DCEIT

Nombre de la unidad didáctica

Cálculo Integral

Semestre

Segundo semestre

Unidad 3. Métodos de Integración

Universidad Abierta y a Distancia de México

UnADM
UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

Universidad
Abierta y a Distancia de México

Tronco Común

Índice

UNIDAD 3. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Presentación de la unidad

En la unidad 1 hemos visto el teorema fundamental del cálculo, el cual menciona que es posible integrar una función si conocemos su antiderivada, o su integral definida. También hemos adquirido habilidad para resolver cierto tipo de integrales; sin embargo, existen integrales más complicadas que no es posible resolverlas con las fórmulas y métodos hasta ahora expuestos. Por ello, en este capítulo abordaremos diferentes técnicas y métodos para resolver integrales.

Entre los métodos que veremos están integración por partes, integración usando funciones trigonométricas, integraciones por sustitución trigonométrica, integración de un cociente mediante la descomposición de fracciones parciales entre sus diferentes casos. También veremos el cómo abordar cierto tipo de integrales mediante tablas y/o aplicando algunas estrategias para realizar el proceso de integración con éxito. Incluso abordaremos las integrales impropias en donde extenderemos el concepto de integral definida al caso donde el intervalo es infinito y también al caso donde f *tiene* una discontinuidad infinita en un intervalo $[a, b]$.

Competencia específica

Utilizar métodos de integración para resolver integrales mediante reglas, identidades, sustituciones, simplificaciones, definiciones, estrategias y tablas, con base en ejercicios de práctica.

Logros

- Proponer diversos métodos de investigación.
- Determinar el valor del área de diferentes cuerpos curvos.
- Resolver ejercicios relacionados con integrales trigonométricas.
- Resolver ejercicios relacionados con integrales impropias.
- Resolver problemas que presenten argumentos sobre integrales.

Integración por partes

Como inicio de la unidad empezaremos a estudiar el método de integración por partes. Dicho método es una consecuencia inversa del proceso de derivación de un producto de funciones. Veremos también el proceso de integración cuando tengamos funciones expresadas como raíces cuadradas.

Integrales por partes

La regla de integración por partes surge de la regla de derivación de un producto de dos funciones. Supongamos que f y g son funciones derivables.

La regla de derivación de un producto de funciones establece:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

Si aplicamos la integral al producto de funciones, tenemos:

$$\int \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]dx = \int\left[f(x)g'(x) + g(x)\,f'(x)\right]dx$$

En el primer término se cancela la integral.

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)\,f'(x)dx$$

Despejamos el primer término de la suma del lado derecho.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)dx$$

Llegamos a lo que se conoce como *fórmula de integración por partes*.

Si renombramos los términos $u = f(x)$ y $v = g(x)$ y sus respectivos diferenciales $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$; reescribimos la fórmula de integración por partes como:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Reescribiendo de esta manera una integral, es más sencillo resolverla. Escrita de esta manera te será más fácil recordarla.

Ejemplo

Queremos determinar la integral de la forma $\int xsenx\,dx$.

Solución

Antes de realizar la integral identificamos a u y v.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Lo que está en rosa es lo que identificamos y lo que está en amarillo es lo que tenemos que encontrar para poder aplicar la regla.

$u = x$ encontrar: $du = dx$

$dv = senxdx$ encontrar: $v = -\cos x$

Sustituimos en nuestra fórmula de integración por partes, y procedemos a integrar las integrales faltantes. En caso de que fuera necesario, volvemos nuevamente a aplicar la regla de integración por partes. En este caso no es necesario.

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{senx\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\underbrace{dx}_{du}$$

$$= -xcoxx + \int \cos x dx$$ La integral del coseno la sacamos de las tablas de

$$= -x\cos x + senx + C$$

integrales.

El objetivo de la integración por partes es obtener una integral más fácil de resolver, en comparación con la inicial.

Sustitución para racionalizar

En esta sección evaluaremos integrales que tienen una expresión de la forma $\sqrt[n]{g(x)}$, en la cual efectuaremos una sustitución $u=\sqrt[n]{g(x)}$.

Ejemplo

Evaluar la integral $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

Solución

Haremos la sustitución de $u=\sqrt[n]{g(x)}$, es decir:

$u=\sqrt{x+4}$ que es lo mismo que $u^2=x+4$, despejando x y determinando sus diferencias, $x=u^2-4$; $dx=2udu$

Sustituyendo en la integral, llegamos a:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=\int \frac{u}{u^2-4}2udu=2\int \frac{u^2}{u^2-4}du$$
$$=2\int \frac{u^2}{u^2-4}du$$

Este último término será evaluado usando fracciones parciales.

Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

Revisaremos algunos métodos para calcular integrales racionales de la forma:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

En donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Para integrar funciones con esta forma, lo que haremos es expresar a $f(x)$ como una suma de fracciones más sencillas, siempre que el grado del polinomio P sea de menor grado que el polinomio Q.

Nota:

Recordemos que un polinomio se puede expresar de la siguiente manera.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

En dónde $a_n \neq 0$. El grado del polinomio está denotado por n.

Por otra parte, debemos considerar que una ***función propia*** $f(x)$ es cuando el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Y una ***impropia*** es cuando el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$.

Considerando el caso que tengamos una función impropia, lo primero que haremos será realizar la división de polinomios $P(x)$ entre $Q(x)$ hasta obtener el residuo. Es decir,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

En donde $R(x)$ y $S(x)$ también son polinomios.

Revisemos el siguiente ejemplo para entenderlo mejor.

Ejemplo

Supongamos que nos piden determinar la integral racional de:

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$$

Solución

Observemos. Se trata de una integral impropia, pues el grado del polinomio P es mayor que el grado del polinomio Q.

Procedemos a realizar la división y la sustituimos dentro del radicando, tenemos:

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

El cálculo de la integral fue más trivial al realizar la división.

Sin embargo, después de haber realizado la división, es posible que nos quedemos trabajando con el cociente $\frac{R(x)}{Q(x)}$ que pueda tener la forma de una función propia. El grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

$$\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Cuando tengas esto, lo que debes hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en factores, tanto como sea posible para convertir nuestro cociente $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en una suma de fracciones parciales cuyos denominadores son potencias de polinomios de grado menor o igual a dos.

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = F_1 + F_2 + \cdots + F_r$$

El siguiente paso consiste en expresar la función racional propia, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ como una suma de fracciones parciales, dependiendo del factor que esté contenido en $Q(x)$.

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \text{ ó } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Esto siempre va a ser posible.

Veremos en las siguientes secciones los diferentes casos que se pueden encontrar para el denominador $Q(x)$ de la función propia.

Q(x) es producto de factores lineales distintos

Sea el caso que tengamos una función propia. El grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = F_1 + F_2 + \cdots + F_r$$

Caso I, cuando **el denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.**

Es decir, puedes representar tu polinomio $Q(x)$ como producto de factores lineales, la potencia de cada uno de ellos es uno.

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\ldots(a_k + b_k)$$

No debe haber factores repetidos. Con esto es posible reescribir el cociente como:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_x}{a_kx + b_k}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son constantes a encontrar.

Ejemplo

Resuelve la siguiente integral.

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$$

Solución

Se trata de una función propia, ya que el polinomio del denominador es de mayor grado que el polinomio del numerador.

Como comentamos anteriormente, tenemos que expresar el denominador en términos de factores de grado uno.

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Mira, lo hemos puesto con TRES FACTORES LINEALES DISTINTOS, con polinomios de grado uno. ¿Soy muy redundante? Pues, sí, ¡que no se te olvide que el grado de cada factor es uno!

Entonces, ahora reescribimos nuestro cociente como el resultado de fracciones parciales, en términos de las constantes A, B y C.

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Lo que haremos ahora es hallar las constantes A, B y C. Para lograrlo multiplicamos ambos lados de la expresión por

$x(2x-1)(x+2)$.

$$x^2+2x-1=A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)$$

Reordenado para conseguir la igualación de literales.

$$x^2+2x-1=(2A+B+2C)x^2+(EA+2B-C)x-2A$$

Encontramos que los coeficientes en ambas ecuaciones tienen que ser iguales.

$$1=(2A+B+2C)$$

$$2=(EA+2B-C)$$

$$-1=-2A$$

Es un sistema de ecuaciones que hay que resolver para encontrar los valores de A, B y C. Puedes usar cualquier método que desees para resolverlo.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se encontraron los siguientes valores

Al resolver el sistema obtenemos: $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{5}$ y $C=-\frac{1}{10}$

Finalmente, podemos reescribir nuestra integral original en términos de fracciones parciales

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}|x+2| + C$$

Recalcando, el denominador $Q(x)$ se escribió como un producto de factores lineales distintos $Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots(a_k+b_k)$

Q(x) contiene factores lineales, algunos se repiten

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, analizaremos el **caso II**, cuando **el denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.**

Sea el cociente de polinomios

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = F_1 + F_2 + \cdots + F_r$$

El cual es una función propia, donde descomponemos el denominador $Q(x)$ en un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

$$\frac{A^1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}$$

Observa que los factores (a_1x+b_1) se repiten r veces.

