# Matemáticas

## Topología General

### 6º Semestre

### Unidad 1. Espacios topológicos

**Clave**

**05143635**

**Universidad Abierta y a Distancia de México**

## Índice

## Presentación de la unidad

En la unidad 1 se verá qué estudia la topología, algunas aplicaciones que se le ha dado, y se abordarán los espacios topológicos, que son los objetos de estudio en topología.

Para continuar, estudiarás los conceptos básicos de la topología, como vecindades, conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, frontera de un conjunto, cerradura e interior.

## Competencia Específica

Utilizar la definición de espacio topológico para introducir una o varias topologías en un conjunto, mediante definiciones diferentes de conjuntos abiertos.

## Logros

- Identificar conceptos topológicos utilizados.
- Conocer las herramientas básicas de la topología.
- Representar diferentes topologías, para identificar las propiedades de Frechet y Hausdorff.
- Describir las propiedades de los conjuntos cerrados para construir la topología con ellos.
- Utilizar el concepto de base topológica para generar nuevas topologías.
- Desarrollar una topología especifica en el plano adaptando demostraciones.

## ¿Qué es la topología? ¿Qué estudia la topología? ¿Para qué sirve la topología?

¿Qué es la topología?

La topología es una de las áreas más activas de las matemáticas. Se le considera una de las tres áreas principales de las matemáticas puras (junto con el análisis y el álgebra). Recientemente, la topología ha adquirido importancia también dentro de las matemáticas aplicadas. Hay muchos matemáticos y científicos que están empleando conceptos topológicos para modelar y entender fenómenos y estructuras del mundo real. En esta primera sección de la unidad podrás darte cuenta de qué estudia la topología y para qué se está utilizando.

*¿Qué estudia la topología?*

La topología es una rama de las matemáticas relativamente nueva. Toda su formalización y estudio sistemático se ha llevado a cabo en el siglo pasado. Los primeros teoremas importantes de topología fueron enunciados por Henri Poincaré en la primera década del siglo XX. Aunque el surgimiento de la topología suele establecerse en el siglo XVIII con el trabajo de Leonhard Euler sobre un problema famoso llamado “el problema de los puentes de Königsberg”, que pertenece a lo que actualmente se conoce como teoría de gráficas, una sub-rama de la topología. Se te explicará rápidamente en qué consiste tal problema.

En el siglo XVIII el rio Pregolya fluía a través de la ciudad de Königsberg, en Prusia (actualmente Kaliningrado, en Rusia), dividiéndola en cuatro regiones separadas. Había siete puentes que cruzaban el rio, conectando las regiones como se muestra en la Ilustración 1.

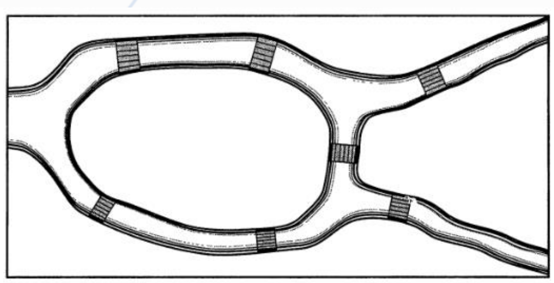


Ilustración 1. Puentes de Königsberg, tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

Un pasatiempo de los habitantes de la ciudad era dar paseos atravesando los puentes, y se preguntaban, ¿será posible dar un paseo atravesando cada puente una sola vez? Curiosamente nadie encontraba una forma de hacerlo.

Euler se interesó en el problema y lo resolvió con un método nuevo. Modeló la ciudad y los puentes con lo que ahora se conoce como una gráfica (o grafo). Dibujó un punto por cada región y una línea por cada puente; si un puente unía dos regiones, la línea correspondiente unía los puntos correspondientes. Se veía más o menos como en la Ilustración 2:

