Matemáticas Administrativas

Unidad 4. Calculo diferencial e integral

División de Ciencias Sociales y Administrativas

Presentación

En la presente unidad se estudiarán los conceptos y reglas de derivación, lo que ayudará en la solución de problemas de optimización de utilidades y su impacto en las funciones de ingreso y costo total, asimismo se verá la aplicación e interpretación de la derivada en el análisis marginal y su definición como la razón o tasa promedio e instantánea de cambio, así como su aplicación en los conceptos de elasticidad de demanda.

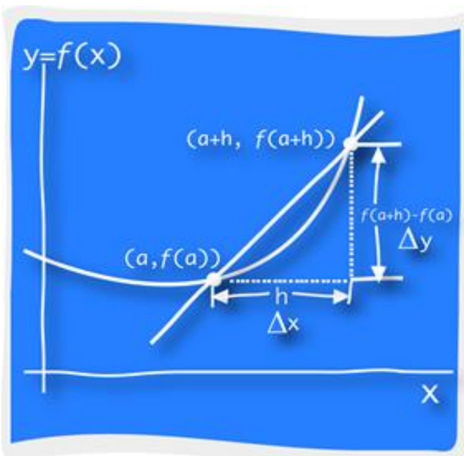
Estudiarás la diferencial cuyo significado se encuentra implícito dentro de la derivada y revisarás la importancia del cálculo integral como una forma de llegar a la función original si sólo se cuenta con la derivada y su importancia en el análisis marginal y en las áreas económico-administrativas

Competencias especificas

- Aplica el cálculo diferencial para la solución de problemas de límites y continuidad de una función y determinar su impacto a través de fórmulas y conceptos del cálculo diferencial integral y su aplicación en las matemáticas financieras.

- Aplica los elementos de los diferentes métodos de integración y las funciones de las matemáticas financieras para el planteamiento y resolución de problemas de utilidad, asignación y agotamiento de recursos e inventarios, mediante el uso de las fórmulas y conceptos del cálculo integral.

4.1. La derivada



El modelado de los procesos económico-administrativos está asociado a la identificación del valor que optimiza a una función, esto es, que si se trata de un problema de costos se requiere conocer el costo mínimo y el valor para el que se produce, así como para ingresos y utilidades es de interés saber cómo se alcanzan los valores máximos que se pueden tener a partir de una producción o venta, ya sea de un producto o servicio.

Así es como se ve la importancia de la derivada dentro de los problemas de optimización y sus aplicaciones en las situaciones de oferta, demanda, elasticidad y productividad.

4.1.1. Conceptos, fórmulas y reglas de derivación

La derivada

Es la representación del cambio infinitesimal de una función a medida que va cambiando el valor de la variable independiente, así, la derivada de una función ***f(x)*** se representa como ***f'(x)***, que se lee: ***f prima*** y se define para cualquier función f(x) de la siguiente manera:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En donde:

1. ***Δx*** y ***Δy***: incrementos de las variables ***x, y***, respectivamente.
2. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ **,** representa a ***la razón o tasa promedio de cambio*** de ***y*** con respecto a x en el intervalo (x_1, x_2), esto es que tanto varía el valor de ***y*** por cada unidad de cambio en ***x***.
3. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ **,** se interpreta como la ***razón o tasa instantánea de cambio*** de ***y*** con respecto a ***x***, en el punto x_1

De manera práctica la notación para la derivada es: $\frac{dy}{dx}$ que se lee: *la derivada de* ***y*** *con respecto a* ***x***.

Reglas y fórmulas de derivación

Al igual que con los límites existen fórmulas y reglas que permiten calcular las derivadas de funciones algebraicas, para lo cual se presenta a continuación un formulario en el que se deberá tomar en cuenta que:

1. **u, v, w**: son funciones cuya variable independiente es **x**
2. **a, b, c, n**: son números constantes
3. **e**: 2.71828...
4. **Ln u**: es el logaritmo natural de u, en donde u > 0.

Fórmulas y reglas de derivación

1 $$\frac{d(c)}{dx} = 0$$

2 $$\frac{d(cx)}{dx} = c$$

3 $$\frac{d(cx^n)}{dx} = ncx^{n-1}$$

4 $$\frac{d(u \pm v \pm w \pm \cdots)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots$$

5 $$\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}$$

6 $$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

7 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

8 $$\frac{d(uvw)}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

9 $$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

10 $$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

11 $$\frac{dLn\,u}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

12 $$\frac{d\,a^u}{dx} = a^u Ln\,a\,\frac{du}{dx}$$

13 $$\frac{d\,e^u}{dx} = e^u\frac{du}{dx}$$

14 $$\frac{d\,u^v}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v Ln\,u\,\frac{dv}{dx}$$

De las derivadas

A continuación se resuelven las derivadas de algunas funciones utilizando las fórmulas y reglas de derivación:

1

Sea la f(x) = 4, ¿cuál será su derivada?

Solución: Se tiene que para una función constante se utiliza la fórmula 1:

$$\frac{d(c)}{dx} = 0$$

en donde para este caso: **c = 4**, por lo que sustituyendo se tiene que:

$$\frac{d(4)}{dx} = 0 \qquad ó \qquad f'(x) = 0$$

2

Determine la derivada de: f(x) = x^5

Solución: De acuerdo con la regla de derivación 3: $\frac{d(cx^n)}{dx} = ncx^{n-1}$

se tiene que para este caso: **c = 1,x = x, n = 5**

por lo que:

$$\frac{d(1x^5)}{dx} = \frac{d(x^5)}{dx} = 5(1)x^{5-1}$$

$$5x^4$$

ó

$$f'(x) = 5x^4$$

3

Sea la función $h(x) = 4x^6 + 5x^4 - 7x^3 - x + 12$, determine su derivada:

Solución: Aplicando la regla 4 de derivación, se tiene que:

$$\frac{d(u \pm v \pm w \pm \cdots)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots$$

En donde:
u = 4x⁶ **v = 5x⁴** **w = -7x³** **y = -x** **z = 12**

para las cuáles aplican las siguiente reglas:

$$\frac{d(c)}{dx} = 0 \qquad \frac{d(cx)}{dx} = c \qquad \frac{d(cx^n)}{dx} = ncx^{n-1}$$

Por lo que se tiene que la derivada de la función h(x) es:

$$h'(x) = (6)(4)x^{6-1} + (4)(5)x^{4-1} - (3)(7)x^{3-1} - (1)(1)x^{1-1} + 0$$

$$\boldsymbol{h'(x) = 24x^5 + 20x^3 - 21x^2 - 1}$$

4

¿Cuál es la derivada de la función $g(x) = \frac{x^3-2x}{-3x^2+5}$?

