Matemáticas

Topología General

6º Semestre

Unidad 2. Continuidad y equivalencias topológicas

Clave

05143635

Universidad Abierta y a Distancia de México

Índice

Presentación de la unidad

Hasta este momento has estudiado varios conceptos relacionados con los espacios topológicos y sus subconjuntos (subespacios). Ahora es necesario estudiar funciones entre tales espacios. Las funciones que naturalmente se asocian con los espacios topológicos son las funciones continuas. El concepto de continuidad es uno de los más importantes en topología.

Recuerda que una topología en un conjunto es una estructura que establece una noción de "cercanía" o "proximidad" en el conjunto. Las funciones continuas entre espacios topológicos son las que preservan la cercanía, es decir, son las que envían puntos que están cerca en un espacio a puntos cercanos en el otro.

Una función continua y biyectiva cuya inversa es también continua se llama homeomorfismo. Tales funciones establecen la principal noción de equivalencia topológica. Hay ciertas propiedades de los espacios topológicos que son preservadas por los homeomorfismos, a estas propiedades se les llama propiedades topológicas y sirven para distinguir espacios topológicos.

Competencia Específica

Establecer si dos espacios topológicos son equivalentes para conocer las propiedades que los distinguen por medio de la utilización del concepto de homeomorfismo.

Logros

- Identificar las propiedades de las funciones continuas para deducir una definición.
- Utilizar el concepto de homeomorfismo para relacionar dos espacios.
- Determinar propiedades topológicas para representarlas en diferentes espacios.
- Adaptar las demostraciones y construcciones anteriores para agrupar diferentes espacios.

Continuidad. Definición topológica de continuidad.

La continuidad es un concepto que ya hemos estudiado en los cursos de Cálculo. Sin embargo en esos cursos se estudió desde el punto de vista métrico, utilizando en la definición el concepto de distancia entre puntos y en espacios euclidianos exclusivamente.

Sin embargo, el concepto de continuidad es un concepto topológico. Esto significa que para definir continuidad no hace falta hablar de distancias, se puede definir utilizando el concepto de conjunto abierto y no se puede definir sin este concepto (o sus equivalentes, como conjunto cerrado). Además, si uno tiene dos conjuntos, A y B, es equivalente decir cuales funciones entre A y B son continuas a definir una topología en A y otra en B. Es por esto que el concepto de continuidad es central en topología.

Definición 1. Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **continua** si para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

En otras palabras; la función f es continua si para cada x_0 y ε podemos encontrar una δ de modo que si x está suficientemente cerca de x_0 (δ cerca) entonces $f(x)$ está cerca de $f(x_0)$ (ε cerca). A ésta, se le suele llamar la **definición $\boldsymbol{\varepsilon - \delta}$ de continuidad**. Es **importante** notar que en esta definición se usa el concepto de distancia entre dos puntos para hablar de cercanía.

Otra definición de continuidad, que es más general porque puede usarse para funciones que van de un espacio topológico a otro, o más bien, se aplica en espacios donde el concepto de distancia posiblemente no esté definido.

Definición 2. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f: X \to Y$ es **continua** si $f^{-1}(V)$ es abierto en X siempre que V sea abierto en Y.

A ésta última se le conoce como la **definición topológica de continuidad**. En palabras simples dice que f es continua si la imagen inversa de cualquier conjunto abierto es un conjunto abierto. Con esta definición la idea de cercanía está expresada en términos de conjuntos abiertos: dos puntos son "cercanos" si están en un conjunto abierto.

Vamos a hacer una pausa para explicar el concepto de imagen inversa de un conjunto bajo una función con el propósito de entender la definición topológica de continuidad.

La imagen que viene a nuestra cabeza cuando nos hablan de la función $f(x) = 2x$ es la de una recta de pendiente 2 que pasa por el origen (Ilustración 1).

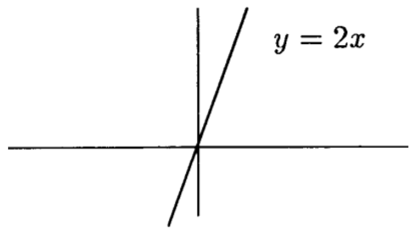

Ilustración 1. Gráfica de $f(x) = 2x$, tomada de Kinsey, C. (1993). *Topology of surfaces*. New York: Springer Verlag.

Sin embargo, podemos visualizar a f de acuerdo a la forma en que transforma la recta real. Piensa en lo siguiente: si evaluamos f en un número, el resultado es otro número dos veces más grande; $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-2) = -4$. Si le damos el intervalo $[0,1]$, f nos devuelve el intervalo $[0,2]$. Lo que está haciendo la función f a la recta real es estirarla por un factor 2. Podemos imaginar la acción de f como nos muestra la Ilustración 2.

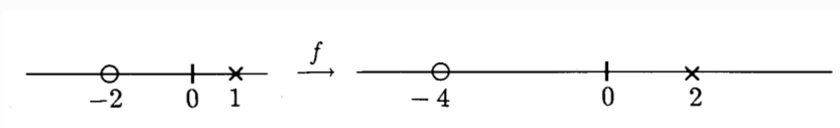

Ilustración 2. La acción de $f(x) = 2x$, tomada de Kinsey, C. (1993). *Topology of surfaces*. New York: Springer Verlag.

De la misma forma, $g(x) = |x|$ "dobla" la recta real a la mitad (Ilustración 3).

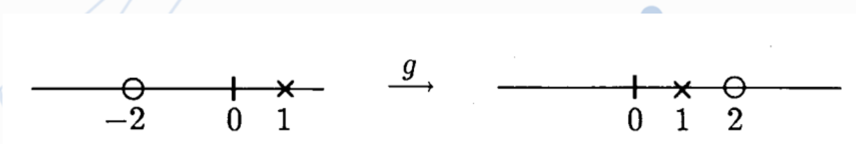

Ilustración 3. La acción de $g(x) = |x|$, tomada de Kinsey, C. (1993). *Topology of surfaces*. New York: Springer Verlag.

Ahora piensa que f es la función que dobla un rectángulo a la mitad (mira la Ilustración 4). Se puede ejemplificar el concepto de imagen inversa de un conjunto bajo una función utilizando a la función f.