Un ejemplo claro es el siguiente:

$$\frac{x^3-x+1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

Hicimos esto, ya que el factor x es lineal y se repite $r=2$ veces, por lo que se escriben los términos $\frac{A}{x}$ y $\frac{B}{x^2}$. Y también el factor $(x-1)$ es lineal y se repite $r=3$, por lo que puedes escribir tres términos $\frac{C}{(x-1)}$, $\frac{D}{(x-1)^2}$ y $\frac{E}{(x-1)}$

Analicemos un ejemplo de integración.

Ejemplo

Determine la integral $\int \frac{x^4-2x+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

Solución

El primer paso es dividir para obtener el cociente de la forma anteriormente vista

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Dividiendo resulta

$$\frac{x^4-2x+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

El segundo paso es expresar a $Q(x)=x^3-x^2-x+1$ en factores.

Factorizamos, dado que 1 es solución de $x^3-x^2-x+1=0$ tenemos el primer factor $(x-1)$, también a (x^2-1) lo podemos descomponer en dos factores $(x-1)\,(x+1)$. Reescribiendo tenemos:

$$\begin{aligned} x^3-x^2-x+1 &= (x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

El factor lineal $x-1$, aparece dos veces.

Con esto ya podemos trabajar con la parte $\frac{R(x)}{Q(x)}$ así que este cociente queda expresado como:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}=\left(\frac{A}{x-1}\right)+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

Realizando la misma técnica del ejemplo anterior para hallar las constantes, multiplicamos por el mínimo común denominador $(x-1)^2(x+1)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C) \end{aligned}$$

Igualamos coeficientes en relación con las literales:

$$\begin{aligned} A \quad\;\; + \; C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + \; C &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$A = 1, B = 2$ y $C = -1$

Una vez que hemos hallado el valor de las constantes procedemos a sustituirlas en nuestras fracciones parciales y reescribimos nuestra integral para resolverlas.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right]dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + in|x-1| - \frac{2}{x-1} - in|x+1| + C \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + in\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \end{aligned}$$

Una vez más hemos descompuesto el denominador $Q(x)$ en un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

$$\frac{A^1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}$$

Q(x) contiene factores cuadráticos reducibles, ninguno se repite

Caso III. Es el caso tal que la descomposición de $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles, de los cuales ninguno se repite. Esto es cuando $Q(x)$ posee el factor $ax^2 + bx + c$, en donde $b^2 - 4ac < 0$. El cociente $\frac{R(x)}{Q(x)}$ tendrá un término de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Siendo A y B constantes a ser determinadas. Considera que es posible que $Q(x)$ contenga términos lineales y no lineales.

Si el denominador contiene factores lineales, utilizarás el método de la sección anterior para determinar las fracciones parciales debido a los términos lineales. Y para determinar la forma de las fracciones parciales cuando los factores del denominador tienen factores cuadráticos, usarás el método expuesto en esta sección.

El siguiente ejemplo lo ilustra mejor.

Ejemplo

La función $f(x) = \frac{x}{[(x-2)(x^2+1)(x^2+4)]}$ descompuesta en fracciones parciales queda de la siguiente manera:

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Las fracciones parciales $\frac{Bx+C}{x^2+1}$ y $\frac{Dx+E}{x^2+4}$ surgen debido a los factores cuadráticos (x^2+1) y (x^2+4) respectivamente; y la fracción $\frac{A}{x-2}$ es consecuencia del término lineal $(x-2)$.

Veamos un ejemplo donde se tenga que integrar una función racional.

Ejemplo

Calcule la siguiente integral $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

Solución

Procedemos a descomponer $Q(x)=x^3+4x=x(x^2+4)$ y reescribimos el cociente (surgen dos fracciones, una debido a un factor lineal y otra debido al factor cuadrático).

$$\frac{2x^2-x+4}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Igual que en los ejemplos anteriores multiplicamos por $x\left(x^2+4\right)$ para resolver los valores de A, B y C.

$$\begin{aligned}2x^2-x+4&=A\left(x^2+4\right)+\left(Bx+C\right)x\\&=\left(A+B\right)x^2+Cx+4A\end{aligned}$$

Resolviendo llegamos a los valores

$A=1$ $B=1$, $C=-1$

Entonces, al reemplazar estos valores para A, B, y C, la integral toma la forma:

$$\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right]dx$$

Fíjate que esta integral, ahora está expresada como la integral de una suma, que es lo mismo que la suma de dos integrales.

$$\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{x-1}{x^2+4}dx$$

El cálculo del primer término es trivial; sin embargo, el segundo término lo podemos expresar en dos partes como:

$$\int\frac{x-1}{x^2+4}dx=\int\frac{x}{x^2+4}dx-\int\frac{1}{x^2+4}dx$$

La primera integral la resolvemos usando una sustitución de variable con $u=x^2+4$ y $du=2xdx$ respectivamente. En la segunda integral se usa la integral:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

Identificamos que $a=2$. Observemos que finalmente nuestra integral original puede ser descompuesta en tres fracciones parciales, una lineal y dos cuadráticas.

