



Matemáticas

Topología General

6º Semestre

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Clave
05143635

Universidad Abierta y a Distancia de México





Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Índice

<i>Presentación de la unidad</i>	3
<i>Competencia Específica.....</i>	4
<i>Logros</i>	4
<i>Espacios conexos por trayectorias</i>	4
<i>Componentes arco-conexas.....</i>	7
<i>Compacidad, Cubiertas abiertas y compacidad</i>	11
<i>Cierre de la Unidad</i>	19
<i>Fuentes de Consulta.....</i>	20



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Presentación de la unidad

En las dos unidades anteriores has estudiado los espacios topológicos y las funciones que aparecen naturalmente entre ellos, las funciones continuas. En otras palabras has estudiado los objetos y las funciones de la topología. También pudiste revisar la definición de propiedad topológica y su utilidad para distinguir espacios topológicos, es decir, para clasificarlos.

En ésta, la tercera y última unidad del curso, podrás familiarizarte con dos propiedades topológicas: la conexidad por trayectorias, también conocida como arco-conexidad, y la compacidad.

De estas dos propiedades, la arco-conexidad es la más sencilla e intuitiva. Se trata, hablando informalmente, del número de pedazos del que está hecho un espacio. Un pedazo de un espacio es un subconjunto en el que un punto del espacio podría viajar libremente. Si un espacio tiene un solo pedazo se dice que es arco-conexo. Si no es arco-conexo, se puede saber de cuantos pedazos está hecho. Para que dos espacios sean homeomorfos es necesario (aunque no suficiente) que estén hechos del mismo número de pedazos. Con la teoría que se desarrollara el problema de clasificar espacios topológicos queda reducido a clasificar los que son arco-conexos.

La compacidad es menos intuitiva que la conexidad y también es más difícil de definir. La compacidad es una especie de “finitud”. Si en un espacio compacto se tiene una forma de medir distancias, los elementos del espacio no pueden alejarse mucho, es decir las distancias entre puntos del espacio estarían acotadas. Otra forma de decir esto es que si viviéramos en un espacio compacto y comenzáramos un viaje, no podríamos alejarnos de nuestro lugar de origen tanto como quisiéramos. La diferencia entre un espacio compacto y uno no compacto es la misma que habría entre vivir en un planeta como el nuestro, que es una esfera, y un planeta cuya superficie fuera un plano infinito.



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Competencia Específica

Distinguir espacios topológicos para simplificar problemas geométricos, analíticos o algebraicos utilizando las propiedades topológicas de conexidad por trayectorias y compacidad.

Logros

- Analizar el concepto de conexidad para determinar conjuntos conexos de manera visual.
- Analizar las diferentes definiciones de compacidad para conocer su relación con otros conceptos topológicos.
- Realizar ejemplos de compacidad, cubiertas abiertas y compacidad.

Espacios conexos por trayectorias

En esta sección se introduce el concepto de conexidad por trayectorias, una de las dos propiedades topológicas que se mencionaron en la sección anterior. La conexidad por trayectoria es un concepto muy intuitivo y sirve para distinguir espacios topológicos de acuerdo al número de “pedazos” por los que están constituidos.

Definición 1. Sea X un espacio topológico y a y b dos puntos en X . Una **trayectoria de a a b** en X es una función continua $f: [0,1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

Definición 2. Un espacio topológico X es **conexo por trayectorias** si para cualesquiera $a, b \in X$ existe una trayectoria en X de a a b . Dicho con símbolos, X es conexo por trayectorias si $\forall a, b \in X \exists f: [0,1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = a, f(1) = b$.

Definición 3. Un subconjunto A de un espacio topológico X es **conexo por trayectorias en X** si es conexo por trayectorias utilizando la topología que le hereda X .

Ejemplos:

- (i) $\mathbb{R}^n$ es conexo por trayectorias $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $a, b \in \mathbb{R}^n$ entonces una trayectoria que une a con b en $\mathbb{R}^n$ es $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = a - t(a - b)$. Observa que la imagen de la función f es el segmento que une a con b .



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

- (ii) La bola abierta (y la cerrada) en $\mathbb{R}^n$ de radio r y centro en x es **conexa por trayectorias** en $\mathbb{R}^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. La trayectoria del ejemplo funciona también para este caso.
- (iii) No es difícil ver que si “se hace un agujero” a un plano, el espacio resultante es conexo por trayectorias. Es decir $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ es conexo por trayectorias para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Sean a y b dos puntos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$; si p no está en el segmento que une a con b entonces la trayectoria en $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ que une a con b es $f(t) = a + t(b - a)$; si p está en el segmento entre a y b , se construye una trayectoria que evite a p eligiendo un tercer punto c que no esté en la línea recta que pasa por a, b y p y tomando los dos segmentos que unen a con c y c con b ; esta trayectoria está dada por la función

$$g(t) = \begin{cases} a + 2t(b - a) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2c - b + 2t(b - c) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se deja como ejercicio verificar que la función g es continua. Observa la Ilustración 1 para que tengas una idea geométrica de la función g . Se puede hacer la misma construcción para cada $n \geq 2$ lo cual muestra que $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ es conexo por trayectorias para cada $p \in \mathbb{R}^n$.

