huygens fuerte permite que puedan emitirse sonidos y que posteriormente se vuelva al silencio.

¿Puede imaginar el lector un espacio físico sin principio de Huygens?, ¿Cómo podrían comunicarse los individuos en un espacio físico sin principio de Huygens?

2.3. El problema de Cauchy para la ecuación de calor

La ecuación de calor,

$$u_t - \Delta u = F(x,t) \tag{2.3.0.1}$$

Es un modelo más sencillo de ecuación de difusión, la cual revisaste en la Unidad 1, específicamente en el subtema 1.2.1, en esta unidad la viste como el problema de Cauchy para la ecuación de calor con los datos en $t = 0$, lo cual lo convierte en un problema característico.

A diferencia de la ecuación de ondas que permanece inalterable al cambiar t por $-t$, en la ecuación del calor aparece un signo menos delante de la derivada con respecto al tiempo. Esto dice que la ecuación del calor describe fenómenos irreversibles. Por otra parte, como se verá en la Unidad 3, al efectuar este cambio de variables en la ecuación del calor el decaimiento exponencial de la solución con respecto al tiempo se convierte en crecimiento exponencial.

En este tema se proyecta estudiar el problema de Cauchy en $\mathbb{R}^N$ comprobando que es compatible, si bien es necesaria una condición **unilateral** para obtener solución única, por ser característico.

Al fin de poder demostrar resultados de unicidad se establecerá el **principio del máximo para la ecuación del calor**.

Iniciarás con el estudio de algunos resultados básicos relativos a la transformada de Fourier de funciones integrales definidas en todo el espacio, lo cual serán indispensables para obtener la solución fundamental de la ecuación del calor.

El propósito fundamental es obtener la solución fundamental. Con ella se obtendrá una solución del problema de Cauchy homogéneo. También revisarás un contraejemplo de Tychonoff que pone de manifiesto la no unicidad. Además de exponer sin demostración el resultado general de unicidad de Widder.

Estudiarás el principio del máximo en dominios acotados y a los teoremas de unicidad más simples.

Al final del tema revisarás la solución del problema no homogéneo la cual se dedica a un análisis comparativo de las propiedades de la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas y la ecuación del calor.

2.3.1. Núcleo de Gauss. Solución del problema de Cauchy

Se tratará de obtener las soluciones de la ecuación del calor que son singulares en el origen.

Para empezar, se presentan algunos resultados de la teoría de la transformada de Fourier para funciones integrables en $\mathbb{R}^N$ ya que es necesaria para poder dar la estructura del núcleo de Gauss. Se comienza con la definición siguiente:

Definición. [Transformada de Fourier]

Sea f una función integrable en $\mathbb{R}$, es decir, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$$

Se define la **transformada de Fourier** de f por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t\xi} f(t)\, dt \tag{2.3.1.1}$$

En calidad de ejemplo y, como se verá más adelante, por su importancia para la obtención de la transformada inversa de Fourier en la clase de las funciones temperadas, se calculará la transformada de Fourier de la función gaussiana, es decir, la transformada de Fourier de

$$g(x) = e^{-a\pi|x|^2}, \qquad a > 0.$$

Escribiendo la fórmula $(2.3.1.1)$ para la función g se tiene

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t\xi} e^{-a\pi|x|^2}\, dt \tag{2.3.1.2}$$

colocando

$$\pi a t^2 + 2\pi i t\xi = \left(\sqrt{a\pi}t + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi\right)^2 + \frac{\pi}{a}\xi^2$$

resulta

$$\hat{g}(\xi) = e^{-\frac{\pi}{a}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a\pi}t + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi\right)^2} dt \tag{2.3.1.3}$$

Calculando la integral que se tiene en $(2.3.1.3)$ usando variable compleja. Fijado ξ y para cada $R > 0$ consideramos la trayectoria Γ definida por el segmento del eje real que va de $-R + i0$ a $R + i0$, el segmento vertical que une el punto $R + i0$ y el punto $R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$, el segmento horizontal uniendo el punto $R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$ con el punto $-R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$ y por último, el segmento vertical uniendo el punto $-R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$ con $R + i0$. El interior de Γ es un rectángulo que se denotará $\mathcal{R}_\Gamma$, donde la función de variable compleja $h(z) = e$▯, es analítica. El teorema de Cauchy implica entonces que

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = 0$$

Como además

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\xi} e^{-\left(\sqrt{a\pi}R+is\right)^2} ds\right| = 0$$

resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a\pi}t+i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi\right)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a\pi t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{a\pi}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \qquad (2.3.1.4)$$

Dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

sustituyendo en $(2.3.1.3)$ obtenemos

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi}{a}\xi^2} \qquad (2.3.1.5)$$

que muestra como la transformada de Fourier de una gaussiana es otra gaussiana.

Dado el éxito obtenido con la gaussiana, se destacan algunas de sus propiedades; fundamentalmente en las dos siguientes:

1) Toda gaussiana, $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

2) Dada una gaussiana g y dados enteros no negativos n y m se verifica

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m \frac{d^n g}{dx^n}(x)\right| < c(m,n) \qquad (2.3.1.6)$$

donde $c(m,n)$ es una constante dependiendo de n y m.

Ambas propiedades se obtienen por cálculo directo. Es posible agrupar en una familia a todas las funciones verificando las propiedades 1) y 2) de la gaussiana. Tal clase de funciones se suele designar como por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en honor a Laurent Schwartz, quien por primera vez la introdujo, llamándola **clase de las funciones temperadas**. El nombre es bastante afortunado pues quiere decir que está en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ella y cualquier derivada suya tiende a cero en el infinito más rápidamente que cualquier polinomio. Formalmente la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se da de la siguiente forma:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \colon \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^m \frac{d^n f}{dx^n}(x) \right| < c_{m,n} < \infty, \;\; n, m \in \mathbb{N} \right\} \qquad (2.3.1.7)$$

De la propia definición de $\mathcal{S}$ se sigue que:

a) Si $f, g \in \mathcal{S}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{S}$.
b) Si $f, g \in \mathcal{S}$, entonces $fg \in \mathcal{S}$.