Solución: Para este caso la fórmula que se aplica es:

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

Para la que en este caso: **u = x^3 – 2x** **v = -3x^2 + 5**

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 2 \qquad \frac{dv}{dx} - 6x \qquad v^2 = \left(-3x^2+5\right)^2$$

Así, sustituyendo en la fórmula, la derivada de la función g(x) con respecto a x: g'(x), queda:

$$g'(x) = \frac{(-3x^2+5)(3x^2-2) - (x^3-2x)6x}{(-3x^2+5)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-9x^4 + 6x^2 + 15x^2 - 10 - 6x^4 + 12x^2}{(-3x^2+5)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-15x^4 + 33x^2 - 10}{(-3x^2+5)^2}$$

5

Determina la derivada de la función: $f(x) = \sqrt[4]{x^6}$

Solución: En este caso en particular, lo conveniente es plantear la función de la siguiente manera:

$$f(x) = x^{6/4}$$

Para la cual aplica la fórmula:

$$\frac{d(cx^n)}{dx} = ncx^{n-1}$$

En este caso:

c = 1 **x = x** **n = 6/4**

Así, se tiene que:

$$f'(x) = (1)\left(\frac{6}{4}\right)x^{\frac{6}{4}-1}$$

$$= \frac{6}{4}x^{1/2}$$

Regla de la cadena

Es aplicada cuando se tiene una función dentro de una función elevada a una potencia, sea la siguiente función:

$$f(x) = \left(2x^2 - 3x + 2\right)^3$$

La fórmula general de la regla de la cadena dice que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Sin embargo, una manera más fácil de interpretarla es mediante el siguiente enunciado:

Calcular la derivada de la función en el interior del paréntesis y multiplicarla por la derivada del exterior.

Es decir, si se toma en cuenta la función mostrada en el ejemplo, se tiene que:

$$2x^2 - 3x + 2$$

Representa a la función en el interior del paréntesis y cuya derivada es:

$4x - 3$	Que corresponde a la **derivada del interior**

Ahora bien, con respecto a la **derivada del exterior**, se refiere al exponente fuera del paréntesis que encierra a la función, así, se tomaría como función exterior a:

Y considerando a la función dentro del paréntesis como si fuera una sola variable, así se tiene que la derivada del exterior estaría dada de la siguiente manera:	$3(2x^2 - 3x + 2)^{3-1} = 3(2x^2 - 3x + 2)^2$

Finalmente, siguiendo el enunciado que dice que hay que **multiplicar la derivada del interior por la derivada del exterior**, se tiene que la derivada de:

$$f(x) = \left(2x^2 - 3x + 2\right)^3$$

Será

$$f'(x) = (4x - 3)(3)\left(2x^2 - 3x + 2\right)^2$$

$$\boldsymbol{f'(x) = (12x - 9)(2x^2 - 3x + 2)^2}$$

4.1.2. Razón o tasa promedio e instantánea de cambio e incertidumbre

Como se vio anteriormente, la **razón o tasa promedio de cambio** se define como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Considerando que la oferta **"O"** de un determinado artículo en función del precio **"p"** sigue la siguiente función:

$$O(p) = 7p^2$$

Determine ¿cuál será la razón promedio de cambio en la oferta cuando el precio varía de p = 10 a p = 11?

Solución: De acuerdo a la definición de razón o tasa promedio de cambio, se tiene que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{O(11) - O(10)}{11 - 10}$$

$$= \frac{[7(11)^2] - [7(10)^2]}{11 - 10}$$

$$= \frac{847 - 700}{1}$$

$$\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x} = 147}$$

Asimismo, la razón o tasa instantánea de cambio se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Tomando en cuenta los datos del problema anterior, determine ¿cuál será la razón de cambio en la oferta con respecto al precio de venta, cuando p = 10 (cambio instantáneo)?

Solución: De acuerdo con la definición de razón o tasa cambio instantánea, se tiene que calcular la derivada de la función de oferta:

$$O(x) = 7p^2$$

$$O'(x) = 14p$$

Por lo que cuando el precio de venta es: p = 10, la razón de cambio instantáneo será:

$$O'(10) = 14(10) = 140$$

Es decir que, cuando el precio es de 10, la oferta cambia en 140 unidades cuando el precio cambia una unidad.

4.1.3. Derivadas de orden superior

Hasta ahora se ha calculado la primera derivada de una función, sin embargo, también es posible, siempre que no se llegue a un valor de cero, obtener la segunda, tercera, cuarta, quinta,… y n-sima derivada de una función.

La primera derivada se representa o denota como:	$f'(x)$ o $\frac{dy}{dx}$
La segunda derivada se representa o denota como:	$f''(x)$ $\frac{d^2y}{dx}$
La tercera derivada se representa o denota como:	$f'''(x)$ $\frac{d^3y}{dx}$

Y así sucesivamente hasta llegar a la n-sima derivada de una función.

Determine la tercera derivada de la:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 3$$

Solución: La primera derivada estará dada por:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x$$

Así, la segunda derivada será

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 2$$

4.1.4. Análisis marginal: ingreso, costo y utilidad marginal

Ingreso marginal

Describe cómo se ven afectados los ingresos por cada unidad nueva que se produce y se vende, y se determina como la derivada de la función de ingresos, lo que representa una aproximación del ingreso real cuando se vende una unidad más de cierto producto o servicio.

Así, considerando que $I(x)$ representa a los ingresos obtenidos al vender ***x*** número de artículos, el ingreso marginal muestra cuál será el ingreso que se obtiene al vender el artículo ***x + 1***, esto es:

$$I(x+1)-I(x)$$

Es decir, los ingresos de venta de ***x*** número de artículos incrementada en 1, menos los ingresos de la venta de ***x*** artículos.

Finalmente, cómo se considra el incremento de unidades de artículos, esto es: $\Delta x = 1$ lo que implica una razón de cambio de los ingresos cuando aumenta la producción en una unidad; es decir:

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = I(x+1)-I(x)$$

Lo que corresponde a la derivada de la función de ingreso, la cual representa al **ingreso marginal.**

$$I'(x) \approx I(x+1)-I(x)$$

Una compañía turística tiene un ingreso mensual en la venta de sus paquetes regionales representado por la siguiente función:

$I(x) = 45000x - 5.7x^2$ Pesos cuando produce y vende x unidades por mes.

Hasta el día de hoy, la compañía ofrece 20 paquetes vacacionales, sin embargo, planea aumentar a 21 el número de paquetes que ofrece. ¿Cuál será el ingreso que generará la implementación y venta del paquete vacacional número 21?