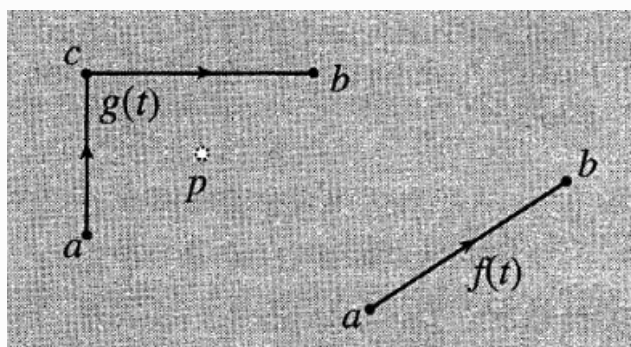


Ilustración 1. El espacio $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ es conexo

El siguiente teorema dice que la imagen de un espacio conexo por trayectorias bajo una función continua es también conexo por trayectorias. Esto implica que **la conexidad por trayectorias se preserva bajo homeomorfismos** (los homeomorfismos son funciones continuas) **y por lo tanto es una propiedad topológica.**



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Teorema 4. Sean X y Y dos espacios topológicos. Si $f: X \rightarrow Y$ es continua y X es conexo por trayectorias, entonces $f(X)$ es conexo por trayectorias en Y .

Prueba: Sean p y q dos puntos en $f(X)$. Sea $x \in f^{-1}(\{p\}) \subset X$ y $y \in f^{-1}(\{q\}) \subset X$. Como X es conexo por trayectorias, existe una trayectoria $g: [0,1] \rightarrow X$ tal que $g(0) = x$ y $g(1) = y$. Entonces $f \circ g$ es una trayectoria de p a q . La última afirmación se sigue de que la composición de funciones continuas es una función continua, así que $f \circ g: [0,1] \rightarrow Y$ es continua, $f \circ g(0) = f(g(0)) = f(x) = p$ y $f \circ g(1) = f(g(1)) = f(y) = q$. ■

Este teorema, además de probar que la conexidad por trayectorias es propiedad topológica, nos proporciona una manera sencilla de probar que un espacio es conexo por trayectorias si sabemos que es la imagen de una función continua definida en un dominio conexo por trayectorias. Esto es lo que vemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

- (iv) El círculo y la esfera son conexos por trayectorias. El círculo es la imagen de $\mathbb{R}$ bajo la función continua $u \rightarrow (\cos u, \sin u)$ y la esfera es la imagen de $\mathbb{R}^2$ bajo la función continua $(u, v) \rightarrow (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$.
- (v) El toro $(S^1 \times S^1)$ es conexo por trayectorias porque es la imagen de $\mathbb{R}^2$ bajo la función continua $(u, v) \rightarrow (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$.
- (vi) Una forma más sencilla (que la del ejemplo (iii)) de probar que el plano agujerado $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ es conexo por trayectorias es observar que es la imagen de $\mathbb{R}^2$ bajo la función continua $(x, y) \rightarrow e^x(\cos y, \sin y)$.

No todos los espacios topológicos son conexos por trayectorias, como lo muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplos:

- (vii) Sea $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cualquier trayectoria que una el 1 con el -1 debe pasar por el 0. Por esto, S no es conexo por trayectorias. Tenemos así el primer ejemplo de un espacio que no es conexo por trayectorias y por fin una prueba de que dos espacios no son homeomorfos: S



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

no es homeomorfo a $\mathbb{R}$ porque S no es conexo y $\mathbb{R}$ sí. S tampoco es homeomorfo a ninguno de los espacios de los ejemplos (i) – (vi).

- (viii) Sea T la unión de los semiejes positivos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y > 0\}$ y $\{(x, 0) : x > 0\}$ (observa la Ilustración 2). T no es conexo por trayectorias porque cualquier trayectoria en el plano que una un punto en un semieje con un punto en el otro semieje debe pasar por la recta $y = x$. Pero T no intersecta a esa recta, por lo que no puede haber una trayectoria de ese tipo contenida en T . Otra forma de probar que T no es conexo es probar que es homeomorfo al conjunto S del ejemplo (vii).