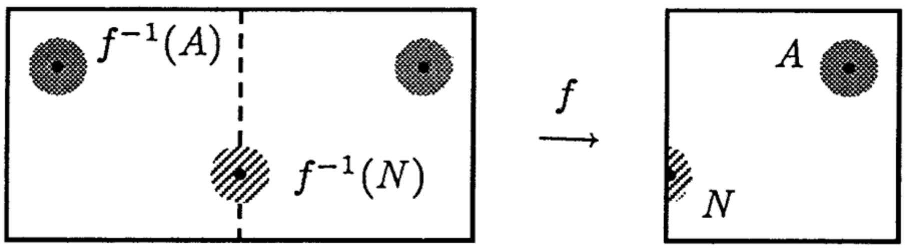

Ilustración 4. La función f dobla un rectángulo a la mitad, tomada de Kinsey, C. (1993). *Topology of surfaces*. New York: Springer Verlag.

La imagen inversa está definida para cualquier subconjunto A de la imagen de la función f y consiste del conjunto de puntos que bajo f caen en A.

Si A es el disco que se muestra en la parte derecha de la Ilustración 4, la imagen inversa de A denotada por $f^{-1}(A)$ son los dos discos de la izquierda. **Nota que en este contexto f^{-1} no es una función.**

Un punto y dibujado en la parte baja del rectángulo de la derecha tiene una vecindad N que es un medio disco y es abierto relativo al rectángulo de la derecha. $f^{-1}(N)$es un disco completo en el rectángulo de la izquierda y es abierto en tal rectángulo.

Formalmente se define la imagen inversa como:

Definición 3. Sea $f: X \to Y$ una función y $y \in Y$ un punto en la imagen de f. Definimos la **imagen inversa de y** denotada por $f^{-1}(y)$, como el conjunto $\{x \in X : f(x) = y\}$. Más aún: dado un subconjunto V de Y definimos $f^{-1}(V)$, la **imagen inversa de V**, como el conjunto $\{x \in X : f(x) \in V\}$.

Ejemplo. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define con la regla de correspondencia $f(x) = x^2$, entonces $f^{-1}([0,2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ y $f^{-1}([1,3]) = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$.

Aprovechando la pausa, se define otro concepto relacionado con la imagen inversa: la **imagen directa**. Este concepto está definido para subconjuntos del dominio de una función. Formalmente se define como sigue:

Definición 4. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función y A un subconjunto de X. Se define la **imagen directa de A bajo f** como el conjunto $f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{para algún } x \in A\}$ (Ilustración 5).

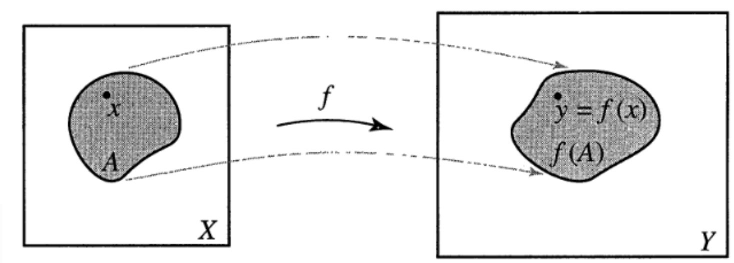

Ilustración 5. La imagen directa de A bajo f, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Ejemplos.

- Para $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ tenemos $f([-\sqrt{2}, \sqrt{2}]) = [0,2]$ y $f([-\sqrt{3}, -1]) = f([1, \sqrt{3}]) = [1,3]$.
- Para $f: X \rightarrow Y$, el conjunto $f(X)$ es la imagen directa del dominio de f y es lo que se conoce como **imagen o rango** de f.

Observaciones 2.5. Las siguientes son algunas propiedades de la imagen inversa y de la imagen directa que usaremos más adelante. Estas propiedades pueden ser verificadas a partir de la definición con nociones básicas de teoría de conjuntos.

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función, $A, B \subseteq X$ y $V, W \subseteq Y$. Entonces:

i. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
ii. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
iii. $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$
iv. $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$

v. $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$
vi. $f^{-1}(V - W) = f^{-1}(V) - f^{-1}(W)$

Aquí terminamos con la pausa para explicar el concepto de imagen inversa e imagen directa.

Veamos ahora que **la definición topológica de continuidad es equivalente a la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad** en el caso de funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Como primer paso traduciremos la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad al lenguaje de conjuntos abiertos.

Afirmación 6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua según la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad si y solo si para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo conjunto abierto U tal que $f(x) \in U$, existe una vecindad V de x tal que $f(V) \subseteq U$ (Ilustración 6).

En esta traducción, el conjunto abierto U juega el rol del intervalo definido por la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ en la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad y el conjunto abierto V juega el rol del intervalo definido por $|x - x_0| < \delta$.

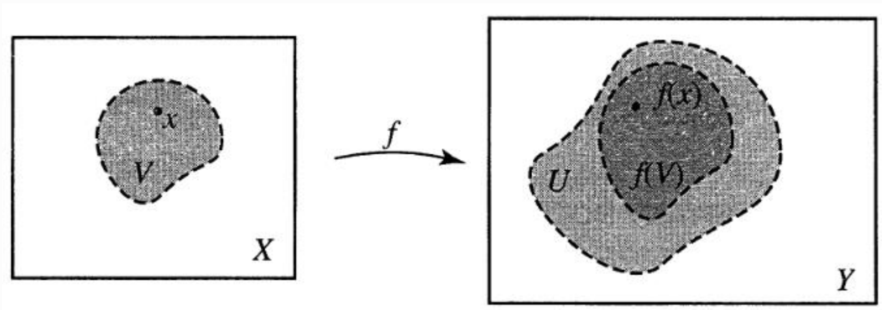

Ilustración 6. Para todo $U \ni f(x)$, existe $V \ni x$ tal que $f(V) \subseteq U$, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Ahora, veamos que la traducción de la Afirmación es equivalente a la definición topológica de continuidad.

Teorema 7. Una función $f: X \to Y$ es continua según la definición topológica de continuidad si y solo si para todo $x \in X$ y todo conjunto abierto U tal que $f(x) \in U$, existe una vecindad V de x tal que $f(V) \subseteq U$.

Prueba: Primero supón que f es continua (según la definición topológica). Sea $x \in X$ y $U \subset Y$ un conjunto abierto en Y tal que $f(x) \in U$. Tenemos que probar que existe una vecindad V de x tal que $f(V) \subseteq U$. Proponemos $V := f^{-1}(U)$. Definido de esta forma, V es abierto en X porque f es continua. Además $f(V) = f(f^{-1}(U)) \subset U$. Con esto vemos que V cumple lo que queremos.