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx$$
$$= In|x| + \tfrac{1}{2} In\left(x^2+4\right) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(x/2\right) + C$$

Q(x) contiene un factor cuadrático irreductible repetido

En este tópico tendremos el **caso IV** en el cual el denominador $Q(x)$ se puede descomponer en el factor $\left(ax^2 + dx + c\right)^r$ repetido r veces.

$\frac{R(x)}{Q(x)}$ se descompone en las fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{\left(ax^2 + bx + c\right)} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{\left(ax^2 + bx + c\right)^r}$$

Ejemplo

Descompón en fracciones parciales el siguiente cociente:

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2+1\right)^3}$$

Solución

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2+1\right)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Ix+J}{\left(x^2+1\right)^3}$$

El factor x es lineal y tiene potencia $r = 1$, por lo que se escribe el término $\frac{A}{x}$, el factor $(x+1)$ es lineal y tiene potencia $r = 1$, por lo que también se escribe el término $\frac{B}{(x-1)}$.

El factor $(x^2 + x + 1)$ es cuadrático y tiene potencia $r = 1$, por lo que se escribe el término $\frac{Cx + D}{(x^2 + x + 1)}$.

Ahora pon mucha atención, como el factor $(x^2+1)^3$ no es lineal y tiene una potencia $r = 3$, es posible escribir tres factores de la forma:

$\frac{Ex+F}{(x^2+1)}$, $\frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}$ y $\frac{Ix+J}{(x^2+1)^3}$.

Ejemplo

Determinar $\int \frac{1-x+2x^2+x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$

Solución

Para la descomposición de fracciones, debemos poner atención en la potencia r de cada factor $Q(x)$.

El factor x es lineal y tiene potencia $r=1$, por lo que se escribe el término $\frac{A}{x}$; sin embargo, el factor (x^2+1) no es lineal y tiene potencia $r=1$, entonces se escribe el término $\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$ y el término $\frac{Dx+D}{(x^2+1)^2}$.

Entonces tenemos que el cociente $\frac{R(x)}{Q(x)}$ es:

$$\frac{1-x+2x^2+x^3}{2\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Multiplicamos por $x\left(x^2+1\right)^2$ para hacer una igualación de coeficientes:

$$\begin{aligned}
-x^3+2x^2-x+1 &= A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)x\left(x^2+1\right)+(Dx+E)x \\
&= A\left(x^4+2x^2+1\right)+B\left(x^4+x^2\right)+C\left(x^3+x\right)+Dx^2+Ex \\
&= (A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A
\end{aligned}$$

Se tiene:

$A+B=0 \quad C=-1 \quad 2A+B+D=2 \quad C+E=-1 \quad A=1$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a las soluciones:

$A=1 \; B=-1 \; C=-1 \; D=1 \; E=0$

Sustituyendo los valores de las constantes, llegarás a:

$$\int \frac{1-x+2x^2+x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx$$

$$= \int\frac{dx}{x}-\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \ln|x|-\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\tan^{-1}x-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C$$

Integrales trigonométricas

En esta sección nos enfrentaremos a integrales que contienen funciones trigonométricas. Para ello conoceremos y aplicaremos algunas identidades trigonométricas frecuentemente usadas.

Integrales trigonométricas

Las identidades trigonométricas juegan un papel importante a la hora de integrar ciertas combinaciones de funciones trigonométricas.

La idea central de este método consiste en reescribir una integral dada en una integral más

accesible que permita realizar el proceso de integración de forma práctica.

Podemos usar las siguientes identidades, según nuestra conveniencia a la hora de evaluar integrales.

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \text{ ó } \operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x \text{ ó } \cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$$

$$sen^2 x=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)$$

$$\tan^2 x=\sec^2 x-1$$

$$1+\cot^2 x=\csc 2x$$

Para evaluar integrales de la forma $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$ ó $\int \cos mx \cos nx\, dx$, puedes usar las siguientes identidades.

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\right]$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

Además, podemos usar otras identidades como:

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{senx}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{senx}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{senx}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades de paridad

$$\operatorname{sen}(-x) = -senx$$

$$cos(-x) = -\cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

Ejemplo

Queremos evaluar la integral $\int \cos^3 x\, dx$. Como notarás, no la puedes evaluar directamente con los métodos anteriormente vistos.

Solución

Por ello, utilizaremos las identidades anteriores para hacerla más fácil de resolver.