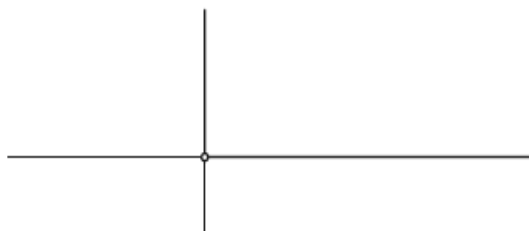


Ilustración 2. El conjunto T

Ya logramos distinguir algunos espacios topológicos de otros usando la conexidad por trayectorias, seguimos sin poder distinguir al círculo de un intervalo, pues ambos son arco-conexos. En la siguiente sub-sección se desarrollan herramientas para hacer más distinciones.

Componentes arco-conexas.

No todos los espacios son conexos por trayectorias, pero todos los espacios pueden ser divididos en subconjuntos maximales que son conexos por trayectorias. A tales subconjuntos se les conoce como las componentes arco-conexas del espacio.

Para definir las componentes arco-conexas se utiliza una relación de equivalencia. Dado un espacio topológico X y dos puntos x y y , en él, decimos que x está arco-relacionado con y si existe una trayectoria en X entre x y y . Esta relación se denota por $x \sim_a y$.

Afirmación. $\sim_a$ es una relación de equivalencia.



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Prueba: Recuerda que lo que define a una relación de equivalencia es que tenga tres características: que sea reflexiva, simétrica y transitiva. Eso es lo que se mostrará.

- a) Reflexividad: $x \sim_a x$ porque podemos tomar la trayectoria constante $f: [0,1] \rightarrow X$ dada por $f(t) = x \forall t$.
- b) Simetría: $x \sim_a y$ implica que $y \sim_a x$ porque si $f: [0,1] \rightarrow X$ es una trayectoria de x a y , entonces $g: [0,1] \rightarrow X$ definida como $g(t) = f(1 - t)$ es una trayectoria de y a x .
- c) Transitividad: $x \sim_a y$ y $y \sim_a z$ implica que $x \sim_a z$ porque si f es una trayectoria de x a y y g es una trayectoria de y a z se puede formar una trayectoria de x a z definida como:

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Esta función es continua porque $f(\frac{1}{2}) = y = g(\frac{1}{2})$ y ambas, f y g son continuas. Además tenemos que $h(0) = f(0) = x$ y $h(1) = g(1) = y$.

Por lo tanto, $\sim_a$ es una relación de equivalencia. ■

Ejemplo:

- (ix) Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ la unión de $\{(0, y) : y > 0\}$ y todo el eje X . Cada punto en T puede ser unido en T con el origen $(0,0)$. Entonces todos los puntos en T están arco-relacionados con el origen y, por transitividad, todos los puntos están arco-relacionados. Por lo tanto T es arco-conexo.

Como todas las relaciones de equivalencia, $\sim_a$ divide a X en clases de equivalencia, que son subconjuntos disjuntos de elementos relacionados entre sí.

Definición: Las clases de equivalencia bajo la relación $\sim_a$ se llaman las **componentes arco-conexas de X** .

Por supuesto las componentes arco-conexas de un espacio X son conexas por trayectorias. No es difícil ver que cualquier subconjunto de X conexo por trayectorias es subconjunto de alguna



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

de las componentes arco-conexas de X . Es por esto que se dice que las componentes arco-conexas de X son los subconjuntos conexos por trayectorias maximales de X .

Los conjuntos con diferente número de componentes arco-conexas no son homeomorfos. Esto se prueba en el siguiente teorema.

Teorema. Los espacios homeomorfos tienen el mismo número de componentes arco-conexas.

Prueba: Sea $f: S \rightarrow T$ un homeomorfismo y supón que α es una trayectoria que une p y q en S . Entonces $t \rightarrow f(\alpha(t))$ es una trayectoria que une $f(p)$ con $f(q)$ en T . Entonces los puntos que están arco-relacionados en S son enviados por f a puntos que están relacionados en T . Además, si dos puntos no están arco-relacionados en S sus imágenes bajo f tampoco están arco-relacionadas en T , porque si estuvieran querría decir que f^{-1} envía puntos arco-relacionados a puntos que no están arco-relacionados, pero eso no es posible porque f^{-1} también es un homeomorfismo. Por lo tanto, la imagen de una componente de S es una componente de T y las imágenes de componentes distintas de S son componentes distintas de T . Esto completa la prueba. ■

El teorema anterior nos sirve para distinguir entre los siguientes espacios: $S = [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$ y $T = [1,2] \cup [3,4]$ porque uno tiene tres componentes arco-conexas mientras que el otro solo tiene dos. Además, se observa en la prueba que las componentes son apareadas con sus imágenes bajo el homeomorfismo f , por lo que tenemos el siguiente teorema.

Teorema. Las componentes arco-conexas de espacios homeomorfos son homeomorfas por parejas.