Además si f es una función temperada, tomando en la ecuación $(2.3.1.6)$ $n = 0$ y $m = 2$ se tiene que

$$|(1 + |x|^2) f(x)| \le M \qquad (2.3.1.8)$$

por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \le M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} < \infty \qquad (2.3.1.9)$$

es decir, f es integrable.

La observación anterior implica, en particular, que la transformada de Fourier de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ésta bien definida pues

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt, \qquad (2.3.1.10)$$

y la integral es finita. De $(2.3.1.10)$ y $(2.3.1.9)$ se concluye

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\xi) \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \qquad (2.3.1.11)$$

es que la transformada de Fourier de una función integrable es acotada y entonces, en particular, esto es cierto si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Las propiedades más elementales de la transformada de Fourier de funciones temperadas ponen de manifiesto cómo serán las aplicaciones de ella a las ecuaciones en derivadas parciales. El siguiente teorema da algunas de estas propiedades.

Teorema.

Sea $f \in S(\mathbb{R})$, entonces

1) $\hat{f} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ y además

$$\frac{d^k \hat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \hat{g}(\xi), siendo\ g(x) = (-2\pi i x)^k f(x) \tag{2.3.1.12}$$

2) $\frac{d^k \hat{f}}{dx^k}(x) \in S(\mathbb{R})$, además

$$\widehat{\frac{d^k f}{dx^k}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \hat{f}(\xi) \tag{2.3.1.13}$$

3) Si se supone también que g es una función integrable y se define

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt \equiv f * g\,(x) \tag{2.3.1.14}$$

integral de convolución de f y g, se tiene que h es integrable y que

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \tag{2.3.1.15}$$

4) $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La demostración de este teorema puede hacerse de manera directa realizando la transformada de Fourier, integrando por partes y aplicando el teorema de Fubini.

■

Se puede resumir el teorema anterior como sigue:

a) La transformada de Fourier aplica $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$, es decir, $\hat{}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.
b) La transformada de Fourier transforma derivación en multiplicación por monomios como se indica en la expresión $(2.3.1.13)$.
c) La derivación de la transformada por Fourier es la transformada de Fourier del producto de un monomio por la función, como precisa la fórmula $(2.3.1.12)$.
d) El producto de convolución es transformado en el producto de las transformadas de Fourier, como expresa $(2.3.1.15)$.

Observaciones.

1) La transformada de Fourier se extiende a $\mathbb{R}^N$ por la fórmula

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t) e^{-2\pi i \langle t, \xi \rangle} dt$$

donde $\langle \, , \rangle$ es el producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

2) La transformación de Fourier permite que un problema diferencial se convierta en un problema algebraico, por ejemplo, si se quiere resolver el problema

$$\Delta u = f, en \, \mathbb{R}^2 \qquad (2.3.1.17)$$

se transforma en

$$-4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \qquad ()$$

Para que la estrategia expuesta culmine con éxito el cálculo de una solución de $(2.3.1.17)$, es necesario saber si es posible recuperar una función a partir de su transformada de Fourier, es decir, se necesita saber invertir la transformada de Fourier. Para ello se debe tomar en cuenta lo siguiente:

El apartado 4) del teorema 2.3.1.2 tiene como caso particular que

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \left| \hat{f}(\xi) \right| = 0 \qquad (2.3.1.18)$$

que puede verse como una extensión a la transformada de Fourier del teorema de Riemann-Lebesgue demostrado para series de Fourier, es decir, se tiene un resultado de localización.

Realmente el resultado, que es conocido también como teorema de Riemann-Lebesgue, es para funciones integrables y puede obtenerse de (2.3.1.18) por un argumento de densidad de $\mathcal{S}$ en las funciones integrables.

Teorema [Riemann-Lebesgue]

Sea f función integrable en $\mathbb{R}$, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty}|f|dx < \infty$, entonces

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right| = 0 \tag{2.3.1.19}$$

Demostración.

Para f función integrable y $\varepsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{S}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f-g|dx < \varepsilon$$

Entonces

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \left|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)\right| + |\hat{g}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f-g|dx + |\hat{g}(\xi)|,$$

que teniendo en cuenta $(2.3.1.18)$, implica que para todo $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \varepsilon$$

Lo que prueba el resultado.

■

A continuación se presenta un resultado importante.

Lema

Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}f(y)\hat{g}(y)dy \tag{2.3.1.20 }$$

Demostración.

Basta utilizar el teorema de Fubini,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t\xi} g(t)dt\right)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t\xi} f(\xi)d\xi\right)dt$$

que prueba el resultado.

■

Este resultado y el hecho que la transformada de Fourier de una gaussiana es otra gaussiana serán los elementos fundamentales de la prueba del teorema de inversión.

Si $f \in \mathcal{S}$ se tiene que $\hat{f} \in \mathcal{S}$, entonces tiene sentido la siguiente definición.

Definición [Transformada inversa de Fourier]

Sea $\hat{f}$ transformada de Fourier de $f \in \mathcal{S}$ se define:

$$(\hat{f})^{\check{}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t\xi} \hat{f}(\xi)d\xi$$

La conjetura es que $(\hat{f})^{\check{}} = f$. El resultado siguiente prueba esta conjetura.