Ahora supongamos que para todo$x \in X$ y todo conjunto abierto U tal que $f(x) \in U$, existe una vecindad V de x tal que $f(V) \subseteq U$. Probaremos que $f^{-1}(W)$ es abierto en X para todo W abierto en Y. Sea W un conjunto abierto en Y. Para mostrar que $f^{-1}(W)$ es abierto mostraremos que todo $x \in f^{-1}(W)$ es un punto interior. Sea $x \in f^{-1}(W)$, entonces $f(x) \in W$. Como W es abierto en Y, por hipótesis tenemos que existe una vecindad V_x de x tal que $f(V_x) \subset W$. Esto es lo mismo que decir que $V_x \subset f^{-1}(W)$. Hasta aquí tenemos que para todo $x \in f^{-1}(W)$, existe una vecindad V_x de x tal que $V_x \subset f^{-1}(W)$. Por lo tanto, cualquier $x \in f^{-1}(W)$ es punto interior de $f^{-1}(W)$, así que $f^{-1}(W)$ es abierto y f es continua según la definición topológica, como se quería mostrar.

■

El siguiente es un resultado muy útil.

Teorema 8. Sean $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ funciones continuas. Entonces la composición $g \circ f: X \to Z$ es continua.

Prueba: Supongamos que f y g son continuas y sea U un conjunto abierto en Z. Entonces $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Como g es continua, $g^{-1}(U)$ es abierto en Y y como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X. Tenemos entonces que $(g \circ f)^{-1}(U)$ es abierto en X para todo U abierto en Z y por lo tanto $g \circ f$ es continua.

■

Una definición alternativa de continuidad se puede dar usando conjuntos cerrados, la equivalencia es fácil de probar y proponemos que se realice como ejercicio.

Teorema 9. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f: X \to Y$ es continua si y solo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para todo C cerrado en Y.

La definición topológica de continuidad es muy fácil de enunciar. Pero no se ve claramente por qué decimos que las funciones continuas preservan la cercanía o proximidad.

El siguiente teorema nos da la idea de que las funciones continuas envían puntos que están cerca en un espacio a puntos cercanos en el otro. (Recuerda que los puntos que están en la cerradura de un conjunto son los que están "cerca" del conjunto).

Teorema 10. Sea $f: X \to Y$ una función continua y $A \subset X$. Si $x \in Cl(A)$ entonces $f(x) \in Cl(f(A))$. (Ilustración 7).

Prueba: Supongamos que $f: X \to Y$ es continua. Sea $x \in X$ y $A \subset X$. Vamos probar que si $f(x) \notin Cl(f(A))$ entonces $x \notin Cl(A)$ (esto es equivalente a lo que afirma el teorema). Como $f(x) \notin Cl(f(A))$ existe un conjunto abierto U que contiene a $f(x)$ y que no interseca a $f(A)$. Se sigue de esto que $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto que contiene a x y que no interseca a A. Por lo tanto $x \notin Cl(A)$, como queríamos probar.

■

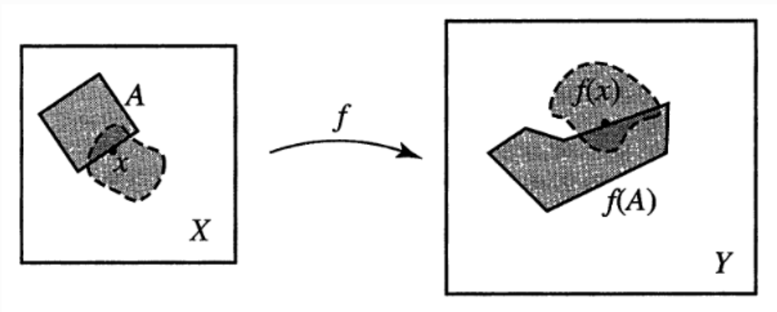

Ilustración 7. Si f es continua, manda puntos cercanos a puntos cercanos, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Ejemplo. En la Ilustración 8 podrás observar el ejemplo de una función que no es continua. La función f corta un rectángulo en dos y los separa. Observa que una sucesión de puntos convergente a un punto x, se mapea en una sucesión de puntos cuyo límite ha quedado alejado.

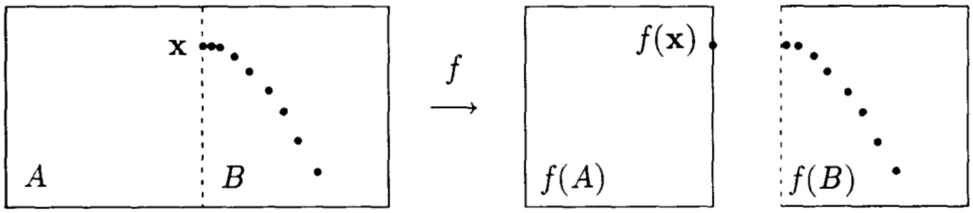

Ilustración 8. Si f no es continua, puede mandar puntos cercanos a puntos lejanos, tomada de Kinsey, C. (1993). *Topology of surfaces*. New York: Springer Verlag.

Ejemplo Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{1,2,3\}$ con las topologías indicadas en la Ilustración 9. Sean $f, g, h : X \to Y$ definidas por:

$$f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 2, f(d) = 2$$
$$g(a) = 2, g(b) = 2, g(c) = 1, g(d) = 3$$
$$h(a) = 1, h(b) = 2, h(c) = 2, h(d) = 3$$

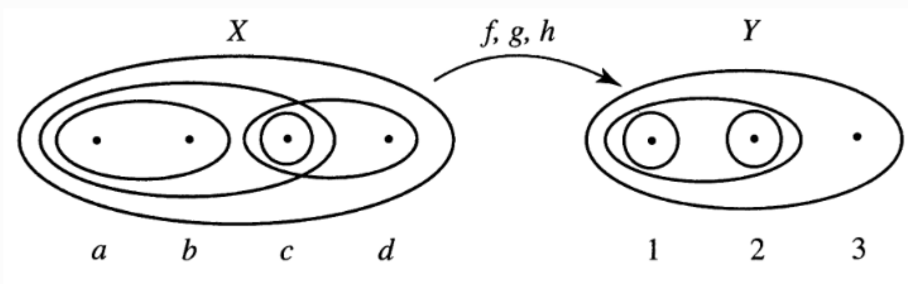

Ilustración 9. Funciones de X a Y, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

La función f es continua. Esto puede ser verificado directamente calculando la imagen inversa de cada conjunto abierto de Y y observando que es un conjunto abierto en X. De la misma forma puede verse que la función g es continua. Sin embargo, h no es continua porque $\{2\}$ es abierto en Y pero $h^{-1}(\{2\}) = \{b, c\}$ no es abierto en X.