Solución: Para calcular el ingreso adicional que genera la implementación y venta del paquete turístico número 21, con la función de ingreso marginal que es la derivada de la función de ingreso, se tiene que:

$$I'(x) = 45000 - 11.4x$$

Y para el caso particular del paquete número 20, se obtiene que:

$$I'(20) = 45000 - 11.4(20)$$
$$= 45000 - 228$$
$$= 44{,}772.00 \; pesos$$

Este valor sería una aproximación al ingreso que generaría por incorporar en sus paquetes turísticos regionales el paquete 21.

Sin embargo, si se desea conocer cuál sería el ingreso exacto al incorporar y vender el paquete 21, se tiene que:

$$I(x+1) - I(x) = 45000(x+1) - 5.7(x+1)^2 - (45000x - 5.7x^2)$$
$$= 45000x + 45000 - 5.7(x^2 + 2x + 1) - 45000x + 5.7x^2$$
$$= \cancel{45000x} + 45000 - \cancel{5.7x^2} - 11.4x - 5.7 - \cancel{45000x} + \cancel{5.7x^2}$$
$$= 45000 - 11.4x - 5.7$$
$$= \mathbf{45005.7 - 11.4}\boldsymbol{x}$$

Ya que dentro de esta operación ya está incorporado el paquete 21, en (x + 1), entonces se sustituye x por 20 en la expresión encontrada:

$$I(20+1) - I(20) = 45005.7 - 11.4x$$

$$I(21) - I(20) = 45005.7 - 11.4(20)$$

$$= \mathbf{44777.7}\ \boldsymbol{pesos}$$

Que representaría el ingreso exacto al incorporar y vender el paquete 21 en la lista de paquetes turísticos regionales en la compañía turística.

Costo marginal

Es la derivada de la función de costo: el valor que se obtiene es una aproximación al costo verdadero cuando se produce o genera una unidad más de cierto producto o servicio.

Así, si se requiere saber el costo que implica el producir ***x*** unidades de un artículo más una unidad, es recomendable recurrir a la derivada del costo y de manera similar al ingreso marginal se tiene que para los costos marginales se cumple:

$$\boldsymbol{C'(x) \approx C(x+1) - C(x)}$$

Los costos de producción de x tarjetas de felicitación en una imprenta se representan por la siguiente función:

$$C(x) = 20000 + 12x + 0.5x^2 + 0.0005x^3 \quad \text{Pesos}$$

Determina cómo será el costo de producir 200 tarjetas con respecto a la producción de una tarjeta más.

Solución: Primero se determinará la función de costo marginal: $C'(x) = 12 + x + 0.0015x^2$

De acuerdo a esto, se tiene que el costo aproximado de producir 201 tarjetas de felicitación será de:

$$C'(200) = 12 + 200 + 0.0015(200)^2$$

$$\boldsymbol{C'(200) = 272\ pesos}$$

Ahora bien, ya que se requiere conocer cómo es el costo aproximado con respecto al real, se tiene que:

$$C(x+1) - C(x) = [20000 + 12(x+1) + 0.5(x+1)^2 + 0.0005(x+1)^3] - [20000 + 12x + 0.5x^2 + 0.0005x^3]$$

$$= [20000 + 12x + 12 + 0.5(x^2 + 2x + 1) + 0.0005(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)] - [20000 + 12x + 0.5x^2 + 0.0005x^3]$$

$$= 20000 + 12x + 12 + 0.5x^2 + x + 0.5 + 0.0005x^3 + 0.0015x^2 + 0.0015x + 0.0005 - 20000 - 12x - 0.5x^2 - 0.0005x^3$$

$$= 12.5005 + 1.0015x + 0.0015x^2$$

Sustituyendo ahora el valor de x = 200, para así obtener el costo de producción de 201 tarjetas de felicitación:

$$C(200+1) - C(200) = 12.5005 + 1.0015(200) + 0.0015(200)^2$$
$$C(201) - C(200) = 12.5005 + 200.3 + 60$$
$$\boldsymbol{C(201) - C(200) = 272.8005\ esos}$$

Con lo que se observa que la diferencia entre el costo exacto y el costo marginal es mínima: 0.8005 pesos, así se puede concluir que con el costo marginal también se obtienen resultados confiables al igual que con la fórmula de ingreso marginal.

Costo promedio o medio marginal

Es la derivada de la función de costo promedio: el valor que se obtiene es una medida de la razón de cambio de la función de costo promedio en función del número de unidades o servicios producidos/ vendidos.

$$\boldsymbol{C_m'(x) = \frac{C(x)}{x}}$$

El costo total de producción mensual de x número de taparroscas para envases de agua embotellada está dado por:

$$C(x) = 500000 + 25x + 0.85x^2$$ Pesos

Determine cómo será el costo de producir la unidad 1001 de taparroscas si actualmente se producen 1000 tapas por mes.

Solución: Primero se determinará la función de costo promedio:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{500000}{x} + \frac{25x}{x} + \frac{0.85x^2}{x}$$

$$C_m(x) = \frac{500000}{x} + 25 + 0.85x$$

A continuación se obtiene la función de costo promedio marginal, derivando la función de costo promedio:

$$C_m(x) = 500000x^{-1} + 25 + 0.85x$$

$$C'_m(x) = (-1)500000x^{-1-1} + (1)0.85x^{1-1}$$

$$C'_m(x) = -500000x^{-2} + 0.85$$

$$C'_m(x) = \frac{-500000}{x^2} + 0.85$$

De acuerdo a esto, se tiene que el costo aproximado de producir 1001 de taparroscas será de:

$$C'_m(1000) = \frac{-500000}{1000^2} + 0.85$$

$$C'(1000) = 0.35 \; pesos\ promedio\ por\ taparrosca.$$

Utilidad marginal

Es la derivada de la función de utilidad $U'(x)$ y es una aproximación a la utilidad obtenida de la producción y venta de una unidad más de cierto producto o servicio.

Así, si se requiere saber cuáles son las utilidades que generará el producir x unidades de un artículo más una unidad, es recomendable recurrir a la derivada de las utilidades, con lo que se demuestra que:

$$U'(x) \approx U(x+1) - U(x)$$

En una fábrica se determinó que cuando se producen x número de artículos, se tenía que:

$$C(x) = 120000 + 8x + 0.3x^2$$ Miles de pesos

Y que cada artículo vendido generaba ingresos de $10.00 pesos.

Determine las utilidades que se generarán si se producen y venden 100 unidades.