Teorema [Inversión de la transformada de Fourier]

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces $(\hat{f})^{\check{}} = f$.

■

La demostración, no compete a los objetivos de esta unidad, dado que corresponde a transformaciones lineales, el resultado importante de esto es que es posible regresar a la función original dada la transformada de Fourier, por lo que dadas las propiedades de continuidad de la transformada es posible resolver una ecuación diferencial respecto de su transformada y luego aplicar la transformada de Fourier inversa para obtener la función que es la solución buscada.

El teorema de inversión de la transformada de Fourier tiene una consecuencia interesante que se presenta en el siguiente teorema.

Teorema [Identidad de Plancherel]

Si i $f \in \mathcal{S}$ se verifica:

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

Demostración.

Sea $g(x) = f(-x)$ y, por tanto, $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. Las propiedades de la transformada de Fourier demostradas en el teorema 2.3.1.2 permiten escribir la siguiente cadena de identidades

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x)dx = f * g(0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{f * g})(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \left\|\hat{f}\right\|_2^2$$

■

Observación

La densidad de $\mathcal{S}$ en L^2 y el teorema anterior, permite definir la transformada de Fourier sobre L^2. En efecto, sea $f \in L^2$ y supongamos $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\|_2 = 0$$

Se define:

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \hat{g}_n(\xi).$$

De esta manera la transformada de Fourier es inversible en L^2 verificándose además que es una isometría en L^2 pues se tiene la extensión de la identidad de Plancherel a L^2, es decir,

$$\|f\|_2 = \left\|\hat{f}\right\|_2, \qquad \forall f \in L^2$$

Continuando con el Núcleo de Gauss, el trabajo de realizar la transformada de Fourier permite resolver las dimensiones para las cuales no es posible aplicar el método de obtener el núcleo, esto se explica adelante.

Se empieza por el caso dimensional espacial uno que es más sencillo de describir y en el que usaremos un argumento de **homogeneidad fuerte al cambio de escala**, que reduce el problema a una ecuación ordinaria.

El uso de la transformación de Fourier permitirá obtener la **solución fundamental** en dimensiones mayores.

A) En el caso de dimensión $N = 1$, hay un camino muy elemental para obtener la **solución fundamental**.

Se buscan soluciones **autosemejantes**, es decir, soluciones que al cambiar la escala "convenientemente" permanecen invariantes. Más precisamente, la escala "conveniente" queda determinada observando que en la ecuación del calor hay una derivada en el tiempo y dos en el espacio. Con esta observación, se hace el cambio de escala $x = \lambda^{\alpha} y,\ t = \lambda^{\beta} s$ y consideramos para una solución u,

$$v(y, s) = u(\lambda^{\alpha} y, \lambda^{\beta} s) = u(x, t)$$

Para que v sea solución se debe tener,

$$v_s - v_{yy} = 0$$

al calcular,

$$v_s - v_{yy} = \lambda^{\beta} u_t - \lambda^{2\alpha} u_{xx}$$

de manera que si $\beta = 2\alpha$ se tiene que,

$$v_s - v_{yy} = \lambda^{\beta}(u_t - u_{xx}) = 0$$

Como consecuencia, parece natural buscar soluciones que respeten la homogeneidad observada, es decir, soluciones que dependen de la variable $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$. La forma de una de estas funciones es:

$$u(x, t) = t^{\alpha} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Imponiendo que u verifique la ecuación, $u_t - u_{xx} = 0$, se debe tener,

$$f''(\xi) + \frac{\xi}{2} f'(\xi) - \alpha\, f(\xi) = 0,$$

Donde $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Desde el punto de vista físico se sabe que hay que imponer la conservación de la cantidad de calor. Normalizando se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = 1$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = t^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$$

por lo tanto, necesariamente se debe tener $\alpha = -\frac{1}{2}$. La ecuación ordinaria puede escribirse como

$$(2f' + \xi f)' = 0$$

Tomando en particular las soluciones de

$$2f' + \xi f = 0, es\ decir, f(\xi) = ce^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

que para que tenga integral uno, debe ser,

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

núcleo de Gauss, que es la **solución fundamental buscada**. La justificación del nombre quedará clara en unas cuantas líneas. El método es sensible a más dimensiones. Se omiten más detalles, pues se tiene un método alternativo que se estudia a continuación

B) Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^N, \;\; t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \;\; x \in \mathbb{R}^N, \;\; f \in S(\mathbb{R}^N) \end{cases} \qquad (2.3.1.21)$$

Donde $\mathcal{S}$ es el espacio de funciones temperadas que se introdujo al empezar el subtema, en el cual la transformación de Fourier se comporta bien. Si se aplica la transformación de Fourier en las variables espaciales, es decir,

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i \langle x,\xi \rangle} u(x,t) dx$$

se tiene

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) + 4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t) = 0, & \xi \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \end{cases} \tag{2.3.1.22}$$

Integrando la ecuación ordinaria en t, considerando ξ como parámetro, se obtiene:

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-4\pi|\xi|^2 t}$$

Como se trata de una función gaussiana podemos calcular su transformada de Fourier, como se hizo anteriormente, resultando otra gaussiana a la que llamamos **núcleo de Gauss**. Más precisamente

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} e^{-4\pi|\xi|^2 t} d\xi = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Por lo tanto, por el apartado 3) del teorema 2.3.1.2 se tiene

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy \tag{2.3.1.23}$$

que al ser $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, esta bien definida.

Llamando

$$K(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

y definiendo

$$K_t(x) = \frac{1}{t^{\frac{N}{2}}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

es decir,

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

se verifica

1) $K_t(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,
2) $\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x)dx = 1$
3) $\lim_{t\to 0} \int_{|x|>\delta>0} K_t(x)dx = 0$

Las tres propiedades se comprueban de forma inmediata por cálculo directo.