Ejemplo. Sea X un espacio topológico. La función identidad $id: X \to X$ definida por $id(x) = x$ es continua. La razón de esto es que $id^{-1}(V) = V$ para todo $V \subseteq X$, así que si V es abierto $id^{-1}(V)$ también lo es.

Ejemplo. Sean X y Y espacios topológicos y sea $y_0 \in Y$. La función constante $C : X \to Y$ se define por $C(x) = y_0$ para todo $x \in X$. Consideremos un conjunto V abierto en Y; $C^{-1}(V) = X$ si $y_0 \in V$ o bien $C^{-1}(V) = \emptyset$ si $y_0 \notin V$. En ambos casos $C^{-1}(V)$ es abierto en X y por lo tanto C es continua.

Importante: Puede pensarse que es la regla de correspondencia de una función lo que determina su continuidad o discontinuidad. Pero no es así, la topología del dominio y contradominio de la función son muy importantes también. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. A partir de X podemos formar los siguientes dos espacios topológicos. El primero esX_D, que resulta de darle a X la topología discreta (recuerda que la topología discreta es en la que cualquier subconjunto de X es abierto). El segundo es X_I, resultado de darle a X la topología indiscreta (que es la que solo tiene dos elementos: Xy $\emptyset$). Ahora considera la función

$$id : X_I \to X_D \text{dada por la regla } id(x) = x$$

Nota que esta función sería la función identidad si X_D y X_I fueran el mismo espacio topológico y está definida por la misma regla de correspondencia que la función del ejemplo 2.15. Sin embargo está función no es continua porque el conjunto $\{x\}$ para cualquier $x \in X$ es abierto en X_D y $id^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ no es abierto en X_I.

El ejemplo anterior muestra que al hablar de continuidadde una función hay que tener cuidado de especificar cuál topología le estamos dando al dominio y al contradominio de la función.

Ejemplo Sea X un espacio topológico y Y un subespacio de X. La función inclusión $i: Y \to X$ dada por $i(y) = y$ es una función continua. Por supuesto se está considerando a Y con la topología de subespacio. Si se toma un conjunto abierto $U \subseteq X$ entonces $i^{-1}(U) = U \cap Y$ y $U \cap Y$ es abierto en Y por la definición de la topología de subespacio en Y. De hecho, la topología de subespacio es la topología más pequeña (la que tiene menos elementos) en la que la función inclusión es continua.

Importante: la definición de función continua dice que para que $f: X \to Y$ sea continua debe pasar que la imagen inversa de **todo** abierto en Y es un conjunto abierto en X. Sin embargo, no hace falta verificar esto para todo abierto en Y. El siguiente resultado nos dice **que para probar que f es continua basta verificar que la imagen inversa de los elementos de una base de la topología de Y son abiertos en X.** Esto es de gran ayuda porque restringe los conjuntos abiertos para los que debemos calcular su imagen inversa cuando queremos probar la continuidad de una función.

Teorema 2.11. Sean X y Y dos espacios topológicos y $\mathcal{B}$ una base para la topología de Y. Entonces $f: X \to Y$ es una función continua si y solo si $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

Prueba: Supongamos que $f: X \to Y$ es continua. Entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo V abierto en Y. Como los elementos de la base $\mathcal{B}$ son abiertos en Y, se cumple que $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

Ahora supón que $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$. Se mostrará que f es continua. Sea V un conjunto abierto en Y. Entonces V es unión de elementos de la base, es decir $V = \bigcup B_\alpha$. Entonces, $f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup B_\alpha) = \bigcup f^{-1}(B_\alpha)$. Como se asumió que cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ es abierto en X se tiene que su unión también es un conjunto abierto. Por lo tanto $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto para todo conjunto V abierto en X y esto nos dice que f es continua.

■

Se utiliza el teorema anterior en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Las funciones $f(x) = x + 2, g(x) = 2x$ y $h(x) = x^2$ son todas funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (con su topología estándar). ¿Por qué? Consideremos el intervalo (a, b) con $a < b$. Este intervalo es un elemento típico de la base de la topología estándar de $\mathbb{R}$. Se tiene que:

$f^{-1}\big((a,b)\big) = (a-2, b-2)$,

$g^{-1}\big((a,b)\big) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$,

$$h^{-1}\big((a,b)\big) = \begin{cases} \left(-\sqrt{b}, -\sqrt{a}\right) \cup \left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right) \; si \; a \geq 0 \\ \left(-\sqrt{b}, -\sqrt{a}\right) \; si \; a < 0 \text{ y } b > 0 \\ \emptyset \text{ si } b \leq 0 \end{cases}$$

En todos los casos, la imagen inversa de un elemento de la base arbitrario es un conjunto abierto. Esto nos dice que las tres funciones son continuas.

Ejemplo. La multiplicación es una función continua. Es decir, la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$ es continua. Para ver esto, tomemos un elemento de la base de la topología del rango de la función $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Su imagen inversa es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$f^{-1}\big((a, b)\big) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < xy < b\}.$$

Este conjunto consiste en los puntos que están entre las hipérbolas $xy = a$ y $xy = b$ (sin incluirlas). Un ejemplo donde a y b son positivos se muestra en la Ilustración 10.

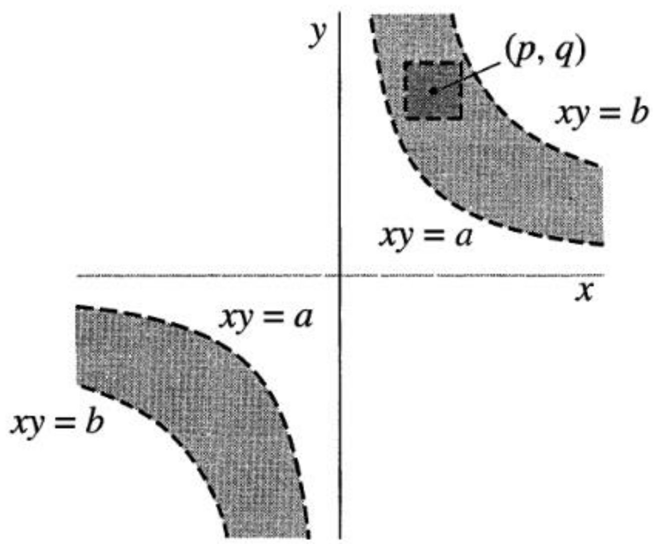

Ilustración 10. La imagen inversa $f^{-1}((a,b)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < xy < b\}$ con a y b positivos, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Intuitivamente es claro que $f^{-1}\big((a, b)\big)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Para probarlo podemos mostrar que para cada punto $(p, q) \in f^{-1}\big((a, b)\big)$, hay un cuadro abierto centrado en (p, q) y contenido en $f^{-1}\big((a, b)\big)$(Observa la Ilustración 10). Tomando $m = \min\{b - pq, pq - a\}$ y $\delta > 0$ tal que $\delta|p|$, $\delta|q|$ y $3\delta^2$ sean menores que $\frac{m}{3}$, tenemos que $(p - \delta, p + \delta) \times (q - \delta, q + \delta) \subset f^{-1}\big((a, b)\big)$.