Ahora podemos distinguir entre los espacios $S = [0,1] \cup [2,3]$ y $T = [0,1] \cup \{2\}$, porque aunque ambos tienen dos componentes conexas, $\{2\}$, que es una de las componentes de T , no es homeomorfa a ninguna de las componentes de S .

El siguiente concepto nos permitirá distinguir el círculo del intervalo:



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Definición: Sea S un espacio arco-conexo. Llamamos a $p \in S$ un n – **punto de S** si $S \setminus \{p\}$ tiene n componentes arco-conexas. Es decir, si quitando p pasamos de un espacio con una componente arco-conexa a otro con n componentes arco-conexas. Al punto p también se le llama un **punto de corte de tipo n** . Observa que un 1 – *punto* es un punto que no separa a S , por lo que también se le llama un **punto no separante**.

Ejemplos(ver Ilustración 3):

- (x) Cada punto del intervalo $(0,1)$ es un punto de corte de tipo 2. O lo que es lo mismo, si removemos de $(0,1)$ cualquier punto, obtenemos un conjunto con dos componentes arco-conexas.
- (xi) En el intervalo $[0,1]$ los extremos 0 y 1 son puntos no separantes, puesto que $[0,1] \setminus \{1\} = [0,1)$ es un conjunto arco-conexo (lo mismo para $[0,1] \setminus \{0\}$). Todos los demás puntos (los interiores) son puntos de corte de tipo 2.
- (xii) El intervalo semi-abierto $[0,1)$ tiene un 1 – *punto*, el 0, y todos los demás puntos son 2 – *puntos*.
- (xiii) El conjunto T del ejemplo (ix) tiene un 3 – *punto*, el $(0,0)$, y todos sus demás puntos son 2 – *puntos*.
- (xiv) El círculo tiene solamente puntos no separantes o 1 – *puntos*.



Ilustración 3. Cinco conjuntos no homeomorfos

- (xv) El conjunto de la Ilustración 4 es arco-conexo y tiene un número infinito de puntos no separantes y exactamente un n – *punto* para cada $n \geq 2$.

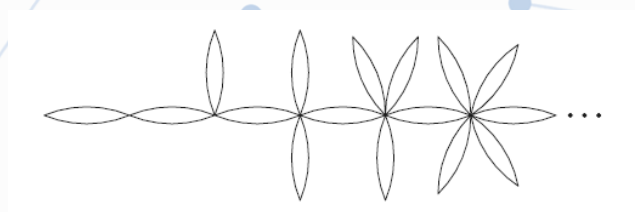


Ilustración 4. Conjunto con n –*puntos* para cada $n > 0$



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Para probar que ninguno de los conjuntos de la Ilustración 3, ejemplos (x) – (xiii), son homeomorfos se utiliza el siguiente teorema:

Teorema. Los conjuntos homeomorfos tienen la misma cantidad de n – puntos para cada $n \in \mathbb{N}$.

Prueba: Sea $f: S \rightarrow T$ un homeomorfismo. Se mostrará que f envía cada n – punto de S a un n – punto de T . Sea p un n – punto de S . Entonces $S \setminus \{p\}$ tiene n componentes. Como la restricción de un homeomorfismo es un homeomorfismo, $S \setminus \{p\}$ es homeomorfo a $f(S \setminus \{p\}) = T \setminus \{f(p)\}$. Por lo tanto, $S \setminus \{p\}$ y $T \setminus \{f(p)\}$ tienen el mismo número de componentes, lo que nos dice que $f(p)$ es un n – punto de T . La biyectividad de f completa la prueba. ■

Con este teorema finalmente se prueba que un círculo no es homeomorfo a un intervalo.

Compacidad, Cubiertas abiertas y compacidad

Has estudiado en la sección anterior la propiedad topológica más intuitiva: la conexidad. En esta sección se presenta una segunda propiedad topológica conocida como **compacidad**. Este concepto no es tan intuitivo como la conexidad. En $\mathbb{R}^n$ los conjuntos compactos son los conjuntos cerrados y acotados. Pero en general, en un espacio topológico, los conjuntos compactos no pueden ser descritos de forma tan simple. De hecho, establecer una definición formal de compacidad le tomó a los topólogos bastante tiempo. Se dieron varias definiciones durante el desarrollo de la topología en los primeros años del siglo XX y finalmente se estableció como definición la que se enunciará al inicio de esta sección.

A lo largo de esta última sección del curso, se definirá compacidad y se presentarán ejemplos y teoremas sobre el concepto. Se estudiará la compacidad en los espacios euclidianos y al final se presentarán resultados que pueden ser usados para estudiar las funciones de variable real.