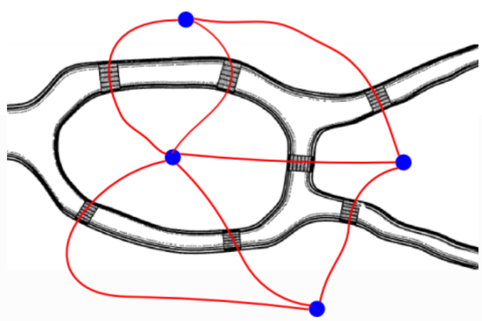
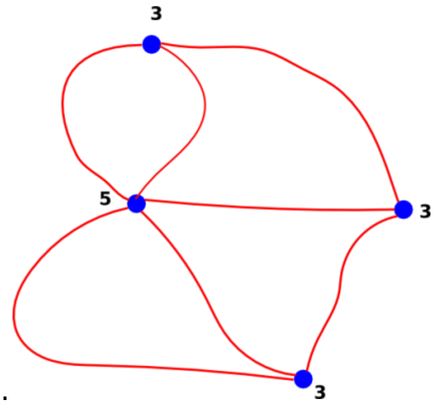


Ilustración 2. Gráfica asociada a los puentes y regiones de Königsberg, tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

Usando este modelo, Euler probó que no podía darse un paseo cruzando cada puente una sola vez. El razonamiento que siguió era parecido al que sigue:

Un paseo como el buscado corresponde a pasar el lápiz por encima de la gráfica de modo que se recorra cada línea una sola vez. Si se pudiera hacer esto, a los puntos intermedios (no en el que se inicia ni en el que se termina) deberían de llegar un número par de líneas. Esto es porque si se llega a un punto por una línea, se debe abandonarlo por otra (porque no se debe pasar más de una vez por ninguna línea). Entonces, en la gráfica se debería observar que a cada punto llegan un número par de líneas (con excepción de, a lo más, dos puntos: el inicial y el final). Pero en la **Error! Reference source not found.** se ve que a cada punto llegan un número impar de líneas. Entonces no puede haber un paseo que recorra todos los puentes y que pase una sola vez por cada uno




.

**Ilustración 3. Recorrido gráfico**

Euler hizo notar que **a pesar de que el problema parece geométrico, ningún cálculo o medición ayudaría a resolverlo.** Este problema, y su solución, no correspondía a la geometría tradicional, sino que era el primero de una nueva geometría en donde lo que importa es la configuración de los objetos, sus posiciones más que sus magnitudes. Más de un siglo después, Poincaré utilizo la expresión *Analysis situs* (análisis de la posición) para designar a esta nueva geometría.

La topología está relacionada con la geometría. Ambas ramas de las matemáticas se interesan por estudiar las formas de los objetos. Por ejemplo, una lata de refresco. La geometría caracteriza esta lata por su altura, el radio de su base, su volumen y el área de su superficie. La topología, en cambio, ignora esas características de la lata (a fin de cuentas ya están estudiadas por la geometría) y se ocupa de la característica de la lata que hace imposible sacarle el refresco **sin agujerarla**.

Podría pensarse a la topología como **la geometría de los objetos elásticos.** En la geometría tradicional, objetos como círculos, triángulos, planos y poliedros, se presumen rígidos e indeformables, con distancias entre sus puntos y ángulos entre sus aristas o caras bien definidos. Pero **para la topología los ángulos y distancias son irrelevantes**. Para efectos de esta asignatura se tratará a los objetos como hechos de un material elástico y, por lo tanto, deformables. Se permitirá doblarlos, estirar, encoger, torcer y aplicar cualquier deformación que no rompa los objetos. En la Ilustración **4** se aprecian cuatro objetos que, desde el punto de vista geométrico, son muy diferentes, pero para la topología son equivalentes. Si estuvieran hechos de hule, se podría deformar cada uno para convertirlo en cualquier otro.

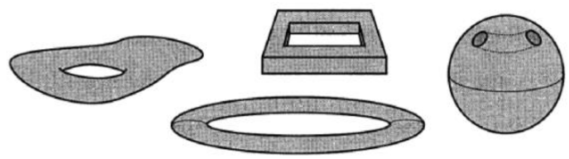


Ilustración 4. Para la topología estos 4 objetos son equivalentes, tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

Otros objetos que son iguales para la topología se muestran en la Ilustración 5. Las del primer renglón son iguales entre ellas. Las del segundo renglón también son iguales para la topología. ¿Serán iguales las del primer renglón a las del segundo?