A $K_t(x)$ es llamada solución fundamental de la ecuación del calor. El siguiente resultado justifica esta denominación.

Nota que la fórmula (2.3.1.23) tiene sentido también si, por ejemplo, se supone que $f \in C(\mathbb{R}^N)$ y está acotada. Por eso se formula el resultado en el contexto de las funciones continuas.

Teorema

Sea $f \in C(\mathbb{R}^N)$ tal que $|f(x)| < M$ si $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, $u(x,t)$ definida por (2.3.1.23) verifica

1) $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}^N \times (0,\infty)\big)$,
2) $u_t - \Delta u = 0$ si $x \in \mathbb{R}^N, t > 0$,
3) $\lim\limits_{t\to 0} u(x_0,t) = f(x_0)$ siendo la convergencia uniforme,
4) $|u(x,t)| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)|, (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$.

Demostración.

La demostración es una consecuencia de que $K_t(t)$ es una aproximación de la identidad. En efecto, los apartados 1) y 2) resultan de la deducción de K_t y pueden comprobarse también por cálculo directo sin grandes dificultades. La conclusión 4) resulta directamente de la propiedad 2) para el núcleo de Gauss K_t.

En cuanto a 3) para $x_0 \in \mathbb{R}^N$, se tiene

$$|u(x_0,t) - f(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x_0 - y)\big(f(y) - f(x_0)\big)dy \right|. \tag{2.3.1.24}$$

Por la continuidad de f, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y - x_0| < \delta, |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$; entonces en (2.3.1.24) resulta

$$|u(x_0,t) - f(x_0)| = \varepsilon \int_{|x_0-y|<\delta} K_t(x_0 - y)dy + 2\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|f(x)| \int_{|x_0-y|<\delta} K_t(x_0 - y)dy \tag{2.3.1.25}$$
$$\leq 2\varepsilon$$

esto debido a las propiedades del núcleo K.

Como se estudió en el subtema $2.1.4$, el problema $2.3.1.7$ es característico, por lo que sin condiciones adicionales no es de esperar unicidad. Así lo pone de manifiesto el ejemplo debido a Tychonoff que se analiza a continuación sin demostración.
Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2.3.1.26}$$

este tiene la solución cero. La idea es usar el problema **no característico**,

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,t) = g(t), & t \in \mathbb{R} \\ u_x(0,t) = 0, \end{cases} \tag{2.3.1.27}$$

para buscar soluciones de $(2.3.1.26)$.

Se puede demostrar que si se toma

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \qquad (\ )$$

para $\alpha > 1$, entonces la correspondiente solución $u(x,t)$ del problema no característico es una solución no nula del problema característico, con lo cual se obtiene la no unicidad mencionada. Es posible mostrar que la solución obtenida del problema de Cauchy no es acotada en $\mathbb{R} \times (0,\infty)$. Este hecho sugiere que para obtener resultados de unicidad de solución del problema de Cauchy, es conveniente imponer condiciones al crecimiento de la solución en infinito.

Un importante resultado del propio Tychonoff dice que si la solución del problema de Cauchy homogéneo con condición inicial nula satisface la acotación $|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2}$ para $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T)$, entonces ella tiene que ser identicamente nula en este dominio.

Sin embargo, hay un resultado de D. Widder, mucho más interesante, no sólo desde el punto de vista matemático sino también por su significado físico.

Una de las consecuencias del Segundo Principio de la Termodinámica es que la temperatura absoluta es siempre positiva. Este hecho sugiere que la condición natural a verificar por las soluciones de la ecuación del calor es la condición unilateral $u \geq 0$.

Evidentemente es lo mismo suponer $u \geq H$, pues el cambio en la escala de temperaturas $v = u - H$, conduce al caso $v \geq 0$. Widder prueba que con la condición físicamente natural de que la temperatura sea positiva, el problema de Cauchy para la ecuación del calor tiene una única solución.

2.3.2. El principio del máximo. Resultados clásicos de unicidad

Comenzarás esta sección estableciendo el principio del máximo débil para el problema de Dirichlet. Como consecuencia, se tiene la prueba de unicidad para el problema que se estudiará más adelante.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular $\partial\Omega$, y sea $0 < T < \infty$.

Se define $\mathcal{D}_T = \Omega \times (0, T)$ y **la frontera parabólica de $\boldsymbol{\mathcal{D}_T}$**

$$\Gamma_P := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$$

Teorema

Sea $u \in C(\overline{\mathcal{D}}_T)$, tal que $u_t, u_{x_i x_j} \in C\big(\mathcal{D}_T \cup (\Omega \times \{T\})\big), i, j = 1,2, \dots, N$ y

$$u_t - \Delta u \leq 0 \; en \; \mathcal{D}_T.$$

Entonces

$$\max_{\Gamma_p} u = \max_{\mathcal{D}_T} u$$

Demostración.

Si se hace la hipótesis adicional

$$u_t - \Delta u < 0 \; en \; \mathcal{D}_T \qquad (2.3.2.1)$$

el resultado es inmediato. En efecto, si se tuviese que el máximo se alcanza en un punto $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}_{T'} \equiv \Omega \times (0, T'), T' < T$, habría de verificarse que

$$u_t(x_0, t_0) = 0, \Delta u(x_0, t_0) \leq 0,$$

con lo cual se contradice con el teorema. Por consiguiente, en la hipótesis el máximo no se puede alcanzar en $\mathcal{D}_{T'}$, para cualquier $T' < T$. Si el máximo se alcanzase en $(x_0, T) \in \Omega \times \{T\}$ se tendría

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0, \qquad \Delta u(x_0, t_0) \leq 0,$$

que contradice también el teorema, por lo tanto, en la hipótesis el máximo se alcanza en Γ_P.