Para empezar, $\cos^3 x$ lo podemos reescribir con ayuda de las funciones trigonométricas como:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x$$

Reescribiendo la integral inicial con un cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$ y $du = \cos x dx$

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x dx$$

$$= \int (1 - \mathrm{u}^2) du$$

$$= u - \frac{1}{3}u^3 + C$$

Regresamos a la variable inicial x, reemplazando $u = \operatorname{sen} x$

$$\int \cos^3 x dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

Integrales que contienen senos y cosenos

En esta sección conocerás el método de evaluar integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^{\mathrm{m}} x \cos^n x \, dx$$

Para evaluar este tipo de integrales, hay que considerar los siguientes tres casos:

CASO UNO. En el caso que tengamos $n = 2k + 1$ una potencia impar, descomponemos el $\cos^n x$ en factores, posteriormente utilizamos la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ con la intención de expresar los factores restantes en términos de funciones trigonométricas senos.

Finalmente, tenemos la integral con potencia par reescrita en términos de senos.

$$\int \operatorname{sen}^{\mathrm{m}} x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^{\mathrm{m}} x (\cos^2 x)^k \cos x \, dx$$

Reemplazando nuestra identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ tenemos una integral de la forma,

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^m x (1-\operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx$$

Puedes resolver esta integral haciendo un cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$ y al hacer $du = \cos x dx$. Al final tendríamos que resolver una integral de la forma:

$$\int (1-u^2)^k u^m du$$

CASO DOS. Si te enfrentaras con integrales donde la potencia m es impar, $m = 2k+1$. Usamos la misma técnica que en el caso uno.

Descomponemos $\operatorname{sen}^n x$ en factores, sustituimos la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x \cos x^n \, dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^k \operatorname{sen} x \cos x^n \, dx$$

Esta forma se puede resolver por medio de una sustitución, haciendo $u = \cos x$, $du = -senxdx$. Como en la expresión no tenemos un $-sen(x)dx$ multiplicamos ambos lados por -1 y nos queda la expresión $-du = sen(x)dx$. Finalmente tendrás que calcular esta integral.

$$-\int (1-u^2)^k u^n du$$

Como te darás cuenta esta integral es más fácil de resolver.

CASO TRES. Veremos que éste es más fácil, ya que se trata de un caso donde las potencias son pares, tanto para el seno como para el coseno. En este caso tendremos que aplicar las siguientes identidades:

$$sen^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\cos x \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Ejemplo

Determina

$\int sen^5 x \cos^2 xdx$

Solución

Podríamos convertir $\cos^2 x$ a $1 - sen^2 x$ pero nos quedaríamos con una expresión en términos de $senx$ sin factor $\cos x$ extra. En vez de eso, separamos un sólo factor seno y reescribimos el factor $sen^4 x$ restante en términos de $\cos x$:

$sen^5 x \cos^4 x = (sen^2 x)^2 \cos^2 xsenx = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 xsenx$

Sustituyendo $u = \cos x$, tenemos $du = -senxdx$ luego

$$\int sen^5 x cox^2 x dx = \int sen^4 x \cos^2 x senx dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x senx dx$$

$$= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) du$$

$$= -(\tfrac{u^3}{3}) - 2\tfrac{u^5}{5} + \tfrac{u^7}{7}) + C$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C.$$

Otro ejemplo

Evaluar

$$\int \cos^4 2x \sin^3 2x dx$$

$$= \int \cos^4 2x \sin^2 2x \sin 2x dx$$

$$= \int \cos^4 2x (1 - \cos^2 2x) \sin 2x dx$$

$$=\int \cos^4 2x \sin 2x\,dx - \int \cos^6 2x \sin 2x\,dx$$

$$=-\frac{1}{10}\cos^5 2x + \frac{1}{14}\cos^7 2x + C$$

Integrales que contienen tangentes y secantes

En esta sección nos interesa evaluar integrales de la forma: $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$.

Tienes dos casos.

i) Cuando la potencia $n = 2k$ es par: descompondrás $\sec^n x$ en factores, manteniendo en un factor una potencia igual a 2. Reemplazarás la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Expresarás la integral en términos de $\tan x$.

$$\int \tan^m x \sec^{2k} x\, dx = \int \tan^m x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^m x (1+\tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x\, dx$$

Hacemos una sustitución $u = \tan x$ y $du = \sec^2 x dx$ y la integral que evaluarás quedaría así:

$$\int tan^m x \sec^{2k} x\, dx = \int \left[1+u^2\right]^{k-1} u^m du$$

ii) Cuando la potencia $m = 2k+1$ es impar: lo que harás será descomponer $\tan^{2k+1} x$ en factores, manteniendo en un factor una potencia igual a 2. Después reemplazarás la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. Posteriormente, expresarás la integral en términos de sec *x*.

$$\int \tan^{2k+1} x \sec^n x\, dx = \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx$$

Convertimos $u = \sec x$ y $du = \sec x * \tan x dx$ y nos queda una forma más sencilla de integral:

$$\int u^{n-1} * (u^2 - 1)^k du$$

Sustitución trigonométrica

En esta sección aprenderemos a integrar funciones de la forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, siendo a una constante MAYOR a cero.