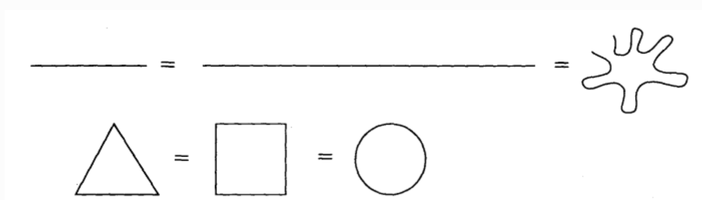


Ilustración 5. Las figuras de cada renglón son iguales topológicamente, tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

Viendo que objetos tan distintos son iguales para la topología, tal vez te preguntes si se podrán distinguir algo. La respuesta es que sí. Para la topología, un segmento de recta y un círculo no son iguales. Lo más importante es que estos dos objetos no los puede distinguir la geometría; es decir, la diferencia entre el círculo y el segmento no se puede “ver” a través de longitudes y ángulos. La diferencia entre estos objetos es que el círculo divide al plano en dos “pedazos” (dentro y fuera del círculo) y el segmento no. Esta diferencia la detecta la topología.

¿Cómo le hace la topología para ver estas diferencias? ¿Qué objetos considera iguales y cuáles distintos?

En matemáticas hay muchas formas de considerar iguales o equivalentes dos objetos. Por ejemplo, en aritmética se consideran equivalentes dos fracciones $a/_b$ y $c/_d$ si $a * d = b * c$. En geometría, dos triángulos son congruentes si tienen sus tres ángulos iguales. Otra forma de ver que dos triángulos son congruentes es encontrar una isometría del plano (una isometría es una función que no cambia las distancias entre los puntos, como una rotación, una reflexión o una traslación) que encime un triángulo en el otro. A la topología no le interesan las distancias ni los ángulos, y permite cualquier deformación del objeto con la condición de no romperlo. La forma de modelar esto es decir que dos objetos son idénticos topológicamente si hay una transformación continua de un objeto en el otro que puede revertirse. En otras palabras, en topología se dice que el objeto A es equivalente al objeto B si hay una función continua de A a B, y tal función tiene una función inversa que también es continua. Estas funciones reciben el nombre de homeomorfismos, y en la Ilustración 5 se ven ejemplos de tales transformaciones. Otro ejemplo aparece en la Ilustración **8**.

Una transformación que no es continua es cortar una figura en dos. El inverso de cortar es pegar. Ni cortar ni pegar son homeomorfismos. En la Ilustración 6 se muestran objetos que no son equivalentes porque se obtienen uno del otro pegando o cortando.

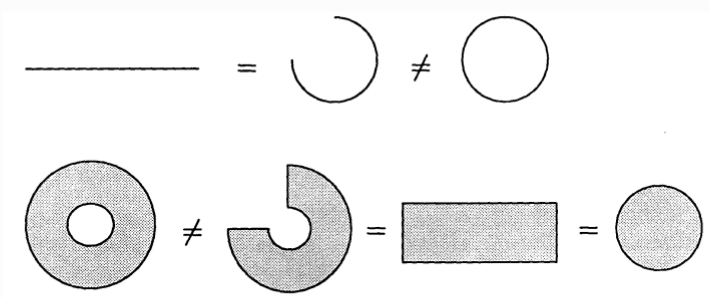



Ilustración 6. Cortar no es homeomorfismo, pegar tampoco tomada de Kinsey, C. (1993)Topology of surfaces, New York: Springer Verlag.

Una forma más eficiente de distinguir objetos topológicos es identificar sus propiedades topológicas. En geometría, para distinguir dos triángulos es suficiente con encontrar un ángulo en uno de ellos que sea distinto de los ángulos del otro. La medida de los ángulos es una propiedad geométrica. Una propiedad topológica es una característica que comparten **todos** los objetos que sean topológicamente equivalentes. Esto es, si A y B son topológicamente equivalentes, y A tiene la propiedad **p**, entonces B también la debe tener. Y si el objeto C no tiene la propiedad **p,** entonces no es equivalente a A ni a B. ¿Recuerdas cuál es la diferencia topológica que se encontró entre un segmento de recta y un círculo? Dividir al plano en dos partes, una compacta y otra no, es una propiedad topológica.