Se trata ahora de quitar la hipótesis adicional. Para ello se considera para cada $\varepsilon > 0$ la función

$$v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon |x|^2.$$

La función v tiene la misma regularidad que la función u, verificándose, además

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - 2N\varepsilon < 0$$

de acuerdo con las hipótesis sobre u. Entonces puesto que v verifica la hipótesis concluimos que

$$\max_{\Gamma_P} v = \max_{\mathcal{D}_T} v.$$

Pero entonces,

$$\max_{\mathcal{D}_T} u \leq \max_{\mathcal{D}_T} v = \max_{\Gamma_P} v \leq \max_{\Gamma_P} u + \varepsilon \max_{\Omega} |x|^2.$$

Como esto es para $\varepsilon > 0$ arbitrario, se tiene

$$\max_{\mathcal{D}_T} u \leq \max_{\Gamma_P} u$$

que con la desigualdad obvia

$$\max_{\Gamma_P} u \leq \max_{\mathcal{D}_T} u$$

prueba el resultado.

■

Observa que el principio del máximo para la ecuación del calor excluye parte de la frontera, justamente la frontera temporal en la dirección del tiempo creciente.

Este **principio de máximo** se llama **débil** porque no excluye que el máximo se tome en un punto interior.

Se tiene un enunciado más fuerte debido a L. Nirenberg, el cual se verá sin demostración. Lo cual te recomiendo que leas el libro M.H. Protter, H.F. Weinberger, (1984) "*Maximum Principles in Differential Equations*" Ed. Springer Verlag

Principio del máximo fuerte

Sea u verificando las hipótesis del teorema 2.3.2.1 en $\mathcal{D}_T$. Si existe $(x_1, t_1) \in \mathcal{D}_T$ tal que

$$u(x_1, t_1) = M = \max_{\mathcal{D}_T} u,$$

entonces $u \equiv M$.

A continuación, se aplica el **principio del máximo débil** a la obtención de algunos resultados de unicidad.

Sea como antes $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con la frontera regular $\partial\Omega$. Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.3.2.2}$$

Por aplicación directa del principio del máximo se tiene el siguiente corolario, el cual establece la unicidad para el problema de la ecuación (2.3.2.2).

Corolario

Sea $u \in C(\mathcal{D}_T)$, tal que $u_t, u_{x_i x_j} \in C\big(\mathcal{D}_T \cup (\Omega \times \{T\})\big), i, j = 1,2, \ldots, N$ solución del problema de la ecuación (2.3.2.2). Entonces $u \equiv 0$.

Menos obvia es la segunda consecuencia del principio del máximo débil.

Como se ha visto en subtema anterior el problema de Cauchy $(2.3.1.21)$, en general, puede tener más de una solución. No obstante, si se restringe a ciertas clases de funciones, se va a poder demostrar la unicidad. Este subtema se limita al ejemplo, muy interesante, de funciones acotadas.

Se demostrará que, dentro de la clase de funciones acotadas, el problema $(2.3.1.21)$ tiene una única solución.

La prueba de este resultado se basa en el principio del máximo; la dificultad está en que en el problema de Cauchy se tiene todo $\mathbb{R}^N$ y no un dominio acotado. En otras palabras, sobre la **"frontera lateral"** de la frontera parabólica, no se tienen condiciones. Esta dificultad se resolverá con el conocimiento de ciertas soluciones explícitas de la ecuación del calor, con las cuales se hará un proceso de comparación.

Es claro que cualquier función de la forma

$$w_\alpha(x,t) = \alpha\left(2t + \frac{|x|^2}{N}\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

es una solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^N \times [0,\infty)$. Estas son las soluciones de la ecuación del calor que se usarán para comparar.

Es posible pasar a establecer el resultado de unicidad con precisión.

2.3.2.3 Teorema

Sean u_1, u_2 soluciones acotadas del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \qquad f \text{ continua y acotada en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.3.2.3}$$

Entonces $u_1 \equiv u_2$.

Demostración.

si $|u_1(x,t)| \leq M_1$ y $|u_2(x,t)| \leq M_2$, llamamos $M = \max\{M_1, M_2\}$. La función $v = u_1 - u_2$ verifica el problema

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

La idea es aplicar a v el principio del máximo como en el corolario 2.3.2.3. Directamente esto no es posible dado que el dominio es todo $\mathbb{R}^N$; para resolver esta dificultad se considera para cada $R > 0$ la bola $|x| < R$ y la función

$$w_R(x,t) = \frac{2NM}{R^2}\left(2t + \frac{|x|^2}{N}\right), R \in \mathbb{R},$$

que como se ha visto satisface la ecuación de calor, en particular en $|x| < R, t > 0$.

Además

$$w_R(x,0) \geq |v(x,0)| = 0, \qquad w_R(y,t) \geq 2M \geq |v(y,t)|, \qquad si\ |y| = R, t > 0$$

Aplicando el principio del máximo en el cilindro $|y| \leq R$, $t \in [0,T]$ a $v - w_R$ y a $w_R - v$, resulta que

$$-w_R(x,t) \leq v(x,t) \leq w_R(x,t) \tag{2.3.2.4}$$

para cada (x,t) tal que $|x| \leq R$, $0 \leq t \leq T$.

Dejando fijo (x,t), la desigualdad $(2.3.2.4)$ es válida si $R > |x|$. Entonces tomando límite para $R \to \infty$ se tiene

$$v(x,t) = 0$$

Como (x,t) es arbitrario se concluye que

$$v \equiv 0$$

cómo se quería.