Solución: Primero se determinará la función de utilidad, si se sabe que:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

En donde para este caso:

$$I(x) = 10x$$

$$C(x) = 120000 + 8x + 0.3x^2$$

Miles de pesos

Se tiene que:

$$U(x) = 10x - [120000 + 8x + 0.33x^2]$$

$$U(x) = 10x - 120000 - 8x - 0.33x^2$$

$$\boldsymbol{U(x) = 2x - 120000 - 0.33x^2}$$

Por lo que la utilidad marginal será:

$$U'(x) = 2(1)x^{1-1} - 120000 - (2)0.33x^{2-1}$$

$$\boldsymbol{U'(x) = 2 - 0.66x}$$

De acuerdo a esto, se tiene que las utilidades generadas aproximadamente al producir 100 artículos serán de:

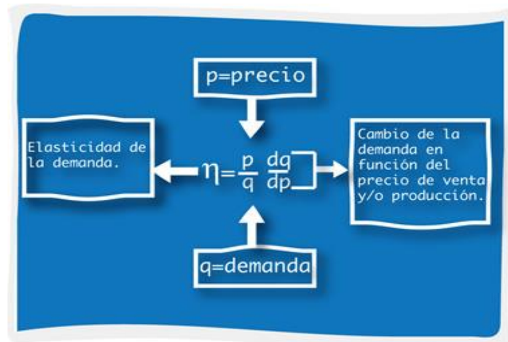
$$\boldsymbol{U'(99) = 2 - 0.66(99)}$$

$$\boldsymbol{C'^{(200)} = -63.34\ miles\ de\ pesos}$$

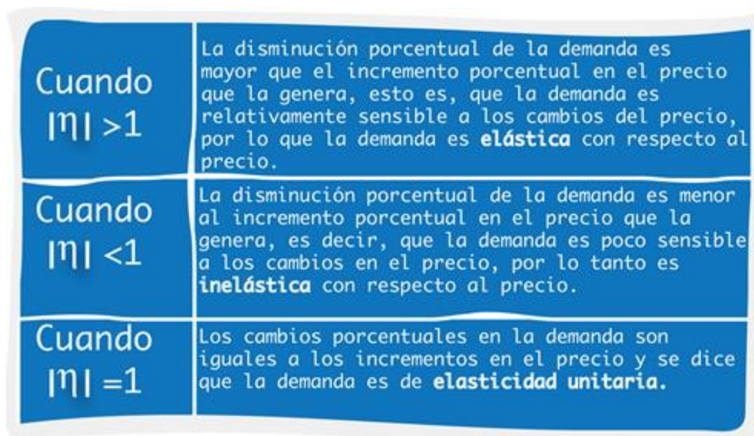
Lo que significa que se tienen -63.34 miles de pesos de pérdidas en este proceso

4.1.5. Elasticidad de la demanda y niveles de elasticidad

La elasticidad de la demanda, η, es una aproximación del cambio porcentual de la demanda y es originado por un incremento del 1% en el precio y está representada por la siguiente fórmula:



Y se interpreta de la siguiente manera:



Cuando $\lvert \eta \rvert > 1$	La disminución porcentual de la demanda es mayor que el incremento porcentual en el precio que la genera, esto es, que la demanda es relativamente sensible a los cambios del precio, por lo que la demanda es **elástica** con respecto al precio.
Cuando $\lvert \eta \rvert < 1$	La disminución porcentual de la demanda es menor al incremento porcentual en el precio que la genera, es decir, que la demanda es poco sensible a los cambios en el precio, por lo tanto es **inelástica** con respecto al precio.
Cuando $\lvert \eta \rvert = 1$	Los cambios porcentuales en la demanda son iguales a los incrementos en el precio y se dice que la demanda es de **elasticidad unitaria.**

Si la demanda y el precio de ciertos envases de plástico están representados por:

$$q = 930 - 5p$$

Para $0 \leq p \leq$, determine el punto de elasticidad de la demanda en que es elástica la demanda, en función de los precios de los envases de plástico.

Solución: Se sabe que:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

En donde para este caso en particular

$$\frac{dq}{dp} = -5$$

Así, la elasticidad de la demanda será:

$$\eta = \frac{p}{930 - 5p}(-5)$$

$$\eta = \frac{-5p}{930 - 5p}$$

Ahora bien, la demanda de los envases será elástica si:

$$\left|\frac{-5p}{930 - 5p}\right| > 1$$

$$\frac{5p}{930 - 5p} > 1$$

$$5p > 930 - 5p$$

$$5p + 5p > 930$$

$$10p > 930$$

$$p > \frac{930}{10}$$

$$p > 93$$

Por lo que la demanda será elástica cuando el precio sea superior a 93.

4.1.6. Cálculo de máximos y mínimos

Generalmente en nuestra vida estamos buscando formas para resolver problemas. Las matemáticas y en particular el cálculo diferencial nos ayudan a encontrar las respuestas que estamos buscando.

Entre los valores que puede tener una función *(y)* puede haber uno que sea el más grande y otro que pueda ser más pequeño. A esto valores se le pueden llamar punto máximo y punto mínimo.

4.2. Funciones crecientes y decrecientes

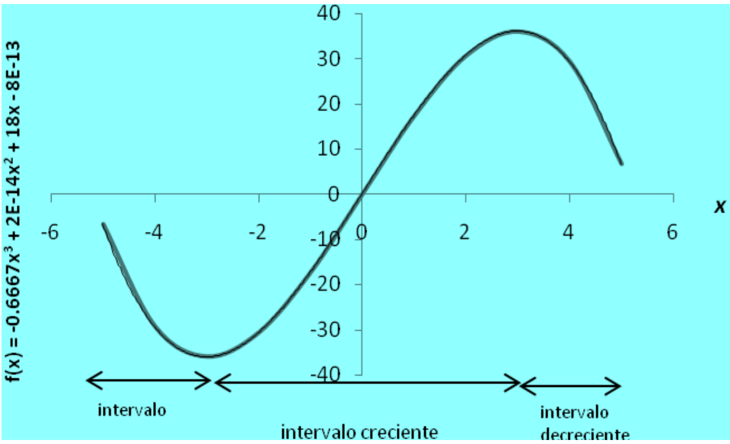
Una función es creciente en el intervalo I, si para dos números x1, x2 cualesquiera en I, tales que x1 < x2, se tiene que:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Una función es decreciente en el intervalo ***I***, si para dos números x_1, x_2 cualesquiera en ***I***, tales que $x_1 < x_2$, se tiene que:

$$f(x_1) > f(x_2).$$

A continuación se muestra gráficamente cómo decrece y crece una función:



4.2.1. Criterio de la primera y segunda derivada

Los criterios de la primera y segunda derivada ayudan a determinar el comportamiento de una función mediante un cálculo exacto y analítico.