La suma es otra función continua y puede demostrarse esta afirmación como ejercicio. Combinando la continuidad de la multiplicación y la de la suma obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.12. Sea $\mathbb{R}$ con su topología estándar. Entonces toda función polinomial $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es continua.

Puede probarse con la definición topológica de continuidad y resultados que se desprenden de ella, que las funciones racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas son continuas en los dominios en los que están definidas.

Importante: Una función continua no necesariamente envía conjuntos abiertos a conjuntos abiertos. Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es continua, pero la imagen directa del conjunto abierto $(-1,1)$ es $[0,1)$, que no es abierto.

Homeomorfismos y espacios equivalentes.

En esta sección se define a los homeomorfismos. Los homeomorfismos son funciones entre espacios topológicos que nos proveen de la más fundamental noción de equivalencia topológica. Tales funciones preservan todas las propiedades que le da una topología a un conjunto porque definen una correspondencia entre los puntos y entre los conjuntos abiertos de dos espacios topológicos.

Las propiedades preservadas por los homeomorfismos reciben el nombre de propiedades topológicas. Dos espacios homeomorfos o equivalentes comparten estas propiedades. Si encontramos una propiedad topológica que no compartan dos espacios podemos afirmar que no son equivalentes, en otras palabras, que son distintos desde el punto de vista de la topología.

Se inicia con la definición de homeomorfismo.

Definición 2.13. Sean X y Y espacios topológicos. Un **homeomorfismo** $f: X \to Y$ es una función biyectiva con inversa $f^{-1}: Y \to X$ de modo que f y f^{-1} son continuas. Si existe un homeomorfismo entre X y Y decimos que X y Y son **homeomorfos** o **topológicamente equivalentes** y denotamos esta relación con $X \cong Y$.

Sea $f: X \to Y$ una función biyectiva. Para que $f^{-1}: Y \to X$ sea continua debe pasar que $(f^{-1})^{-1}(U)$ (la imagen inversa de U bajo f^{-1}) sea abierto en Y para todo U abierto en X. Como f es una función biyectiva $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ para todo $U \subseteq X$. Entonces $f(U)$ debe ser abierto en Y para todo U abierto en X. Por lo tanto, decir que f^{-1} es continua cuando f es una biyección es lo mismo que decir que la imagen directa bajo f de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. Por lo mismo, decir que f es continua cuando f es biyectiva es equivalente a decir que la imagen directa bajo f^{-1} de un conjunto abierto es un conjunto abierto. Mira la Ilustración 11Ilustración 11. Un homeomorfismo es una correspondencia biunívoca entre conjuntos abiertos

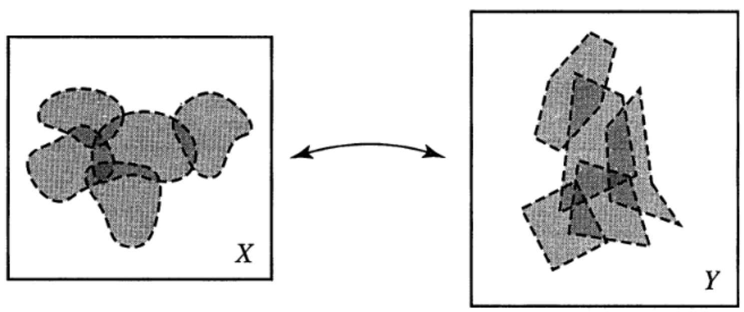

Ilustración 11. Un homeomorfismo es una correspondencia biunívoca entre conjuntos abiertos, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Una forma coloquial de decir que f es un homeomorfismo es la siguiente:
f es un homeomorfismo si es una biyección entre los puntos y entre los conjuntos abiertos. Cada punto de X queda emparejado con uno de Y sin que sobren puntos en Y. Además, a cada conjunto abierto de X le corresponde un único conjunto abierto en Y sin que sobren conjuntos abiertos en Y.

Si recuerdas que una topología en un conjunto es la colección de subconjuntos abiertos, podrás darte cuenta de que **un homeomorfismo es una biyección entre espacios topológicos que preserva la estructura topológica dada por las topologías de cada espacio**.

Ejemplo. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{1, 2, 3\}$ dos espacios topológicos con las topologías que se muestran en la Ilustración 12. Defínase $f: X \to Y$ por $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3$. Entonces f es un homeomorfismo porque es una biyección entre los elementos y entre los conjuntos abiertos de X y Y.

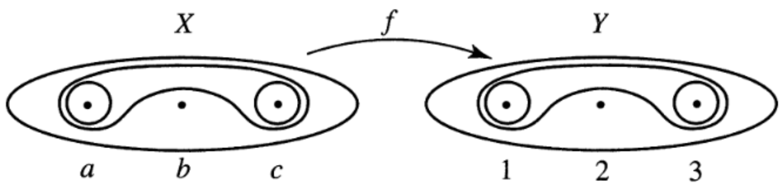

Ilustración 12. Un homeomorfismo entre X y Y, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Ejemplo. Las dos topologías en el conjunto de tres puntos $X = \{a, b, c\}$ que se muestran en la Ilustración 13 son diferentes como colecciones de subconjuntos de X pero son topológicamente equivalentes porque la función $f: X \to X$ definida por $f(a) = c, f(b) = b, f(c) = a$ es un homeomorfismo.

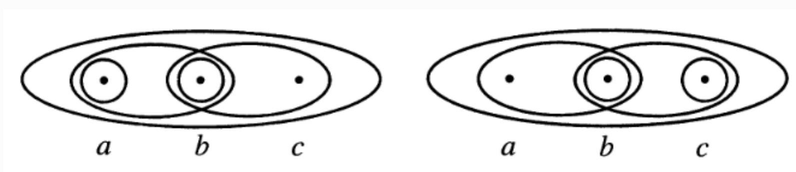

Ilustración 13. Dos topologías equivalentes en $X = \{a, b, c\}$, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$. Esta función es biyectiva y su inversa está dada por $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$. Como ambas funciones son polinomios en $\mathbb{R}$, ambas son continuas y por lo tanto f es un homeomorfismo.