■

Como consecuencia inmediata podemos formular el importante resultado que sigue.

Corolario.

La única solución acotada del problema $(2.3.1.21)$ con dato acotado, es dada por la fórmula $(2.3.1.23)$.

2.3.3. El problema de Cauchy no homogéneo

Nos vamos a ocupar del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(x,t), & x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \qquad (2.3.3.1)$$

donde la regularidad de los datos F y f se supone, por el momento, suficiente para que sean ciertos los cálculos que vamos a realizar. Más tarde se estudiarán cuáles son las condiciones de regularidad suficientes.

Se verá que un papel importante lo jugará la solución fundamental. Ahora vamos a escribir la solución fundamental con la singularidad desplazada, es decir, consideramos

$v(x,t,y,s) \equiv K_{t-s}(x-y)$, es decir

$$v(x,t,y,s)=\frac{1}{\left(4\pi(t-s)\right)^{N/2}}\exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right),\quad t>s. \qquad (2.3.3.2\ )$$

Por cálculo directo, o bien, por los argumentos en el tema 2.3.1 se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.3.3.1 Sea v definida por (2.3.3.2), entonces,

i)$v_t-\Delta_y v=0$ si $t>s$.

ii)$v_s+\Delta_y v=0$ si $t>s$.

El apartado i) se puede traducir diciendo que fuera de la singularidad la solución fundamental verifica la ecuación del calor respecto a t y a y, mientras que el apartado ii) establece que la función v vírica la ecuación del calor "retrógrada" como función de s, y, lo cual es claro por tener s el signo contrario a t. Obsérvese, por último, que el laplaciano se puede tomar también con respecto a x y se sigue cumpliendo el lema.

Un cambio de coordenadas y lo visto en el tema 2.3.1 permiten escribir la siguiente propiedad importante de la función v.

Lema 2.3.3.2 Sea v definida por (2.3.3.2), entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(x,t,y,s)dy=1 \text{ para cada } x\in\mathbb{R}^N\ y\ t>s.$$

Lema 2.3.3. Sean v definida por (2.3.3.2) y $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un dominio, entonces

$$V(x,t-s)=\int_{\Omega} v(x,t,y,s)dy$$

Verifica

$$\lim_{t-s\to 0} V(x,t-s)=\begin{cases}1, & x\in\Omega\\ 0, & x\notin\Omega\end{cases}.$$

(Basta aplicar el teorema (2.3.1.1) a la función característica de Ω).

Supongamos ahora que u es una solución regular del problema (2.3.3.1) y sea $B_R\subset\mathbb{R}^N$ la bola de centro el origen y radio R.

Se observa que llamando (y,s) las variables de espacio y tiempo respectivamente, se tiene

$$(uv)_s = u_s v + v_s u = v\Delta u - u\Delta v \tag{2.3.3.3}$$

De acuerdo con el apartado el apartado ii) del lema 2.3.3.1.

Teniendo en cuenta (2.3.3.3), integrando en $B_R \times\ (0,t)$ y utilizando la fórmula de Green en la integral de espacio, obtenemos la siguiente identidad

$$\int_0^t \int_{B_R} vFdyds = \int_0^t \int_{B_R} \big(u(v_s + \Delta v) - v(\Delta u - u_s)\big)dyds =$$

$$\lim_{s\to t^-} \int_{B_R} uv\ dy - \lim_{s\to 0^+} \int_{B_R} uv\ dy + \int_0^t \int_{\partial B_R} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma(y)ds \tag{2.3.3.4}$$

donde n es la normal exterior a B_R y $d\sigma(y)$ el elemento de superficies sobre ∂B_R.

Si se supone, por ejemplo, que u es acotada, como v y $\frac{\partial u}{\partial n}$ decaen exponencialmente cuando $R \to \infty$, pasando al límite en (2.3.3.4) se obtiene

$$\int_0^t \int_{B_R} vFdyds = \lim_{s\to t^-} \int_{B_R} uv\ dy - \lim_{s\to 0^+} \int_{B_R} uv\ dy \tag{2.3.3.5}$$

Se observa que según el teorema 2.3.1.7

$$\lim_{s\to t^-} \int_{B_R} u(y,s)v(x,t,y,s)dy = u(x,t), \tag{2.3.3.6}$$

Y también, por el mismo resultado,

$$\lim_{s\to 0^+} \int_{B_R} u(y,s)v(x,t,y,s)dy = \int_{B_R} u(y,0)v(x,t,y,0)dy =$$

$$\int_{B_R} f(y)v(x,t,y,0)dy, \tag{2.3.3.7}$$

Sustituimos (2.3.3.6) y (2.3.3.7) en (2.3.3.5), luego :

Si u es solución regular del problema (2.3.3.1), entonces

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{B_R} v(x,t,y,0)F(y,s)dyds + \int_{B_R} f(y)v(x,t,y,0)dy \tag{2.3.3.8}$$

Sustituyendo el valor de v se tiene

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{B_R} \frac{1}{\left(4\pi(t-s)\right)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) F(y,s)dyd + \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{B_R} f(y) \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy \tag{2.3.3.9}$$

Una vez hecha la conjetura de cómo escribir la solución sólo falta un resultado de regularidad en función de la regularidad de F y f que nos permita concluir que la función u definida por (2.3.3.9) es solución clásica del problema (2.3.3.1).

El resultado que se presenta a continuación da condiciones suficientes para la existencia de solución clásica del problema no homogéneo (2.3.3.1). Al igual que ocurre en la ecuación de Laplace la sola continuidad del segundo miembro de la ecuación no es suficiente para que la solución tenga derivadas segundas.