Haremos un cambio de variable de x a θ mediante la sustitución $x = a sen\theta$. Emplearemos la identidad $\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$ con el objetivo de quitar la raíz, observa:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sen^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - sen^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a|\cos\theta|$$

Podrás ver que, con este cambio de variable, la integral se convierte en una más sencilla facilitando la integración. Hemos eliminado la raíz que nos complicaba el trabajo.

A este tipo de sustitución se le llama sustitución inversa.

Existen otros casos en los que se puede emplear el mismo seguimiento. A continuación tenemos una tabla donde se muestra la expresión y lo que puedes usar dependiendo de los signos de los términos del radicando.

	Forma del radical	**Sustitución**	**Nuevo límite de integración**	**Identidad empleada**
1.	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a sen\theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$
2.	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
3.	$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ó $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

En video puedes ver algunos ejemplos.

Cristigo92. (14 de mayo de 2009). Sustitucion Trigonométrica 1. [Archivo de Vídeo]. YouTube. http://www.youtube.com/watch?v=g8mXuZD0Pb8

Cristigo92. (14 de mayo de 2009). Sustitucion Trigonométrica 2. [Archivo de Vídeo]. YouTube. http://www.youtube.com/watch?v=MDzUKb46y-4&feature=related

Cristigo92. (14 de mayo de 2009). Sustitucion Trigonométrica 3. [Archivo de Vídeo]. YouTube. http://www.youtube.com/watch?v=uviuFSY2vzw&feature=related

Cristigo92. (14 de mayo de 2009). Sustitucion Trigonométrica 4. [Archivo de Vídeo]. YouTube. http://www.youtube.com/watch?v=HxOfazuF3U4&feature=related

Ejemplo

Determina la integral $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

Solución

Identificamos que se trata del segundo caso que se encuentra en la tabla. Entonces, la sustitución empleada será $x = 2\tan\theta$ definida en el intervalo $,-\pi/2 < \theta < \pi/2$. El diferencial de x es $dx = 2\sec^2\theta d\theta$.

Trabajando con el radical y realizando las sustituciones respectivas se tiene:

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4(\tan^2\theta+1)} = \sqrt{4\sec^2} = 2|\sec\theta| = 2\sec\theta$$

Reemplazamos en nuestra integral original:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\sec_2\theta d\theta}{(2^2\tan^2\theta)(2\sec\theta)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$

El integrando lo podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\cos^2\theta}{sen^2\theta} = \frac{\cos\theta}{sen^2\theta}$$

La integral queda:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta = \int \frac{\cos\theta}{sen^2\theta}d\theta$$

Realizando la sustitución $u = senx$ y su respectivo diferencial se tiene:

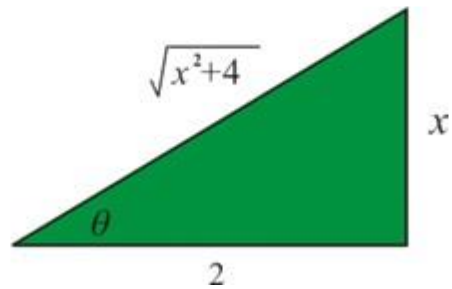
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{sen^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} =$$

Resolviendo

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4sen\theta} + C = -\frac{\csc\theta}{4} + C$$

Emplearemos el triángulo siguiente para identificar los lados y la cosecante del ángulo en cuestión.

$$\csc\theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$$



$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

Estrategias de la integración por medio de tablas integrales

Dado que la integración ofrece más retos que la diferenciación, daremos unos puntos que debes tener en consideración cuando trates de resolver integrales.

Es de mucha ayuda tener tablas de integrales y es muy aconsejable tratar de memorizarlas, por lo menos las fórmulas básicas de integración.

Tablas de fórmulas integrales

La tabla siguiente te será de mucha ayuda a la hora de resolver integrales.

Tabla de fórmulas de integración	
1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ con $(n \neq -1)$	11. $\int \sec x\, dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert$
2. $\int \frac{1}{x} dx = In\lvert x\rvert$	12. $\int \csc x\, dx = \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert$
3. $\int e^x dx = e^x$	13. $\int \tan x\, dx = In\lvert\sec x\rvert$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	14. $\int \cot x\, dx = In \lvert senx \rvert$
5. $\int sen\ x\, dx = -\cos x$	15. $\int senh\ x\, dx = \cosh x$
6. $\int \cos x\, dx = sen\ x$	16. $\int \cosh x\, dx = senh\ x$
7. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x$	17. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$
8. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x$	18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$
9. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x$	19. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
10. $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x$	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert$

Estrategias para integrar

Hemos visto varias técnicas de integración; sin embargo, es necesario tener una estrategia para enfrentar las integrales.