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Considera los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ mostrados en la Ilustración 5 y en la Ilustración 6. Todos ellos con la topología estándar. Nuestra meta en esta sección es establecer qué hace distintas, topológicamente hablando, a las figuras etiquetadas como “compactas” de las etiquetadas como “no compactas”.

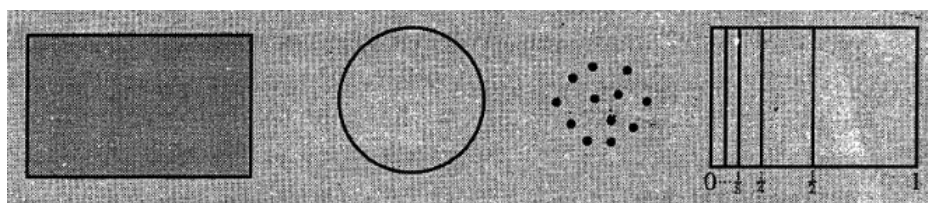


Ilustración 5. Conjuntos compactos

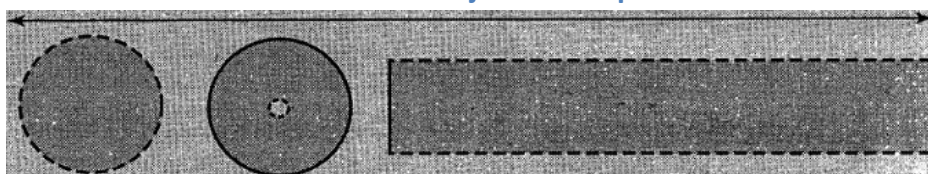


Ilustración 6. Conjuntos no compactos

Iniciamos con algunas definiciones que nos permitirán establecer el concepto de compacidad.

Definición: Sea A un subconjunto del espacio topológico X y sea $\mathcal{O}$ una colección de subconjuntos de X .

- a) La colección $\mathcal{O}$ es una **cubierta** de A o se dice que **cubre a** A , si A está contenido en la unión de los conjuntos de $\mathcal{O}$.
- b) Si $\mathcal{O}$ es cubierta de A y cada conjunto en $\mathcal{O}$ es abierto, se dice que $\mathcal{O}$ es una **cubierta abierta** de A . Observa la Ilustración 7.
- c) Si $\mathcal{O}$ es una cubierta de A y $\mathcal{O}'$ es una subcolección de $\mathcal{O}$ que también cubre a A , entonces a $\mathcal{O}'$ se le llama **sub-cubierta** de $\mathcal{O}$.



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

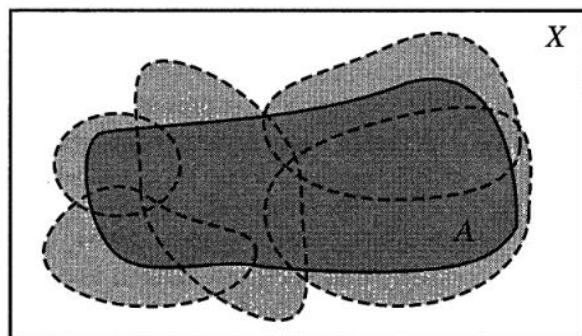


Ilustración 7. Una cubierta abierta de A

Ejemplos:

- (i) Por la definición de base (sección 1.3 de la unidad 1), sabemos que cualquier base de topología de un espacio topológico X es una cubierta abierta de X .
- (ii) Las siguientes dos colecciones de intervalos son cubiertas abiertas de $\mathbb{R}$.
 - a. $\mathcal{O}_1 = \{\dots, (-1,1), (0,2), (1,3), \dots\}$ y $\mathcal{O}_2 = \{(-\infty, 1), (0, \infty)\}$.

Se puede observar en el último ejemplo que hay cubiertas abiertas con un número infinito de conjuntos y otras con un número finito de conjuntos. Los espacios compactos son aquellos para los que cualquier cubierta abierta con un número infinito de conjuntos puede ser reducida a una sub-cubierta con un número finito de conjuntos. La siguiente es la definición formal.

Definición. Un espacio topológico X es **compacto** si toda cubierta abierta de X tiene una sub-cubierta finita.

Ejemplo. La línea real $\mathbb{R}$ con su topología estándar no es compacta porque

$$\mathcal{O} = \{\dots, (-1,1), (0,2), (1,3), \dots\}$$

Es una cubierta abierta, pero ninguna sub-colección de $\mathcal{O}$ cubre a $\mathbb{R}$. ¿Puedes ver por qué? Cada número entero está cubierto por solo un intervalo en $\mathcal{O}$, si quitamos cualquier intervalo de $\mathcal{O}$, descubrimos un entero. Observa la Ilustración 8.