Otra propiedad topológica es la llamada conexidad, que, hablando informalmente, es la propiedad de un objeto de ser de “un solo pedazo”. Los objetos de la Ilustración 7 no pueden ser equivalentes porque uno es de un solo pedazo y el otro no.

Ilustración 7. Dos objetos distintos topológicamente, uno es conexo y el otro es disconexo, tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

Un objetivo importante del curso es encontrar propiedades topológicas para distinguir a los objetos topológicos. En la unidad 2 se definirá formalmente lo que es una propiedad topológica, y en la unidad 3 estudiarás una variante de la conexidad.

¿Para qué sirve la topología?

Te estarás preguntando si la topología es útil en el mundo real. Piensa en esto: a veces hay situaciones en las que las propiedades que son relevantes son las que se preservan bajo deformaciones de un objeto, por lo tanto, no lo podemos tratar como objeto rígido. Tal vez la topología no pueda distinguir entre una dona y una taza de café (Ilustración **8**), pero lo que sí hace la topología es identificar y usar las propiedades que tienen en común estos dos objetos.

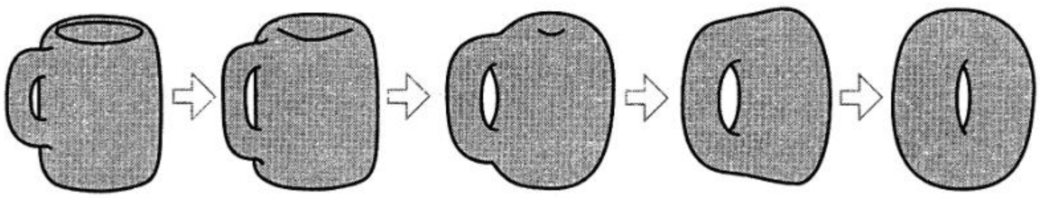


Ilustración 8. La topología no distingue entre una dona y una taza de café, , tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

Ahora verás rápidamente algunos conceptos de la topología y el rol que juegan en algunas aplicaciones. Las aplicaciones de las que se hablará a continuación son para mostrar la utilidad de la topología y no las verás a detalle.

**Espacios topológicos y espacios de fenotipos**. Los objetos que se estudian en topología se llaman espacios topológicos. Son conjuntos de puntos en donde una noción de proximidad se establece a través de una colección de conjuntos a los que se les llama conjuntos abiertos. La línea, el plano, el círculo, la esfera, el toro y una banda de Möbius, son ejemplos de espacios topológicos (ver Ilustración 9).

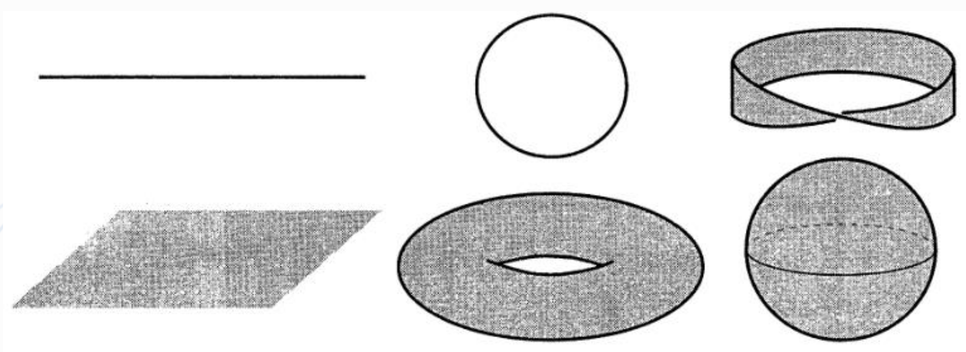


Ilustración 9. Ejemplos de espacios topológicos, , tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

Los conceptos de genotipo y fenotipo son importantes en biología evolutiva. Cada organismo vivo es la realización física (fenotipo) de información genética heredable (genotipo). Cambios evolutivos en un fenotipo ocurren por las llamadas mutaciones, que son cambios en los correspondientes genotipos. Es interesante tener una noción de qué tan cercano está un fenotipo de otro para saber qué tan probable es que una mutación genética transforme un fenotipo en el otro. Los biólogos moleculares han establecido una noción de proximidad evolutiva construyendo un espacio topológico a partir de un conjunto de fenotipos.