Criterio de la primera derivada

1.- Si $f^{1}(x)>0$ cuando $a<x<b$, entonces f es una función creciente en $a<x<b$.

2.- Si $f^{1}(x)<0$ cuando $a<x<b$, entonces f es una función decreciente en $a<x<b$.

3.- Si $f^{1}(x)=0$ cuando $a<x<b$, entonces f es una función constante en $a<x<b$.

Los **pasos a seguir** para evaluar una función con el criterio de la primera derivada son:

1. Obtener la derivada de la función.

2. Determinar los valores críticos, esto es, los valores de ***x*** en la derivada de la función cuando:

$$f'(x) = 0$$

3. Se marcan los valores críticos en la recta numérica y se escoge un valor cualquiera entre cada intervalo y se sustituye el valor seleccionado en la derivada, con lo que se determinará el signo de la derivada en esos puntos. Esto se realiza en los intervalos antes y después del valor crítico.

4. De acuerdo a los signos obtenidos al evaluar la derivada en cada intervalo, se aplica el siguiente criterio:

- ❑ Si los signos son (+)(-), se tiene un máximo local.
- ❑ Si los signos son (-)(-), se tiene un mínimo local.
- ❑ Si los signos son (+)(+) o (-)(-), no hay extremo local.

Considerando el criterio de la primera derivada, determine los intervalos en donde la función: $f(x) = 2x^3 - 4x$ es creciente o decreciente.

Solución: Aplicando el criterio de la primera derivada se tiene lo siguiente:

Calculado la primera derivada de la función: $f'(x) = 6x^2 - 4$

Igualando a cero la derivada de la función:

$$0 = 6x^2 - 4$$

$$4 = 6x^2$$

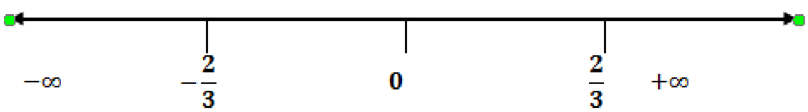
$$\frac{4}{6} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{4}{6}} = \sqrt{x^2}$$

$$x = \pm\frac{4}{6}$$

$$x = \pm\frac{2}{3} \text{ valores críticos}$$

Que son las raíces o valores de ***x***, con lo que se puede observar que los intervalos establecidos para ***x*** en la derivada serán (**valores críticos en la recta numérica):**



Ahora bien, evaluando la derivada de la función en los intervalos establecidos, esto es: para los valores entre $\frac{2}{3}, \infty$ **,** como por ejemplo 1, entonces se tiene que la derivada de la función en ese punto dará:

$$f'(1) = 6(1)^2 - 4$$

$$f'(1) = 2$$

Y como $f'(1) > 0$ entonces la función es creciente en $(\frac{2}{3}, +\infty)$

$-\frac{2}{3}, -\infty$

$$f'(-1) = 6(-1)^2 - 4$$

$$\boldsymbol{f'(-1) = 2}$$

Y como $f'(-1) > 0$ entonces la función es creciente en

para los valores entre $(-\frac{2}{3}, -\infty)$, como por ejemplo 1, entonces se tiene que la derivada de la función en ese punto dará:

para x = 0, se tiene que la derivada de la función en ese punto dará:

$$f'(0) = 6(0)^2 - 4$$

$$\boldsymbol{f'(0) = -4}$$

Y como $f'(0) < 0$ entonces la función es decreciente en $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

Es decir, que si se aplica el criterio de la primera derivada para determinar si hay extremos locales, se tiene:

Criterio de la segunda derivada

1.- Si $f^{11}(x)>0$ cuando $a<x<b$, entonces f es una función cóncava hacia arriba en $a<x<b$.

2.- Si $f^{11}(x)<0$ cuando $a<x<b$, entonces f es una función cóncava hacia abajo en $a<x<b$.

Los pasos a seguir para evaluar una función con el criterio de la segunda derivada son:

1. Obtener la segunda derivada de la función.

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2$$

2. Determinar los puntos de inflexión, esto es, los valores de x en la segunda derivada de la función cuando es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

3. Se marcan los puntos de inflexión en la recta numérica y se escoge un valor cualquiera entre cada intervalo y se sustituye el valor seleccionado en la segunda derivada, con lo que se determinará el signo de la segunda derivada en esos puntos. Esto se realiza en los intervalos antes y después de los puntos de inflexión.

4. De acuerdo a los signos obtenidos al evaluar la derivada en cada intervalo, se aplica el siguiente criterio:

- Si $f''(x) > 0$, entonces la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

- Si $f''(x) < 0$, entonces la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Considerando el criterio de la segunda derivada, determine los intervalos en donde la función: $f(x) = 2x^3 - 12x^2$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Solución: Aplicando el criterio de la segunda derivada, se tiene lo siguiente:

Calculado hasta la segunda derivada de la función:

$$f'(x) = 6x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 12x - 24$$

Igualando a cero la segunda derivada de la función:

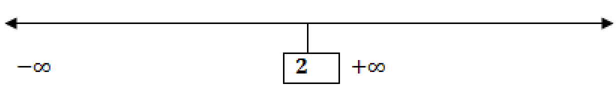
$$0 = 12x - 24$$

$$24 = 12x$$

$$\frac{24}{12} = x$$

$$x = 2 \text{ que es el punto de inflexión}$$

Que son las raíces o valores de x, con lo que se puede observar que los intervalos establecidos para x en la derivada serán (puntos de inflexión en la recta numérica):



Ahora bien, evaluando la derivada de la función en los intervalos establecidos, esto es: para los valores entre $2, \infty$ como por ejemplo 5, entonces se tiene que la segunda derivada de la función en ese punto dará:

$$f''(5) = 12(5) - 24$$

$$f''(5) = 36$$,

Y como $f''(5) > 0$ entonces la función es cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$

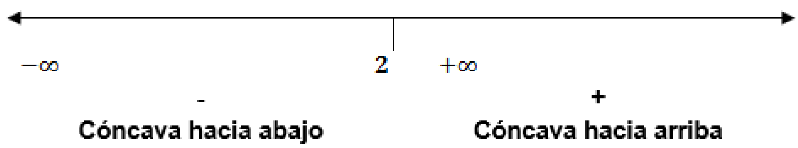
Para los valores entre $-2, -\infty$ como por ejemplo – 5, entonces se tiene que la derivada de la función en ese punto dará:

$$f''(-5) = 12(-5) - 24$$

$$f''(5) = -84$$

Y como $f'(-5) > 0$ entonces la función es cóncava hacia abajo en $(-2, -\infty)$