Para resolver una integral, lo primero que tienes que hacer es:

1. Simplificar el integrando en lo posible.
2. Detectar si existe una sustitución obvia.
3. Clasificar el integrando de acuerdo a la forma que tenga, para aplicar los métodos apropiados de integración ya sean:
    a. Integración de funciones trigonométricas
    b. Integración de funciones racionales
    c. Integración por partes
    d. Integración de radicales

4. Intentar de nuevo si no se ha llegado a la respuesta con los primeros pasos, se puede intentar con lo básico, por sustitución o por partes.
    a. Prueba la sustitución
    b. Intenta integrar por partes
    c. Intenta integrar modificando el integrando
    d. Relaciona integrales con problemas resueltos anteriormente, considera que la experiencia es muy importante.
    e. Utiliza varios métodos de integración, a veces no se llega al resultado con un método.

Una manera más eficiente que te ayudará a incrementar tus habilidades para resolver integrales es la experiencia, por lo cual te recomiendo que resuelvas tantos integrales como te sea posible para cada uno de los métodos vistos a lo largo del curso y en especial de esta unidad.

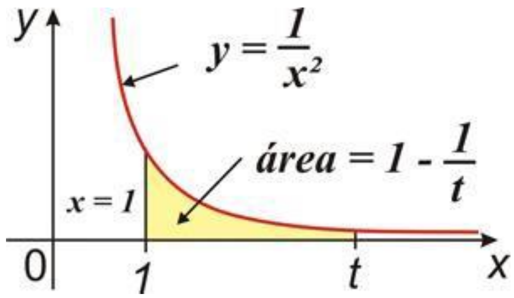
¡Ánimo!, sigue resolviendo muchas integrales.

Integrales impropias

Una ***integral impropia*** es aquella que se encuentra en el caso que está definida en un intervalo infinito y también en el caso donde existe una discontinuidad infinita en $[a, b]$. Estudiemos ambos casos.

Tipo 1. Intervalos infinitos

Consideremos una integral en un intervalo infinito. Por ejemplo, la curva descrita por la función $y = \frac{1}{x^2}$.



La región S está acotada por la función $y = \frac{1}{x^2}$ y el eje x, acotada en el lado izquierdo por la recta vertical $x = 1$ en el lado derecho hasta el infinito. En principio se pensaría que el área S es infinita; sin embargo, esto no es así.

El área de una región acotada por la vertical $x = 1$ y por la recta vertical movible en el eje $x = t$ está dada por:

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Si nos ponemos a hacer cálculo variando t, sin importar qué tan grande sea, notaremos que el área no rebasa el valor de una unidad, por lo tanto, concluimos que $A(t) < 1$.

Observamos también, que si calculamos el límite cuando $t \to \infty$, llegamos a un valor diferente de infinito.

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

El área de la región es igual a uno y esto lo podemos escribir como:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Este ejemplo te dio una noción intuitiva de que el área no es infinita; sin embargo, considera la definición siguiente, la cual te expone tres casos:

Definición de una integral impropia de tipo 1

i) Si te enfrentaras a una integral que existe de la forma $\int_a^t f(x)dx$ para cualquier $t \geq a$, entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

¡Mucho ojo! Siempre y cuando exista el límite como un número finito.

ii) Si te enfrentaras a una integral que existe de la forma $\int_t^b f(x)dx$ para cualquier $t \leq b$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_t f(x)dx$$

¡Mucho ojo! Siempre y cuando exista el límite como un número finito.

Estos dos casos de integrales impropias nos permiten nombrarlas como ***convergentes*** si existe dicho límite y ***divergentes*** si no lo hay.

iii) Si en ambas integrales $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ de los casos anteriores, son divergentes, entonces por definición se tiene la suma de integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

Ejemplo

Determina si la integral es divergente o convergente

$$\int \frac{1}{x}dx$$

Solución

De acuerdo con la definición anterior, la integral se amolda al caso **i.**

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t \to \infty} \ln |x| \Big]_1^t$$
$$= \lim_{t \to \infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \to \infty} \ln t = \infty$$

El valor es infinito, no es un número finito, por lo tanto de la definición podemos concluir que la integral impropia diverge.

Si tuvieses una integral impropia de la forma:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

Será convergente siempre y cuando $p > 1$ y divergente cuando $p \leq 1$.