**Variedades y cosmología**. Una n-variedad es un espacio topológico que se parece mucho (localmente) a $\mathbb{R}^n$. Las líneas, curvas o rectas, son ejemplos de 1-variedades; cerca de un punto, un círculo parece ser recto. Las 2-variedades son superficies. Un ejemplo de 2-variedad es la superficie de la Tierra; localmente parece un plano, es por eso que nos parece que la Tierra es plana; pero en realidad es una esfera. El plano y la esfera son ejemplos de 2-variedades.

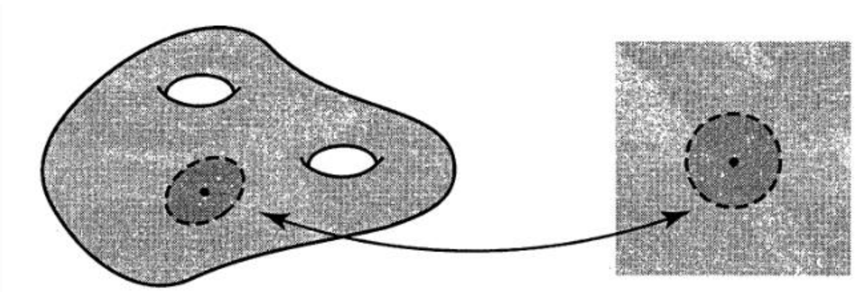


Ilustración 10. Localmente una superficie y un plano parecen ser iguales, tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

De manera similar a lo que pasa con la superficie de nuestro planeta, parece que el espacio en el que vivimos, el universo, es $\mathbb{R}^3$, el espacio euclidiano de dimensión 3. Pero eso es porque sólo se le puede ver localmente. Los cosmólogos intentan determinar la verdadera forma del espacio estudiando sus propiedades globales. La topología les ha construido un muestrario de todas las posibles formas que podría tener un espacio tridimensional.

**Encajes, nudos y DNA.** Un encaje es una función que coloca una copia de un espacio topológico dentro de otro. Un ejemplo es la función que coloca la recta real $\mathbb{R}$ como el eje X en $\mathbb{R}^2$. En la Ilustración 11 se muestran dos encajes de un círculo en $\mathbb{R}^3$. Estos dos encajes son distintos: el círculo de la izquierda está anudado, y el de la derecha no. El estudio de los encajes de un círculo en el espacio tridimensional se llama **teoría de nudos**. Determinar los distintos tipos de nudos y cómo se relacionan entre ellos es un aspecto importante de esta teoría.

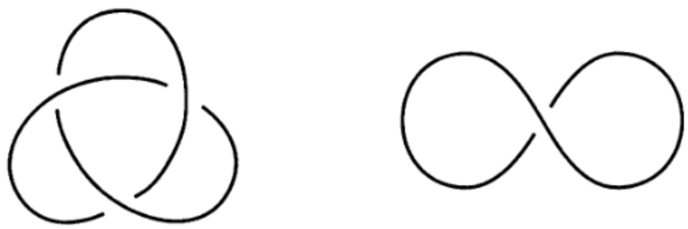


Ilustración 11. Dos encajes de un círculo en $\mathbb{R}^3$, tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

En la teoría de nudos hay una operación que se le puede hacer a los nudos y que es llamada cambio de cruce. En la Ilustración 12 se muestra esta operación, que consiste en cambiar un arco que pasa por debajo de otro para que pase encima. La teoría de nudos investiga el efecto que esta operación tiene en los nudos.

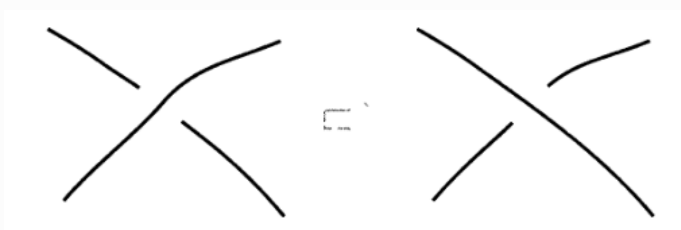


Ilustración 12. Cambio de cruce, tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