Recordamos que la solución fundamental para la ecuación del calor es

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), t > 0 \tag{2.3.3.10}$$

El siguiente teorema requiere de algunos resultados sobre diferenciación de funciones definidas por integrales a los que no haremos mención explícita. Puedes deducir estos resultados a partir de los que se encuentran en el libro de Análisis Matemático de Tom Apostol.

Teorema 2.3.3.5 Sea $f(x)$ una función continua y acotada en $\mathbb{R}^N$ y sean $F(x,t)$ y $\frac{\partial F(x,t)}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, N$ funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}^N \times (0,T)$, para algún $T > 0$.

Entonces la función $u(x,t)$ definida para $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T)$ por

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y)f(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} K_{(t-s)}(x-y)F(y,s)dyds, \qquad (2.3.3.11)$$

Verifica

(1) $u \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N \times [0,T)\right)$

(2) $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N \times (0,T)\right), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N \times (0,T)\right), i,j = 1,..,N$

(3) u es la única solución acotada del problema (2.3.3.1)

Demostración.

Llamamos

$$u_1(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y)f(y)dy$$

y

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} K_{(t-s)}F(y,s)dyds \qquad (2.3.3.12)$$

Por el teorema 2.3.1.7 la función u_1 verifica 1) y 2). En particular, de 1) resulta que $u_1(x,0) = f(x)$, y por tanto u_1 es solución del problema homogéneo,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \qquad t > 0 \\ \quad u(x,0) = f(x), \ \ x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Basta entonces demostrar que u_2 verifica 1) y 2) y es solución del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \qquad t > 0 \\ \quad u(x,0) = 0, \ \ x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables espaciales $\frac{x-y}{2\sqrt{t-s}} = z$ en la integral (2.3.3.12) resulta

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} K_{(t-s)}(x-y)F(y,s) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} K_1(z)F(x+2z\sqrt{t-s},s)dzds. \tag{6.3.3.13}$$

El integrando, $h(x,z,t,s) = K_1(z)F(x + 2z\sqrt{t-s},s)$, es continuo en $x,z \in \mathbb{R}^N$ y $0 < s < t$ verificando además que $\nabla_x h(x,z,t,s)$ es continuo y que

$$|h(x,z,t,s)| = \left|k_1(z)F\left(x+2z\sqrt{t-s},s\right)\right| \leq \frac{1}{\pi^{N/2}}e^{-|x|^2} \sup_{(y,\tau)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]}|F(y,\tau)|, \tag{6.3.3.14}$$

Siendo también

$$|\nabla_x h(x,z,t,s)| \leq \frac{1}{2\pi^{N/2}}|z|e^{-|z|^2} \sup_{(y,\tau)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]}|F(y,\tau)| \qquad 6.3.3.15$$

donde se ha sustituido el valor de $K_1(z)$. Es decir, tanto h como su gradiente respecto a x están mayorados por funciones integrables. Se puede comprobar a partir de estas propiedades que la función definida por la integral.

$$g(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}^N} K_1(z)F(x,2z\sqrt{t-s},s)dz \tag{2.3.3.16}$$

Resulta que es continua y acotada en $\mathbb{R}^N \times [0,T)$, más concretamente.

$$|g(x,t,s)| \leq M = \sup_{(y,\tau)\in\mathbb{R}^N\times[0,T)}|F(y,\tau)|.$$

Además, aplicar el teorema 2.3.1.7 para $s \to t$, resulta $g(x,t,t) = F(x,t)$.

Por consiguiente, se tiene,

$$u_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times [0,T))$$

$$u_2(x,0) = 0$$

La función u_2 es acotada, siendo

$$\sup_{(y,\tau) \in \mathbb{R}^N \times [0,T)} |u_2(x,t)| \leq MT$$

Se tiene que la función u_2 tiene derivadas primeras continuas verificándose

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_0^t -\frac{1}{\sqrt{t-s}} ds \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(x + 2z\sqrt{t-s}, s\right) dzds.$$

Integrando por partes resulta

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x,t) = \frac{1}{2\pi^{N/2}} \int_0^t -\frac{1}{\sqrt{t-s}} ds \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} z_i F\left(x + 2z\sqrt{t-s}, s\right) dzds. \qquad (2.3.3.17)$$

Por (2.3.3.15) se puede demostrar que es posible derivar la expresión (2.3.3.17) obteniéndose que u_2 tiene derivadas segundas respecto a x continuas en $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ y en particular se verifica

$$\Delta u_2(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_0^t -\frac{1}{\sqrt{t-s}} ds \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} z_i F\left(x + 2z\sqrt{t-s}, s\right) dzds \qquad (2.3.3.18)$$

Por otro lado, para calcular la derivada con respecto al tiempo t escribimos

$$\frac{u_2(x,t+k) - u_2(x,t)}{k} =$$

$$\frac{1}{k} \int_t^{t+k} g(x,t+k,s) ds + \int_0^t \frac{g(x,t+k,s) - g(x,t,s)}{k} ds \equiv I_1(k) + I_2(k)$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$\lim_{k \to 0} I_1(k) = g(x,t,t) = F(x,t). \qquad (2.3.3.19)$$

la función $g(x,t,s)$ tiene derivada respecto a t ya que F tiene derivadas parciales respecto a x, además

$$g_t(x,t,s) = \frac{1}{\pi^{N/2}\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(x + 2z\sqrt{t-s}, s\right) dz$$

y por lo tanto, por (2.3.3.15) se concluye que

$$\lim_{k\to 0} I_2(k) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(x + 2z\sqrt{t-s}, s\right) dz ds. \qquad (2.3.3.20)$$

De las igualdades (2.3.3.18), (.2.3.3.19) y (2.3.3.20), se concluye que u_2 verifica la ecuación del calor no homogénea, es decir,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + F,$$

Como se quería demostrar.