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

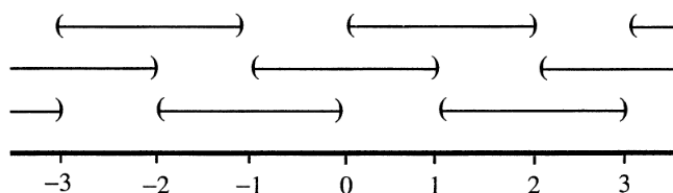


Ilustración 8. Una cubierta abierta de $\mathbb{R}$ sin sub-cubiertas finitas

Ejemplo. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un espacio topológico que consiste de un número finito de elementos. Entonces X es compacto porque en cualquier topología de X puede haber a lo más un número finito de conjuntos abiertos, y por lo tanto cualquier cubierta abierta será finita.

Se extenderá ahora la definición de compacidad para sub-espacios topológicos.

Definición. Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Se dice que A es **compacto en X** si A es un espacio compacto con la topología que le hereda X . En este caso se dice también que A es un **sub-espacio compacto** de X .

Equivalente a la anterior definición tenemos la siguiente forma de comprobar si un subespacio de X es compacto. Sea $A \subset X$, A es compacto en X si cualquier cubierta de A con abiertos de X tiene una sub-cubierta finita.

Ejemplo. El subconjunto $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto en $\mathbb{R}$. Para probar esto, sea $\mathcal{O}$ una cubierta de A con subconjuntos abiertos de X . Como $\mathcal{O}$ cubre a A , entonces hay al menos un conjunto abierto U_0 en $\mathcal{O}$ que contiene al punto 0. U_0 contiene a casi todos los puntos de A (casi todos significa en matemáticas todos excepto un número finito). Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ los puntos que no cubre U_0 (observa que puede pasar que U_0 cubra a todos los puntos de A , pero en ese caso $\{U_0\}$ será la sub-cubierta finita de $\mathcal{O}$). Para cada x_i hay un elemento de $U_i \in \mathcal{O}$ que lo cubre. Entonces, $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$ es una sub-cubierta de $\mathcal{O}$. Por lo tanto A es compacto en $\mathbb{R}$.

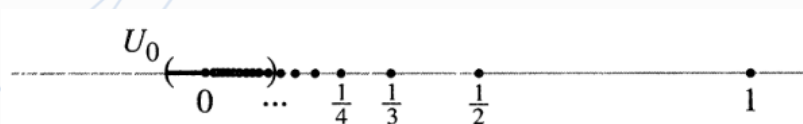


Ilustración 9. El conjunto U_0 contiene a casi todos los puntos de A



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Ejemplo. Considera el intervalo $(0,1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. Este espacio no es compacto porque la colección $\mathcal{O} = \{(\frac{1}{n}, 2) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta de $(0,1]$ con conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ que no tiene sub-cubiertas finitas. Para probar esto supón que hay una sub-colección $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}$ que cubre a $(0,1]$. Sea n_0 el natural más grande tal que $(\frac{1}{n_0}, 2) \in \mathcal{O}'$. Entonces la unión de los elementos de $\mathcal{O}'$ es $\bigcup_{i=1}^{i=n_0} (\frac{1}{i}, 2) = (\frac{1}{n_0}, 2)$. Entonces el punto $\frac{1}{n_0+1} \in (0,1]$ no está cubierto por $\mathcal{O}'$. Por lo tanto, ninguna sub-colección finita de $\mathcal{O}$ cubre a $(0,1]$.

Igual que con la conexidad, los homeomorfismos preservan la compacidad. De hecho, una función continua también la preserva, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sea A un subespacio compacto de X . $f(A)$ es compacto en Y .

Prueba: Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sea A un subespacio compacto de X . Para mostrar que $f(A)$ es compacto en Y considera una cubierta $\mathcal{O}$ de $f(A)$ con abiertos de Y . Entonces, como f es continua, $f^{-1}(U)$ es un abierto de X para todo $U \in \mathcal{O}$. Así que $\mathcal{O}' = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{O}\}$ es una cubierta abierta de A con abiertos de X . Como A es compacto, hay una sub-colección finita de $\mathcal{O}'$, digamos $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \dots, f^{-1}(U_n)\}$, que cubre a A . Entonces la sub-colección $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de $\mathcal{O}$ cubre a $f(A)$. Por lo tanto, $\mathcal{O}$ tiene una subcubierta finita, lo cual implica que $f(A)$ es compacto en Y . ■

De modo que **la compacidad es una propiedad topológica**. Dos espacios homeomorfos son compactos ambos o ninguno lo es. Un homeomorfismo entre ellos envía cualquier cubierta abierta $\mathcal{O}$ de uno a una cubierta abierta $\mathcal{O}'$ del otro (¿recuerdas que los homeomorfismos son biyecciones entre los abiertos de un conjunto?). Además, cualquier sub-cubierta finita de $\mathcal{O}$ será enviada a una sub-cubierta finita de $\mathcal{O}'$ por el homeomorfismo.