Se ha observado que la misma operación ocurre a nivel molecular en el núcleo de las células. El ácido desoxirribonucleico (ADN) es una molécula muy larga hecha de millones de átomos que está empaquetado dentro del núcleo celular. Puedes imaginarlo como un hilo de pescar anudado de 200 km de longitud, metido dentro de una pelota de fútbol. Como parte esencial de los procesos que permiten la vida, la maquinaria biológica de la célula es capaz de manipular la molécula de ADN. La habilidad que tiene la célula para desanudar eficientemente el ADN es crucial para su supervivencia. Dentro de la célula hay moléculas llamadas enzimas, que son herramientas biológicas. Algunas de ellas hacen cambios de cruce en el ADN para desanudarlo. Una enzima corta una hebra de ADN en un punto donde se cruza consigo misma, y después la pega de modo que el cruce cambia como en la Ilustración 12. Recientemente se han introducido nuevos agentes en los procesos de quimioterapia; agentes que inhiben a estas enzimas. Al no realizarse los cambios de cruces, se previene la reproducción de ADN canceroso.

## Espacios Topológicos

Debido a que la topología busca abstraer conceptos y propiedades relacionadas con la forma de los objetos, entonces las definiciones desde las que partiremos intentan ser lo más simple posibles, de modo que podamos aplicarlas a un conjunto (u objeto) sin importar su forma.

Introducimos primero la definición de topología sobre un conjunto.

DEFINICION: Sea X un conjunto y sea T una familia de subconjuntos de X, diremos que T es una topología de X si cumple las siguientes tres condiciones:

a) El conjunto vacío y X son miembros de la familia T.
b) La intersección de dos conjuntos miembros de la familia T es un miembro de la familia T.
c) La unión arbitraria de conjuntos que pertenecen a T es un miembro de la familia T.

En este caso llamaremos a X un espacio topológico.

Una forma de denotar a los subconjuntos miembros de la familia T es denotarlos con un nombre, y en este caso los llamaremos conjuntos abiertos, así T es la familia de los conjuntos abiertos de X.

Otro concepto que será de utilidad es el de Vecindad de un punto, sobre todo para trabajar propiedades puntuales, es decir el comportamiento alrededor de un punto fijo.

DEFINICION: Sea w un elemento de un espacio topológico X, diremos que un subconjunto $V_w$ de X es una vecindad de w si existe un conjunto abierto A de X, el cual es un subconjunto de X y además w es un elemento de A.

Pensemos en un espacio Topológico X y tomemos un subconjunto Y de X (puede o no ser abierto), es posible definir una topología en Y de la siguiente manera:
Dado un subconjunto A de Y, este conjunto es abierto, si existe un conjunto abierto A' de X tal que A sea la intersección de Y con A'.

Una primera forma de diferenciar a los espacios topológicos es con la propiedad de Hausdorff, y la propiedad de Frechet, que dicen lo siguiente

DEFINICION: Un espacio topológico X se dice que tiene la propiedad de Frechet, si al tomar cualesquiera dos elementos x e y, podemos encontrar dos conjuntos abiertos de tal manera que uno contiene a x pero no a y, y el otro contiene a y pero no a x.

DEFINICION: Un espacio topológico X se dice que tiene la propiedad de Hausdorff, si al tomar cualesquiera dos elementos x e y, podemos encontrar dos conjuntos abiertos y ajenos (con intersección vacia) de tal manera que uno contiene a x pero no a y, y el otro contiene a y pero no a x.

De cierta manera lo que nos dice esta propiedad es que los puntos de un espacio topológico que la tiene están separados unos de otros.

Una vez que conocemos el concepto básico de topología podemos ver como se aplica en varios ejemplos:

**1.** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. El primer ejemplo de espacio topológico ya lo has estudiado en asignaturas anteriores. Se trata del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ con la topología estándar. Es decir, este espacio topológico consiste en el conjunto $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$, y los conjuntos abiertos vecindades son aquellos conjuntos A tales que cualquier punto x de A esta contenido en una bola abierta $\mathbf{B}^n(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| < r\}$, que es un subconjunto de A.

**2. Espacios métricos**. Recuerda que un espacio métrico es un conjunto $X$ y una función distancia definida en el producto cartesiano de $X$ consigo mismo. Igual que en el caso de $\mathbb{R}^n$, se puede definir los conjuntos abiertos como aquellos conjuntos para los cuales todos sus puntos se encuentran contenidos en una bola abierta $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ contenida en el mismo conjunto. A esta topología se le conoce como la **topología inducida por la métrica**.