2.3.3. Comparación entre las soluciones del problema de Cauchy para la ecuación de onda y la ecuación de calor

Las ecuaciones de ondas y del calor son sin duda dos de los modelos más simples y fundamentales en la teoría de EDP. El análisis anterior de los mismos indica que se trata de modelos con propiedades cualitativas muy distintas o, incluso, contrapuestas. Se mencionan aquí algunas de ellas:

• **Reversibilidad temporal**

La ecuación de ondas es reversible en tiempo. Basta para ello hacer el cambio de variable temporal $t' = -t$. Se comprueba que el operador de d'Alembert se mantiene invariante por incluir términos en los que sólo aparece un número par de derivadas. Esto no es así en el caso de la ecuación del calor. Por otra parte, la fórmula de d'Alembert para la solución de la ecuación de ondas es también perfectamente reversible en tiempo. En particular, predice que las soluciones son igualmente regulares en el pasado que en el futuro. Esto es exactamente lo contrario de lo que ocurre con la ecuación del calor en la que, a causa de un efecto regularizante sumamente fuerte, basta que el dato inicial sea integrable para que en todos los tiempos $t > 0$ la solución pertenezca a $BC^\infty(\mathbb{R})$.

• Conservación de energía

Las diferencias antes mencionadas se observan también el comportamiento temporal de la energía de las soluciones.

En efecto mientras que en la ecuación de ondas de energía

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} [u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)]dx$$

se conserva, en la ecuación del calor la energía correspondiente

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 dx$$

se disipa, tal y como se ve, según la ley

$$\frac{de(t)}{dt} = -\int_{\mathbb{R}} |u_x(x,t)|^2 dx.$$

• Velocidad infinita de propagación

En la ecuación de ondas la velocidad de propagación es finita. Esto queda claramente de manifiesto en la fórmula de d'Alembert para la solución:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds$$

De esta fórmula se deduce que el valor de la solución en el punto (x,t) depende exclusivamente del valor de los datos iniciales en el intervalo $[x-t, x+t]$ denominado dominio de dependencia.

Del mismo, el valor de los datos iniciales en el punto x_0 en el instante $t = 0$ se perciben exclusivamente en el cono: $|x - x_0| \leq t$, denominado **región de influencia**.

Estos dos hechos confirman que la velocidad de propagación en la ecuación de ondas considerada es de hecho la unidad.

Sin embargo, en la ecuación del calor, el hecho de que la solución fundamental o núcleo de Gauss G sea estrictamente positivo en todos los puntos hace que la velocidad de propagación sea infinita de modo que una perturbación del dato inicial en cualquier punto es instantáneamente percibida en todos los puntos de la recta real.

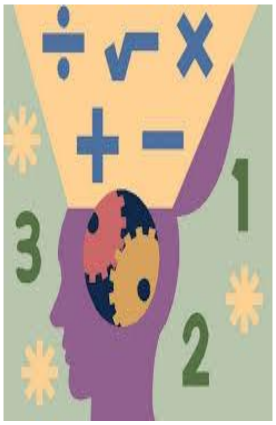
Cierre de la unidad

Durante esta unidad revisaste la clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) de segundo orden, su forma canónica, coeficientes constantes y en diferentes características, es necesario que repases dichos contenidos y sus aplicaciones.

Revisaste como utilizando las EDP, podemos encontrar la solución al problema de Cauchy, tomando como bases las Ecuación de ondas en dimensión uno y dimensión espacial, tomando como bases la Fórmula Dé Alembert, Método de descenso de Hadamard, DE las medias esféricas.

Es de tu interés que revises como el problema de Cauchy, y sus diversas aplicaciones e, diversos contextos de la Física, así como revisar ejercicios o problemas que tenga relación con este tipo de contenidos, los cuales te ayudarán para complementar los conocimientos obtenidos durante la unidad tres.

Para saber más

	Para que puedas auxiliarte con algunos contenidos, referentes a la unidad y te sirva de apoyo a las actividades sugeridas, te recomiendo que revises este documento, que sería un apoyo extra a los contenidos.	Ramírez, A. (2012). Introducción a EDP: Ecuaciones elípticas. Dpto. Matemáticas, Universidad de Guanajuato. https://www.cimat.mx/~joaquin/mn11/clase25.pdf
	El siguiente documento es interesante, dado que muestra ciertas aplicaciones de la EDP, en diversos contextos, te permitirá relacionar las EDP con otras asignaturas, y tener un panorama amplio de los alcances de la EDP.	Zamora. A. (2012). Ecuaciones diferenciales parciales. Departamento de Matemáticas Aplicas y Sistemas. Universidad Autónoma Metropolitana. http://www.cua.uam.mx/pdfs/conoce/libroselec/Notas_Ecuaciones_Diferenciales_Parciales.pdf

Fuentes de consulta

Básica

- Kurmyshev, E.V. (2003). *Fundamentos de métodos matemáticos para física e ingeniería*. México: Editorial Limusa.

- Mauch, S. (2004). *Introduction to Methods of Applied Mathematics or Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. https://dl.icdst.org/pdfs/files3/f32860fc08c3b37c86871c7dc499151a.pdf

- Myint-U, T. (1973). *Partial differential equations of mathematical physics*.
- Editado por American Elsevier Publishing.

- Peral Alonso, I. (2004). *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales.* Universidad Autónoma Metropolitana.

- Zuazua, E. *Ecuaciones en derivadas parciales.* Universidad Autónoma Metropolitana.