La acción de f sobre la recta es estirarla por factor tres y moverla a la derecha una unidad. Como es de esperarse, esta acción no modifica las propiedades topológicas de la recta.

Afirmaciones

Las siguientes afirmaciones sobre los homeomorfismos implican que la equivalencia topológica es una relación de equivalencia en la colección de todos los espacios topológicos. Estas afirmaciones pueden ser fácilmente demostradas y se dejan como ejercicio.

i. La función $id: X \to X$, definida por $id(x) = x$ es un homeomorfismo.
ii. Si $f: X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f^{-1}: Y \to X$ también lo es.
iii. Si $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son homeomorfismos, entonces también lo es la composición $g \circ f: X \to Z$.

Ejemplo. Consideremos al intervalo $(-1,1)$ con la topología estándar (la que hereda de $\mathbb{R}$). Defina la función $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$ como $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. La gráfica de esta función se muestra en la Ilustración 14. Intuitivamente, podemos ver en la gráfica de la función que$f$ es una biyección entre $\mathbb{R}$ y $(-1,1)$ y la imagen inversa bajo f y f^{-1} de intervalos abiertos son intervalos abiertos. Entonces f y f^{-1} son continuas y por lo tanto son homeomorfismos entre $\mathbb{R}$ y $(-1,1)$. Con este ejemplo se ve que $\mathbb{R}$ y $(-1,1)$ son el mismo espacio topológicamente hablando, es decir, son indistinguibles para la topología.

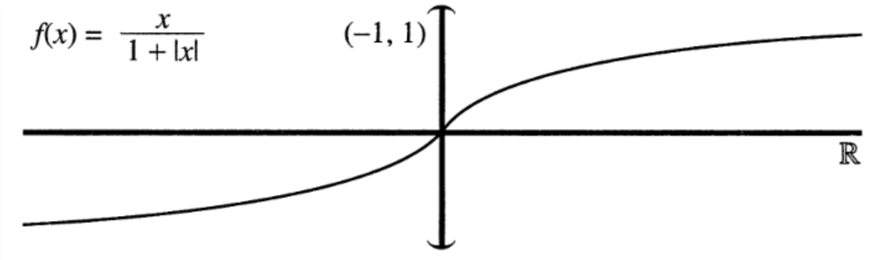

Ilustración 14. Homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $(-1,1)$, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Ejemplo. $\mathbb{R}$ es homeomorfo a cualquier intervalo abierto (a, b), no solo a $(-1,1)$. Es más, consideremos las siguientes colecciones de intervalos con la topología que heredan de $\mathbb{R}$y con a y b números reales arbitrarios con $a < b$:

(i) Intervalos abiertos: (a, b), $(-\infty, a)$, (a, ∞), $\mathbb{R}$,
(ii) Intervalos cerrados y acotados: $[a, b]$,
(iii) Intervalos semi-abiertos e intervalos cerrados no acotados: $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$.

Cada una de las colecciones consta de espacios topológicos equivalentes, es decir, todos los intervalos abiertos son homeomorfos, todos los intervalos cerrados y acotados son homeomorfos y todos los intervalos de la familia (iii) son homeomorfos. Más que eso, dos intervalos que pertenezcan a distintas familias **no** son homeomorfos. A continuación vamos a ilustrar algunos homeomorfismos entre intervalos de la misma familia y en la unidad 3 estaremos en posibilidades de probar que dos intervalos de distinta familia no son homeomorfos.

Para los intervalos de la familia (i). La función $f: \mathbb{R} \to (a, \infty)$ dada por $f(x) = e^x + a$ es un homeomorfismo. Entonces, $\mathbb{R}$ es homeomorfo a cualquier intervalo de la forma (a, ∞). Como ser homeomorfos es una relación de equivalencia entonces cualquier intervalo de la forma (a, ∞) es homeomorfo a cualquier otro de la forma (a', ∞). Un homeomorfismo entre los intervalos $(0,1)$ y (a, b) es la función lineal $g: (0,1) \to (a, b)$ dada por $g(x) = (b - a)x + a$. Así, tenemos que cualesquiera dos intervalos de la forma (a, b) son homeomorfos entre sí y homeomorfos a $\mathbb{R}$ (porque ya sabíamos que el intervalo (-1,1) es homeomorfo a $\mathbb{R}$). Por todo lo anterior podemos concluir que todos los intervalos de la familia (i) son homeomorfos.

La gráfica del homeomorfismo f se muestra en la parte izquierda de la Ilustración 15. El homeomorfismo g es como el de la parte central de la Ilustración 15 pero con dominio $(0,1)$ en lugar de $[0,1]$.

Para los intervalos de la familia (ii). El homeomorfismo $g: [0,1] \to [a, b]$ dado por $g(x) = (b - a)x + a$(casi igual que el del párrafo anterior, la diferencia es el dominio e imagen) sirve para mostrar que todos los intervalos cerrados y acotados son homeomorfos al intervalo [0,1] y por lo tanto todos los intervalos cerrados y acotados son homeomorfos. Ver parte central de la Ilustración 15.

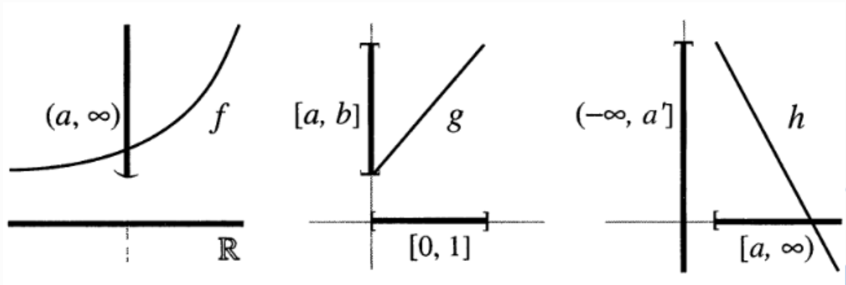

Ilustración 15. Homeomorfismos entre intervalos, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Finalmente, para los intervalos de la familia (iii). La función $h:[a,\infty) \to (-\infty, a']$ dada por $h(x) = -x + a' + a$, es un homeomorfismo entre los intervalos $[a,\infty)$ y $(-\infty, a']$, así que cualesquiera de estos intervalos son homeomorfos ¿Puedes encontrar un homeomorfismo entre los intervalos $[0,\infty]$ y $[a,b)$ y otro entre los intervalos $(-\infty, 0]$ y $(a,b]$ con $a < b$? Combinando estos homeomorfismos y h podemos probar que todos los intervalos de la familia (iii) son homeomorfos.