**3. Topología trivial.** Sea $X$ un conjunto no vacío. Define $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Observa que $\mathcal{T}$ cumple con la definición de topología:

a) $X$ y $\emptyset$ están en $\mathcal{T}$. Justo son los elementos de $\mathcal{T}$.
b) La unión de elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. Esto es porque la única unión que se puede hacer con elementos de $\mathcal{T}$ es $\emptyset \cup X = X$ y $X$ está en $\mathcal{T}$.
c) La intersección de cualesquiera dos elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. Esto es porque la única intersección que se puede hacer con elementos de $\mathcal{T}$ es $\emptyset \cap X = \emptyset$ y $\emptyset$ está en $\mathcal{T}$.

Entonces $\mathcal{T}$ es una topología para $X$. Sin embargo, si quitas cualquiera de los elementos de $\mathcal{T}$ ya no tendrás una topología. Por esto, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ es la topología con menos elementos que se puede definir en $X$. Esta topología recibe el nombre de **topología trivial** en $X$.

**4. Topología discreta**. Otra forma de definir una topología en un conjunto $X$ es decir que $\mathcal{T}$ es la colección de todos los subconjuntos de $X$. Claramente ésta es una topología porque las uniones e intersecciones de subconjuntos de $X$ son subconjuntos de $X$, y por lo tanto, pertenecen a $\mathcal{T}$. A esta topología se le llama la **topología discreta** y es la topología con más elementos que puedes definir en $X$.

**5. El conjunto con dos elementos**. Este es en realidad cuatro ejemplos en uno. Sea $X$ el conjunto con dos elementos $\{a, b\}$. Puedes encontrar **todas las topologías** para $X$. Una topología es un conjunto de subconjuntos de $X$. Como $X$ sólo tiene dos elementos, es fácil escribir todos sus subconjuntos: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$. Cualquier topología debe incluir al total y al vacío ¿verdad? Entonces, sólo hay cuatro posibilidades: $\{\emptyset, \{a, b\}\}$, $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$,$\{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$ y

$\{\emptyset, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}$, y todas cumplen con la definición de topología (sólo hay que revisar que la unión y la intersección de cualesquiera dos elementos de cada topología estén en la colección). En la Ilustración 13 se puede ver una imagen esquemática de estas cuatro topologías.

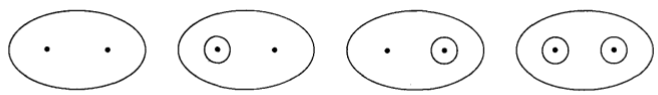


Ilustración 13. Representación de todas las topologías que se le pueden dar a un conjunto con 2 elementos, tomada del libro Adams, C., Franzosa, R.( 2009) *Introduction to topology*, India: Pearson Prentice Hall.

## Conjuntos cerrados y fronteras

Ya conoces los conceptos básicos de los espacios topológicos ahora introduciremos otro concepto que nos será de utilidad para aplicar los resultados que aprenderás más adelante, el concepto de conjunto cerrado:

DEFINICION: Un subconjunto C de un espacio topológico X es llamado cerrado si el conjunto X\C es un conjunto abierto de X, es decir, C es cerrado si y solo si su complemento es abierto.

Veamos ahora como es la interacción de los conjuntos abiertos y cerrados con el resto de los subconjuntos de un espacio topológico.

DEFINICION: Sea B un subconjunto de X, entonces diremos que un conjunto Int(B) es el interior de B si cumple las siguientes propiedades.

a) Int(B) es un conjunto abierto.
b) Int(B) está contenido en B.
c) Cualquier conjunto abierto contenido en B está contenido en Int(B).

DEFINICION: Sea B un subconjunto de X, entonces diremos que un conjunto Cl(B) es la cerradura de B si cumple las siguientes propiedades.

a) Cl(B) es un conjunto cerrado.
b) B está contenido en Cl(B).
c) Cualquier conjunto cerrado que contiene a B contienen también a Cl(B).