Ejemplos: Como ni $\mathbb{R}$ ni $(0,1]$ son compactos, se sigue que todos los intervalos de la forma (a, b) , $(-\infty, b)$, (a, ∞) , $[a, b)$, $[a, \infty)$, $(a, b]$ o $(-\infty, b]$ tampoco lo son.



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

¿Qué pasa con los intervalos de la forma $[a, b]$? En la próxima sub-sección se mostrará que esos intervalos sí son compactos con la topología estándar.

El siguiente teorema muestra que ser cerrado y ser compacto son propiedades parecidas.

Teorema. Sea X un espacio topológico y sea D un subespacio compacto de X . Si C es un subconjunto de D que es cerrado en X entonces es compacto en X .

Prueba: Sea D un subespacio compacto del espacio topológico X . Supón que C es un subconjunto de D cerrado en X . Sea $\mathcal{O}$ una cubierta de C que consiste de conjuntos abiertos en X . El conjunto $X \setminus C$ es abierto en X porque C es cerrado en X . Sea $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cup (X \setminus C)$ (observa la Ilustración 10). $\mathcal{O}'$ es una cubierta abierta de X porque $X \setminus C$ cubre la parte de X que no cubre $\mathcal{O}$. Entonces $\mathcal{O}'$ es una cubierta abierta de $D \subset X$. Como D es compacto, existe una sub-colección finita de $\mathcal{O}'$ que también cubre a D . Sea $\mathcal{O}''$ tal sub-colección finita. $\mathcal{O}''$ cubre a C porque $C \subset D$. Entonces $\mathcal{O}'' \setminus (X \setminus C)$ también cubre a C y es una sub-colección de $\mathcal{O}$. Esto quiere decir que existe una sub-colección finita de $\mathcal{O}$ que cubre a C , por lo tanto C es compacto en X . ■

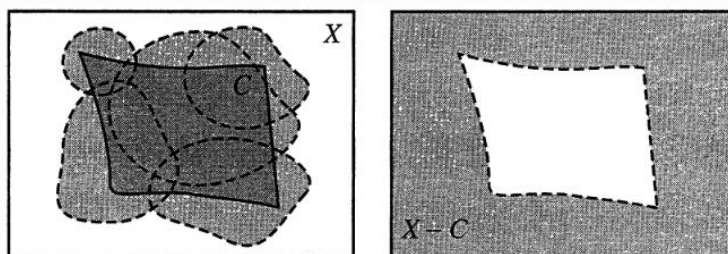


Ilustración 10. Si se agrega $X - C$ a un cubierta abierta de C se obtiene una cubierta abierta de X

El teorema anterior establece que un subconjunto cerrado de un espacio compacto también es compacto. Sin embargo, la relación inversa no es cierta en general, es decir, hay conjuntos compactos que no son cerrados. Para dar un ejemplo, se necesita un espacio topológico con una topología rara. En el siguiente ejemplo puedes ver además que la compacidad depende de la topología que le demos a un conjunto.

Ejemplo. Considera la recta de los números reales $\mathbb{R}$ con una topología que se conoce como **topología del complemento finito**. En la topología del complemento finito los conjuntos abiertos son los que tienen complemento finito. Puedes probar fácilmente que los conjuntos de



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

complemento finito en $\mathbb{R}$ son una topología usando las herramientas de la unidad 1. Al espacio topológico formado por el conjunto $\mathbb{R}$ y la topología del complemento finito se le denota $\mathbb{R}_{cf}$. Por ejemplo, en este espacio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un conjunto abierto porque su complemento es $\{0\}$, un conjunto finito; pero el intervalo $(0,1)$ no es abierto, porque su complemento $\mathbb{R} \setminus (0,1)$ no es finito.

En $\mathbb{R}_{cf}$ todos los subconjuntos son compactos. Esto se debe a que cualquier abierto de $\mathbb{R}_{cf}$ deja sin cubrir solo un número finito de puntos del espacio entero, de modo que en cualquier cubierta de un subconjunto de $\mathbb{R}_{cf}$ con abiertos de $\mathbb{R}_{cf}$ hay una sub-colección finita que cubre a todo $\mathbb{R}_{cf}$, y por lo tanto a cualquiera de sus subconjuntos.

Sin embargo, en $\mathbb{R}_{cf}$ no todos los subconjuntos son cerrados. De hecho, ningún subconjunto infinito (excepto $\mathbb{R}_{cf}$ mismo) es cerrado, pues su complemento no es abierto.

Por lo tanto, en $\mathbb{R}_{cf}$ no todos los compactos son cerrados. Como ejemplo fácil, el conjunto de los números enteros es compacto en $\mathbb{R}_{cf}$ pero no es cerrado.