Ejemplo. Considera el intervalo $[0,2\pi)$ y el círculo unitario S^1 en $\mathbb{R}^2$ con las topologías que les heredan $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Denotaremos con p_θ al punto en S^1 con ángulo $\theta \in \mathbb{R}$, medido desde la parte positiva del eje X en sentido anti-horario. Sea $f:[0,2\pi) \to S^1$ definida por $f(\theta) = p_\theta$, como se ve en la Ilustración 16. f es biyectiva y nos preguntamos si es continua.
Calculemos la imagen inversa de un elemento de la base de la topología de S^1. Un elemento de tal base se puede expresar como $B = \{p_\theta \in S^1 : a < \theta < b$ con $a, b \in \mathbb{R}\}$. Vamos a considerar dos casos para B: si $p_0 \in B$ o si $p_0 \notin B$ (p_0 es el punto correspondiente al ángulo 0). Si $p_0 \notin B$ entonces $f^{-1}(B)$ es un intervalo abierto $(c,d) \subset [0,2\pi)$. Si $p_0 \in B$ entonces $f^{-1}(B)$ es de la forma $[0,c) \cup (d, 2\pi)$. En ambos casos $f^{-1}(B)$ es un conjunto abierto en $[0,2\pi)$. Entonces f es continua.
Pero ¿es f^{-1} continua? Tenemos que el intervalo $[0,\frac{1}{2})$ es abierto en $[0,2\pi)$ pero $(f^{-1})^{-1}\left([0,\frac{1}{2})\right) = f([0,\frac{1}{2}))$ no es abierto en S^1. Entonces f^{-1} no es continua y por lo tanto f no es un homeomorfismo.

De hecho, no hay homeomorfismos entre estos dos espacios porque no son topológicamente equivalentes. En la unidad 3 podremos probar esta afirmación usando la propiedad topológica conexidad por trayectorias.

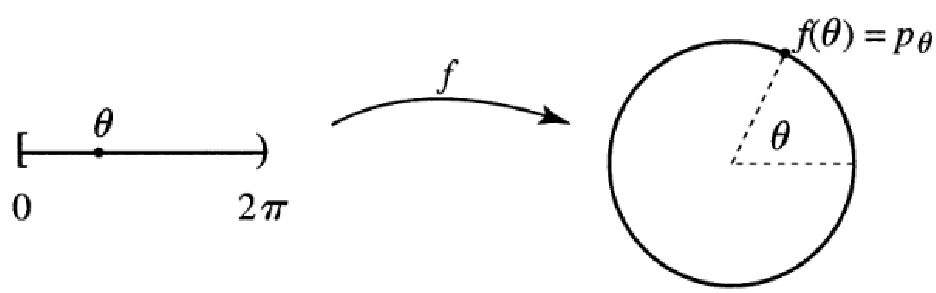

Ilustración 16. Una función biyectiva y continua de $[0, 2\pi)$ a S^1 que no es un homeomorfismo, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Ejemplo. El plano con su topología estándar es homeomorfo al semiplano abierto (derecho) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$y al disco abierto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ (H y D con la topología que heredan de $\mathbb{R}^2$). Mira la Ilustración 17.

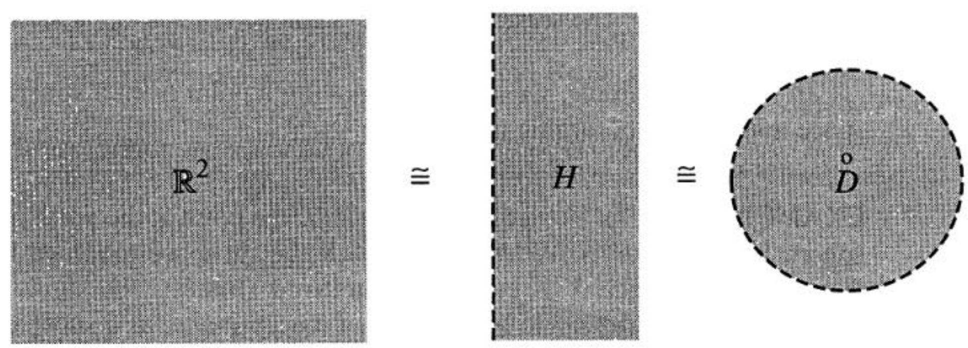

Ilustración 17. El plano es homeomorfo a medio plano abierto y al disco abierto, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

La función $f : \mathbb{R}^2 \to H$ dada por $f(x, y) = (e^x, y)$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y H. Esta función envía líneas verticales a líneas verticales y la acción que tiene sobre el plano es la siguiente:

- La imagen de la mitad izquierda del plano es la franja en H dada por $0 < x < 1$.
- El eje Y va a la línea $x = 1$.
- La mitad derecha del plano es enviada a la región en H en la que $x > 1$.

La función $g: \mathbb{R}^2 \to D$ definida en coordenadas polares por $g(r,\theta) = (\frac{r}{1+r}, \theta)$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y el disco abierto. Esta función contrae todo el plano radialmente hasta que coincide con el disco abierto D.

Ejemplo. La superficie de un cubo C es homeomorfo a la esfera S^2, tal como se muestra en la Ilustración 18. Si imaginamos que ambos, el cubo y la esfera están centrados en el origen del espacio $\mathbb{R}^3$, entonces la función $f: C \to S^2$ definida por $f(p) = \frac{p}{|p|}$ es un homeomorfismo. Notemos que $f(p)$ es un punto a distancia 1 del origen y por lo tanto está en S^2. Lo que hace la función f es proyectar cada punto en la superficie del cubo radialmente hasta que cae en la esfera. En la Ilustración 18 podemos ver que también los abiertos de C se mapean biyectivamente en los abiertos de S^2.

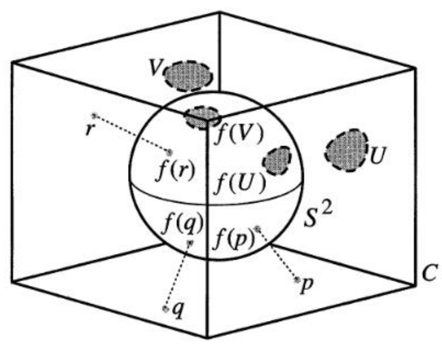

Ilustración 18. La superficie de un cubo y la esfera son homeomorfos, tomada de Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.