Tipo 2. Integrandos discontinuos

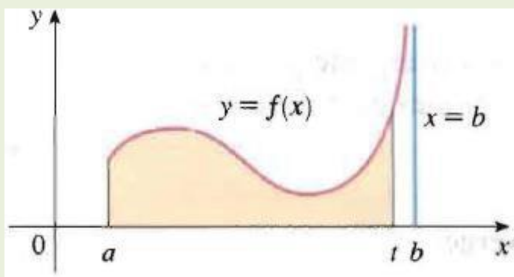
Tenemos abajo una tabla que define las integrales impropias con integrandos discontinuos.

Definición de una integral impropia de tipo 2

i) Si te enfrentaras a una integral cuya *f* es continua en $[a, b)$ y discontinua en b.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

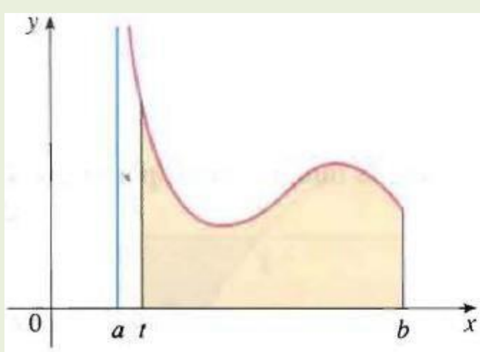
¡Mucho ojo! Siempre y cuando exista el límite como un número finito.



ii) Si te enfrentaras a una integral cuya *f* es continua en $(a, b]$ y discontinua en a.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

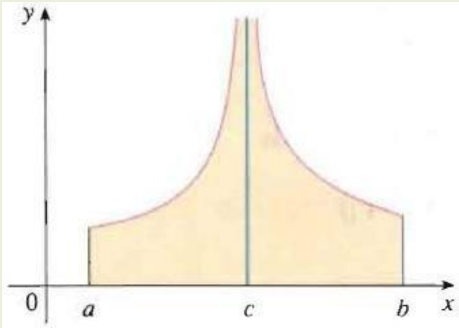
¡Mucho ojo! Siempre y cuando exista el límite como un número finito.



Estos dos casos de integrales impropias nos permiten llamarlas como ***convergentes*** si existe dicho límite y ***divergentes*** si no lo hay.

iii) Si tienes una discontinuidad en c que está entre los intervalos a y b , y además son convergentes las integrales $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$, por definición tendrás:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

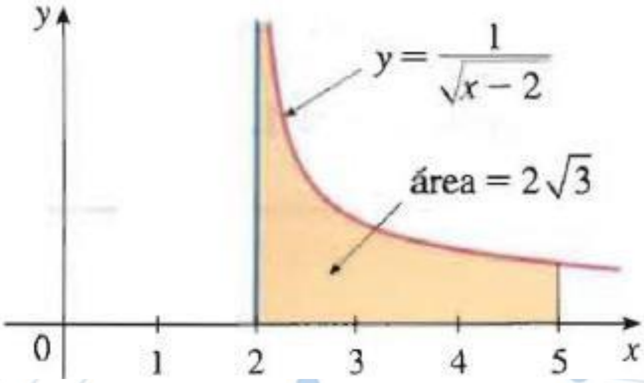


Ejemplo

Determina la integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$

Solución

La gráfica de la función es la siguiente.



Observa y veras que tiene una asíntota vertical en $x = 2$. La discontinuidad es infinita marcada en $x = 2$. De la definición ii) de esta sección, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t \to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\
&= \lim_{t \to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]^5 \\
&= \lim_{t \to 2^+} 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{t-2}\right) \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, podemos concluir que se trata de una integral impropia convergente. El área es región sombreada de la región.

Consideraciones específicas de la unidad

En esta sección requerimos el siguiente material:

- Calculadora.
- Tablas de integración. Existen libros en las bibliotecas que podrías utilizar o bien adquirir las tablas de Internet. Te aconsejamos que lleves contigo las tablas para evaluar las integrales.
- Es necesario que repases las fórmulas para encontrar áreas a figuras geométricas planas y volumétricas comunes.

Es necesario que tengas conocimientos sobre:

- Álgebra
- Geometría analítica
- Cálculo diferencial
- Propiedades y reglas de las operaciones de sumatorias.

Fuentes de consulta

Básica

Apostol, T. M. (2008). *Calculus*. España: Reverté.

Larson, R. E. (2005). *Cálculo*. México: Mc Graw Hill.

Leithold, L. (2009). *El Cálculo.* México: Oxford University Press.

Stewart, James. (2008). *Cálculo. Trascendentes tempranas.* México: Cengage Learning.