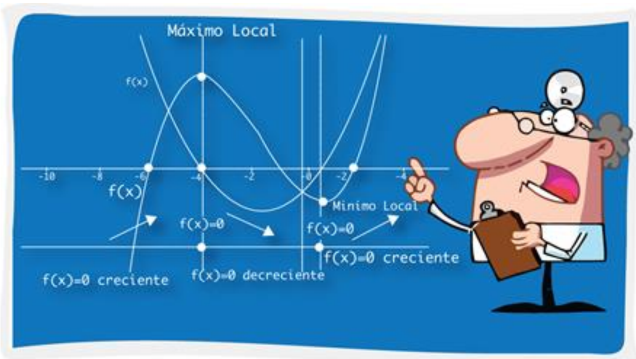
Es decir, que si se aplica el criterio de la segunda derivada para determinar la concavidad de la función, se tiene:



Finalmente se puede resumir que para el uso de los criterios de la primera y segunda derivada, es más práctico llenar la siguiente tabla guía:

Intervalos	Signo de $f'(x)$	Función creciente (C) o decreciente (D)	Intervalos	Signo de $f''(x)$	Función cóncava hacia arriba(CA) o cóncava hacia abajo (CAB)
Valores Críticos			Puntos de inflexión		

4.2.2. Interpretación del concepto de ingreso y costo marginal



Dentro de la práctica profesional en las áreas económico-administrativas, es muy importante la determinación de maximización de la ganancia o la utilidad, así como el minimizar los costos de venta y producción, esto es, en general, optimizar los recursos de la empresa, es decir, maximizar los beneficios y minimizar los costos.

Al maximizar el beneficio en cualquier empresa, se puede lograr lo siguiente:

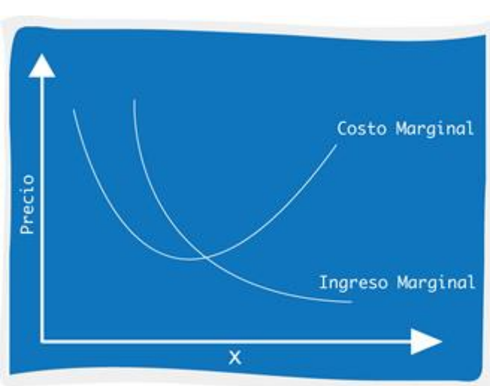
1.- Maximizar los ingresos, vendiendo el mayor número de productos o servicios con un nivel de costos constante.

2.- Maximizar los ingresos, reduciendo los costos.

3.- Minimizar los costos y mantener sin variación el nivel de ventas de manera que el ingreso no se vea afectado.

Ahora bien, para determinar el valor máximo en una función se requiere la primera derivada de la función, al igual que se requiere obtener la segunda derivada para determinar el comportamiento de dicha función, esto es, que si se habla de utilidades U(x), ingresos I(x) y costos C(x), entonces se está trabajando con los valores marginales de las funciones, los cuales se muestran representados a continuación.

En esta gráfica se observa que:



La utilidad máxima se obtiene cuando $C'(x) = I'(x)$ bien cuando $I''(x) < C''(x)$

Se puede observar que los valores marginales de una función son muy útiles, no sólo para conocer los niveles de utilidad, sino para determinar el impacto de las utilidades cuando se presentan variaciones en los insumos.

4.2.3. Aplicación de la función de ingresos, beneficios y costos en problemas de maximización

Una empresa en servicio de telefonía pretende incrementar sus ventas promocionando sus servicios por televisión, para lo cual realizó varios estudios para determinar los costos que dicha publicidad le generará y obtuvieron las siguientes funciones de costo por publicidad y de demanda de servicios de telefonía:

$$C(x) = 1700 + 65x - 0.0005x^2 \text{ miles de pesos}$$

$$p(x) = 35 - \frac{x}{10000} \text{ miles de pesos}$$

En donde:

C(x) = costos por servicio de telefonía en función de los costos de publicidad.

p(x) = precio por servicio de telefonía que se presta.

x = número de servicios de telefonía.

Determine la cantidad de servicios que se requiere vender para maximizar la ganancia.

Solución: Considerando la función de demanda, se puede obtener la función de ingresos de la empresa, recordando que: $I(x) = xp(x)$

Por lo que para este caso en particular los ingresos serán:

$$I(x) = x\left(35 - \frac{x}{10000}\right)$$

$$I(x) = 35x - \frac{x^2}{10000}$$

Ahora bien, para obtener la máxima ganancia, se requiere de los valores marginales tanto de los ingresos como de los costos, así para el ingreso marginal se tiene:

$$I'(x) = 35 - \frac{x}{5000}$$

Y para el costo marginal:

$$C'(x) = 65 - 0.001x$$

Y ya que para maximizar la ganancia se requiere que el ingreso marginal sea igual al costo marginal:

$$35 - \frac{x}{5000} = 65 - 0.001x$$

Y aplicando los criterios de derivada para obtener los valores máximos, se comienza por despejar el valor de x de la ecuación que quedó arriba:

$$0.001x - \frac{x}{5000} = 65 - 35$$

$$0.001x - \frac{x}{5000} = 30$$

$$x\left(0.001 - \frac{1}{5000}\right) = 30$$

$$x\left(0.001 - \frac{1}{5000}\right) = 30$$

$$x(0.0008) = 30$$

$$x = \frac{30}{0.0008}$$

$$\boldsymbol{x = 37500}$$

Comprobando que se obtiene un máximo, se calcula la segunda derivada tanto de los ingresos como de los costos:

$$I''(x) = -\frac{1}{5000} = \mathbf{-0.0002}$$

$$C''(x) = \mathbf{-0.001}$$

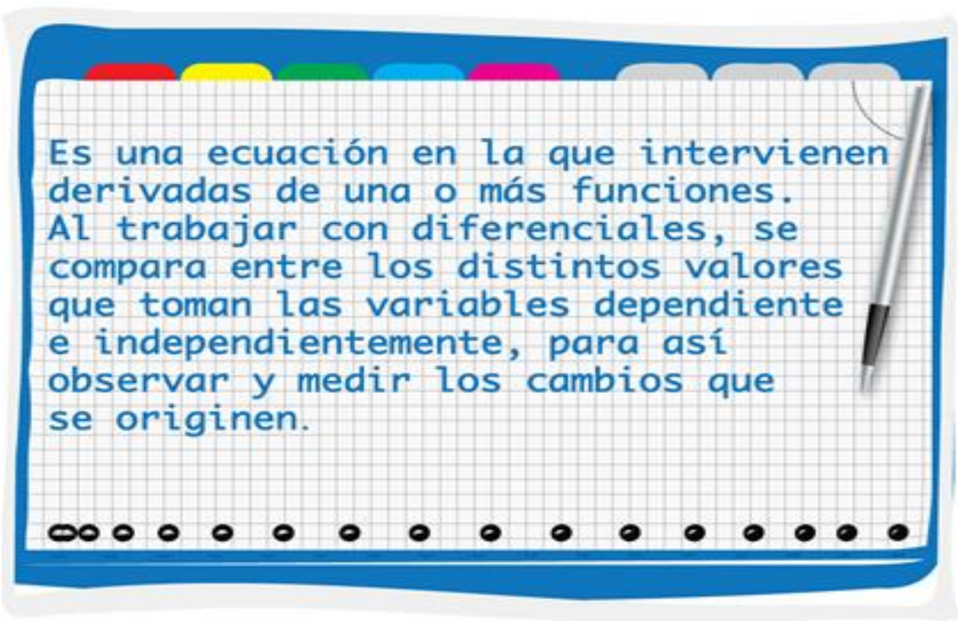
Es decir, se cumple que:

$$\boldsymbol{I''(x)} < C''(x)$$

Por lo que se obtiene efectivamente la máxima utilidad.

Por lo tanto, cuando la compañía de servicio en telefonía da 37,500 servicios, la utilidad será maximizada.

4.3. Diferencial de una función



Incremento de una función

- Al trabajar con diferenciales se comparan entre los distintos valores que toman las variables dependiente e independiente, para así observar y medir los cambios que se originen.
- Es por eso que al considerar los cambios en los valores de las variables, la diferencial llega a tener una relación directa con la derivada como razón o tasa de cambio.

Si se considera que $y = f(x)$, se observa que se verá afectada la variable ***y***, ya que se encuentra en función de los valores que tome ***x***.

Así, cuando la variable x cambia desde un valor inicial $x_{inicial}$, hasta un valor final x_{final}, el cambio se determina calculando la diferencia $(x_{final} - x_{inicial})$, lo que se conoce como cambio o incremento de una variable y se representa como:

$$\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$$

Y que sirve para determinar los cambios ente una y otra variable y, de manera general, para determinar los cambios en una función, ya sea de ingreso, costo, demanda o utilidad, evaluando los valores iniciales y finales en la función correspondiente:

$$\Delta f(x) = \Delta y = f(x_{final}) - f(x_{inicial})$$

Una empresa desea determinar en cuánto deberá incrementar su nivel de gastos si aumenta la producción debido al aumento en la demanda de sus artículos, para lo que obtiene la siguiente función: $G(x) = 5x^2 - 15000 \; pesos$

En donde actualmente la demanda de artículos es de 95: $x_{inicial} = 95$

- Determine en cuánto se incrementarán los gastos si la producción aumenta a 100 unidades.
- Determine la razón de cambio que se dará en los gastos al incrementarse la producción en una unidad.

Se sabe que la producción en el inicio es de 95 unidades, por lo que los gastos iniciales serán:

$$G(95)_{\ iniciales} = 5(95)^2 - 15000$$

$$G(95)_{\ iniciales} = 30125 \; pesos$$

Es decir, que cuando la empresa tiene una producción de 95 unidades sus gastos son de 30125 pesos. Ahora bien, cuando la producción aumenta a 100 unidades, entonces se tiene que $\boldsymbol{x_{final} = 100}$ por lo que los gastos finales serán de:

$$G(100)_{final} = 5(100)^2 - 15000$$
$$\boldsymbol{G(100)_{final} = 35000\ pesos}$$

Esto es, que aumentan en **$4875.00 pesos**.

Para determinar la razón de cambio se tomarán en cuenta los datos anteriores, de lo que se observa que:

$$x_{inicial} = 95 \qquad G(95)_{iniciales} = 30125\ pesos$$
$$x_{final} = 100 \qquad G(100)_{final} = 35000\ pesos$$

Por lo que:

$$\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$$
$$\Delta x = 100 - 95$$
$$\boldsymbol{\Delta x = 5\ unidades}$$

Por lo tanto:

$$\Delta G(x) = G(x_{final}) - G(x_{inicial})$$
$$\Delta G(x) = 35000 - 30125$$
$$\boldsymbol{\Delta G(x) = 4875}$$

Así, para la razón de cambio se tiene que:

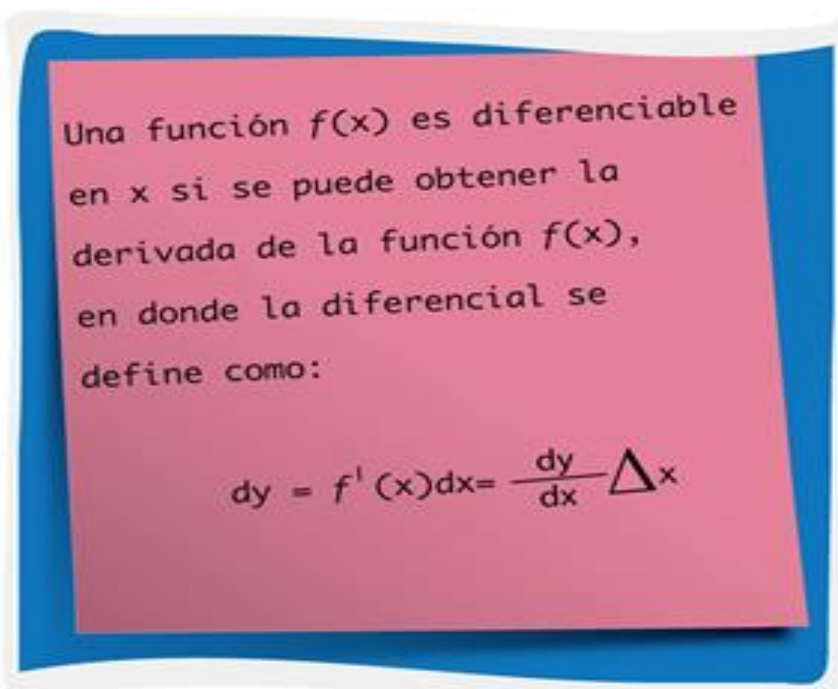
$$\frac{\Delta G}{\Delta x} = \frac{G(x_{final}) - G(x_{inicial})}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta G}{\Delta x} = \frac{G(100) - G(95)}{5}$$