Propiedades Topológicas

Hay ciertas propiedades de los espacios topológicas que se conservan al aplicarles un homeomorfismo y hay otras que se pierden. Las propiedades que se conservan bajo homeomorfismos son muy útiles para distinguir espacios y reciben el nombre de propiedades topológicas. Su definición formal es la siguiente:

Definición 2.15. Una propiedad P es una **propiedad topológica** si y solo si siempre que el espacio A tiene la propiedad P y el espacio B es homeomorfo a A entonces B también tiene la propiedad P.

¿Por qué son tan útiles las propiedades topológicas? En la sección pasada revisaste ejemplos de espacios homeomorfos y se probó que son homeomorfos mostrando un homeomorfismo entre ellos. Sin embargo, en los ejemplos donde había espacios **no** homeomorfos tuvimos que dejar la prueba de ello para la unidad tres. Esto se debe a que, con las herramientas que tenemos hasta ahora, si quisiéramos probar que dos espacios no son homeomorfos tendríamos que probar que ninguna de las funciones que se pueden definir entre los espacios es un homeomorfismo. Esto es muy difícil, imagina considerar todas las funciones entre dos espacios, ¡son demasiadas! Es aquí donde entran las propiedades topológicas a facilitarnos las cosas. Supón que sabemos que una cierta propiedad P es topológica. Entonces si dos espacios son homeomorfos, ambos deben tener la propiedad P. Pero si descubrimos que alguno de los espacios no tiene la propiedad P y el otro sí la tiene podremos asegurar que los espacios **no** son homeomorfos. Esta es una vía mucho más sencilla de probar que dos espacios no son homeomorfos.

La conexidad por trayectorias y la compacidad son ejemplos de propiedades topológicas. En la siguiente unidad las estudiaremos a detalle. Por lo pronto, en el siguiente ejemplo se muestra una propiedad que no es topológica: la de ser acotado. Se define como sigue:

Definición 2.16. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. A es **acotado** si $A \subset B^n(0,r)$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Esto es, A es acotado si está contenido en una bola suficientemente grande.

Ejemplo. Sea $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ y sea $R^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ ambos con la topología que les hereda $\mathbb{R}^3$. Nota que R^2 es una copia de $\mathbb{R}^2$ metida en $\mathbb{R}^3$. Sea $x \in S^2$ un punto en la esfera. Afirmamos que $S^2 - \{x\}$ es homeomorfo a R^2. Coloquialmente se dice que la esfera agujerada es homeomorfa al plano.

Para mostrar que son homeomorfos definimos la siguiente función conocida como **proyección estereográfica**. Colocamos la esfera sobre el plano de modo que se toquen en el polo sur de la esfera y el punto x quede ubicado en el polo norte (Ilustración 19). Para cada $y \in S^2$, la recta que pasa por x y por y toca al plano en un único punto. Definimos $s(y)$ como el punto donde dicha recta toca al plano.

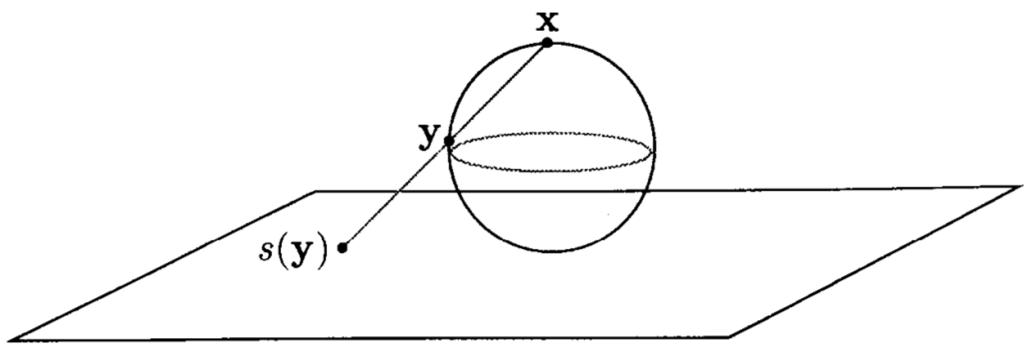

Ilustración 19. Proyección estereográfica

Se puede obtener una regla de correspondencia para la proyección estereográfica utilizando trigonometría básica. De la imagen resulta claro que $s : S^2 - \{x\} \to R^2$ es una biyección entre los puntos y entre los conjuntos abiertos de la esfera agujerada y el plano. Entonces estos dos espacios son homeomorfos.

Nota que la esfera es acotada y el plano **no** es acotado. Esto nos dice que **ser acotado no es una propiedad topológica**.

Observa también que **la propiedad de ser acotado involucra distancias, por lo que era de esperarse que no fuera propiedad topológica.**

Cierre de la Unidad

Hemos terminado la unidad 2. En esta parte del curso estudiamos a las funciones continuas y a los homeomorfismos.
Las funciones continuas son la clase de funciones que se definen naturalmente entre espacios topológicos. El concepto de continuidad está íntimamente relacionado con la topología de un espacio.
Los homeomorfismos son funciones continuas y biyectivas cuya inversa es continua. Si hay un homeomorfismo entre dos espacios decimos que son homeomorfos. Los espacios homeomorfos son iguales para la topología. Un homeomorfismo es una forma de pasar de un

espacio a otro sin cambiar su "forma topológica" porque son correspondencias biyectivas entre los abiertos de un espacio y los del otro.

Recordaras que las áreas de las matemáticas se pueden describir en términos de los objetos que estudian, las funciones que se definen en esos objetos y las propiedades que se preservan bajo la aplicación de tales funciones. Hasta ahora hemos estudiado, en el caso de la topología, los objetos (espacios topológicos) y las funciones (funciones continuas). Además al final de esta unidad introdujimos la definición de las propiedades que se preservan bajo homeomorfismos (propiedades topológicas). En la siguiente unidad estudiaremos a detalle dos propiedades topológicas: la conexidad por trayectorias y la compacidad.

Fuentes de Consulta

Básica:

- Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.
- Kinsey, C. (1993). *Topology of surfaces*. New York: Springer Verlag.

Complementaria:

- García-Maynez, A., (1998). *Topología General.* México: Porrúa.
- Munkres, J. R. (2002). *Topología*. Madrid: Pearson Educación.
- Prieto, C. (2003). *Topología Básica.* México: Fondo de Cultura Económica.
- Rubiano O. (2010) *Topología General: Un Primer curso,* Bogotá, Colombia, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.