Por la propiedad b) de los conjuntos abiertos y cerrados, para cualquier subconjunto B se cumple que su interior Int(B) está contenido en su cerradura Cl(B), entonces a la diferencia de estos conjuntos es decir Cl(B)\Int(B) le llamaremos la frontera de B, estos tres conjuntos son los que determinan topológicamente a un subconjunto de un espacio topológico.

Ejemplos

Los siguientes son ejemplos de diferentes conjuntos cerrados en diferentes espacios topológicos.

a) En el espacio $R^n$ las bolas cerradas y los conjuntos finitos son conjuntos cerrados.
b) En un espacio métrico las bolas cerradas son conjuntos cerrados.
c) En la topología trivial X y el vacío son conjuntos cerrados.
d) En la topología discreta cualquier conjunto es cerrado.

Veamos en $R^2$ la cerradura y el interior de diferentes conjuntos.

a) Un conjunto finito tienen interior vacío, y su cerradura y frontera coinciden con el mismo.
b) Una bola abierta de radio r coincide con su conjunto interior y su cerradura es la bola cerrada del mismo radio y su frontera es la esfera del mismo radio.

c) Una bola cerrada de radio r coincide con su cerradura, su interior es la bola abierta del mismo radio y su frontera es la esfera de igual radio.

## Bases Topológicas

Muchas veces es difícil poder determinar todos los conjuntos abiertos y cerrados de un espacio topológico, entonces es necesario reducir estos conjuntos a una familia más sencilla que nos permita “generar” y/o “describir” al resto de los conjuntos abiertos y cerrados. La siguiente definición nos sirve para determinar las propiedades mínimas que debe tener una familia de conjuntos para poder “describir” a los conjuntos abiertos y de esta manera a toda la topología del conjunto.

DEFINICION: Se dice que una familia ***B*** de conjuntos abiertos de un espacio topológico X es una base abierta de X si cada conjunto abierto de X puede escribirse como la unión de elementos de ***B***.

De manera similar podemos determinar una topología por medio de una familia de subconjuntos de un conjunto X.

DEFINICION: Sea X un conjunto y sea ***B*** una familia de subconjuntos de X. Se dice que una topología ***T*** de X es la topología de X generada por ***B*** si cumple las siguientes propiedades:

a) Cada conjunto miembro de ***B*** es un conjunto miembro de ***T***.
b) Cualquier otra topología que contenga a todos los conjuntos miembros de ***B*** debe contener a todos los conjuntos miembros de ***T***.

Ejemplos

El ejemplo más común de una base abierta de una topología es la base de los espacios métricos; en este caso la base es la familia de todas las bolas abiertas, y es por eso que en el estudio de espacios métricos, en tus cursos anteriores, fue posible realizarlo a través de bolas abiertas.

## Para saber más

Puedes encontrar algunos juegos topológicos en la página web:
Weeks, J. (2024). Software de topología y geometría. http://www.geometrygames.org/

Puedes consultar las notas de topología básica en la página:
Hatchet A. (s.f). Notes on Introductory Point-Set Topology. https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/Top/TopNotes.pdf

Puedes consultar el libro de análisis de Carlos Ivorra, cuyos dos primeros capítulos son sobre topología.
Ivorra, Carlos. (S,f). Análisis matemático. https://www.uv.es/ivorra/Libros/An.pdf

Un artículo sobre robótica topológica
Mosquera Louis (2017). Robótica topológica. TEMat 1. https://temat.es/wp-content/uploads/2017/07/2017-p1.pdf

Morris A. (2010). Topología sin dolor. Traducción de Guillermo Pineda.
http://www.topologywithouttears.net/topbookspanish.pdf

## Cierre de la unidad

En esta unidad has aprendido los conceptos básicos de la topología, y has aprendido a construir topologías específicas que cumplen ciertas propiedades.

## Fuentes de consulta

### Básica


- Adams, C. (2009) *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.
- García-Maynez, A. (1998) *Topología General*. México: Porrúa.
- Kinsey, C. (1993). *Topology of surfaces*. New York: Springer Verlag.
- Munkres, J. R. (2002) *Topología*. Madrid: Pearson Educación.
- Prieto, C. (2003). *Topología Básica*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Rubiano O. (2010) *Topología General: Un Primer curso,* Bogotá, Colombia, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.