Ejemplo: También hay conjuntos cerrados que no son compactos. En $\mathbb{R}^2$ con la topología estándar, el eje X es cerrado pero no es compacto (por ser homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología estándar).

Entonces, aunque las propiedades de ser cerrado y ser compacto son cercanas, parece difícil decir cuál es la relación exacta que hay entre estas dos propiedades. Sin embargo, cuando los espacios topológicos en los que trabajamos son los euclidianos, se tienen un teorema que caracteriza a los conjuntos compactos como cerrados y acotados. Ese es el tema de la próxima sub-sección.

Compacidad en $\mathbb{R}^n$

En los cursos de cálculo o de análisis real, donde se estudian los espacios euclidianos con la métrica estándar (y por lo tanto con la topología estándar), se suele definir a los conjuntos compactos como los que son cerrados y acotados. Observa que esa definición solo vale donde además de una estructura topológica se tiene una estructura métrica, es decir, solo vale para los espacios donde se puede medir, porque ser acotado es un concepto que necesita la noción



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

de distancia. Sin embargo, si el objeto de estudio son los espacios euclidianos, es una gran ventaja tener una caracterización de los espacios compactos en términos de dos características que son más fáciles de verificar: ser cerrado y acotado.

Para ello se enuncia el teorema que sustenta tal caracterización y se muestran algunos ejemplos.

El siguiente teorema se conoce como el teorema de Heine-Borel y nos da una caracterización completa de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ con su topología estándar.

Teorema. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

La prueba de este teorema es muy larga y llena de detalles tediosos por lo que no se incluirá en el texto, pero puede ser revisada en cualquiera de los libros anotados en las Fuentes de consulta.

Ejemplos:

- (i) Vuelve a ver la Ilustración 5 y la Ilustración 6. Usando el teorema de Heine-Borel se puede decir fácilmente por que las figuras de la Ilustración 5 representan subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$ ¿verdad? Todas ellas son figuras cerradas y acotadas. Y a las figuras de la Ilustración 6 les falta alguna de esas dos propiedades, por lo que no son compactas.
- (ii) El intervalo $[0,1]$ es cerrado (se probó en la unidad 1) y acotado porque está contenido en la bola $B^1(0,2)$ de radio 2 y centro en cero en $\mathbb{R}$ (¿recuerdas la definición de conjunto acotado que se estudio en la sección de propiedades topológicas de la unidad 2?). Por lo tanto el intervalo $[0,1]$ es compacto.
- (iii) El círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ es compacto porque es cerrado y acotado. También puede probarse este hecho diciendo que el círculo es la imagen del intervalo $[0,1]$ bajo la función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por la regla $f(t) = (\cos t, \sin t)$.



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Cierre de la Unidad

Has llegado al final de la unidad 3 y del curso de topología general. En esta unidad estudiaste a detalle dos propiedades topológicas: la arco-conexidad y la compacidad. Esto te permite distinguir muchos de los espacios topológicos que estudiaste en la unidad uno.

La arco-conexidad es una propiedad topológica que distingue el número de componentes de las que está hecho un espacio topológico. Usando esta propiedad se puede distinguir todos los conjuntos finitos dotados con la topología discreta de acuerdo a su número de elementos. También se pueden distinguir espacios como $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ menos un punto. Haciendo uso de los puntos de corte, concepto asociado a la arco-conexidad, podemos distinguir un círculo de un intervalo.

La compacidad es la propiedad que permite distinguir un intervalo abierto de uno cerrado. En los espacios euclidianos puede ser descrita fácilmente como la conjunción de otras dos propiedades que no son topológicas: ser acotado y cerrado. Esta propiedad se utiliza mucho en los cursos de análisis y es base para muchos teoremas de optimización.

Con la herramienta desarrollada a lo largo del curso estás listo para abordar el estudio de otros temas que podrás consultar en cualquiera de los libros de referencia que aparecen al final del texto.



Topología General

Unidad 3. Conexidad por trayectorias y compacidad

Fuentes de Consulta

Básica:

- Adams, C., Franzosa, R. (2009). *Introduction to topology*. India: Pearson Prentice Hall.
- Huggett, S., Jordan, D. (2009). *A Topological Aperitif*. London: Springer-Verlag.
- Kinsey, C. (1993). *Topology of surfaces*. New York: Springer Verlag.

Complementaria:

- García-Maynez, A. (1998). *Topología General*. México: Porrúa.
- Munkres, J. R. (2002). *Topología*. Madrid: Pearson Educación.
- Prieto, C. (2003). *Topología Básica*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Rubiano O. (2010) *Topología General: Un Primer curso*, Bogotá, Colombia, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.