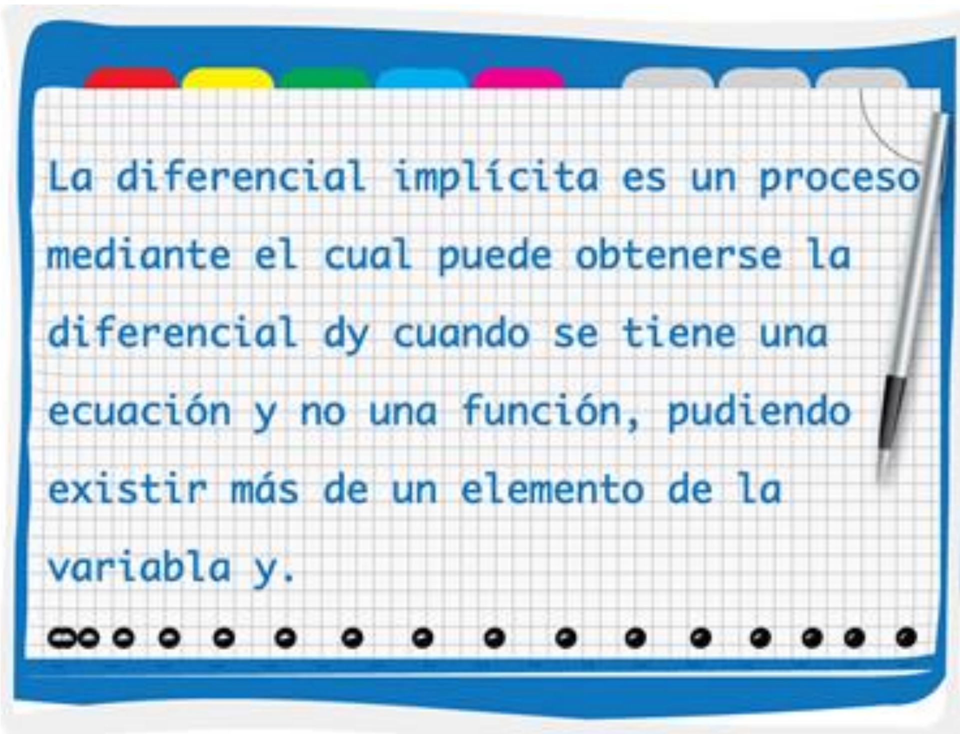
$$\frac{\Delta G}{\Delta x} = \frac{35000 - 30125}{5} = \frac{4875\ pesos}{5\ unidad}$$

$$\boldsymbol{\frac{\Delta G}{\Delta x} = 975\ pesos/unidad}$$

Con lo que se observa que los gastos de producción por unidad se incrementan en $975.00 pesos por unidad.



4.3.1. Diferencial implícita



4.3.2. Diferencial logarítmica

Tomando en cuenta las leyes logarítmicas:

$$Lna^{x} = xLna$$

$$Ln(ab) = Ln(a) + Ln(b)$$

$$Ln\frac{a}{b} = Ln(a) - Ln(b)$$

Aplicando las leyes de logaritmos a las funciones es posible aplicar la diferencial logarítmica:

$$dy = \frac{dLnx}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{dy = dLnx = \frac{1}{x}dx}$$

Así, para obtener la diferencial logarítmica d*y* de una función es necesario aplicar las leyes de los logaritmos a la función dada.

Empleando la diferencial logarítmica determine a partir de la siguiente función:

$$f(x) = y = \frac{x^3\sqrt{x^2+2}}{(2x+1)^3}$$

Solución: Aplicando a la función leyes de logaritmos, se tiene:

$$Lny = Ln\left[\frac{x^3\sqrt{x^2+2}}{(2x+1)^3}\right]$$

$$Lny = Ln\left[\frac{x^3(x^2+2)^{1/2}}{(2x+1)^3}\right]$$

$$Lny = Lnx^3 + Ln(x^2+2)^{1/2} - Ln(2x+1)^3$$

$$Lny = 3Lnx + \frac{1}{2}Ln(x^2+2) - 3Ln(2x+1)$$

Ahora bien, diferenciando implícitamente se tiene:

$$\frac{dLny}{dx} = 3dLnxdx + \frac{1}{2}dLn(x^2+2)dx - 3dLn(2x+1)dx$$

Aplicando:

$$\boldsymbol{dy = dLnx = \frac{1}{x}dx}$$

Se tiene la diferencial de cada parte de la función, así para:

$$3dLnxdx = \mathbf{3\frac{1}{x}dx}$$

Para:

$$\frac{1}{2}dLn(x^2+2)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+2}\right)2xdx = \boldsymbol{\frac{x}{x^2+2}dx}$$

Para:

$$3dLn(2x+1)dx = 3\left(\frac{1}{2x+1}\right)2dx = \boldsymbol{\frac{6}{2x+1}dx}$$

Y finalmente para:

$$\frac{dLny}{dx} = \frac{1}{y}dy$$

Por lo que sustituyendo en la diferencial:

$$\frac{1}{y}dy = 3\frac{1}{x}dx + \frac{x}{x^2+2}dx - \frac{6}{2x+1}dx$$

Factorizando a *dx*:

$$\frac{1}{y}dy = \left[\frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+2} - \frac{6}{2x+1}\right]dx$$

Despejando a *dy*:

$$dy = \left[\frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+2} - \frac{6}{2x+1}\right]ydx$$

Como:

$$y = \frac{x^3\sqrt{x^2+2}}{(2x+1)^3}$$

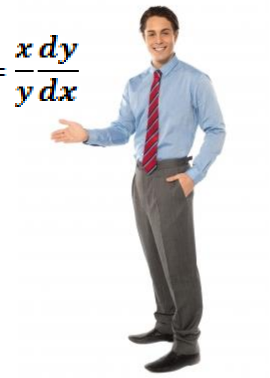
Sustituyendo en *dy*, sustituyendo en:

$$\boldsymbol{dy = \left[\frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+2} - \frac{6}{2x+1}\right]\left[\frac{x^3\sqrt{x^2+2}}{(2x+1)^3}\right]dx}$$

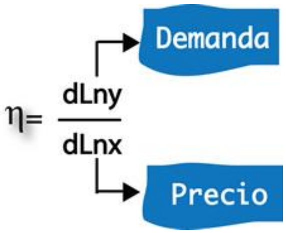
4.3.2. Diferencial logarítmica

La elasticidad es un indicador de la magnitud que cambiará la variable dependiente si la variable independiente se modifica en una unidad y se representa como:

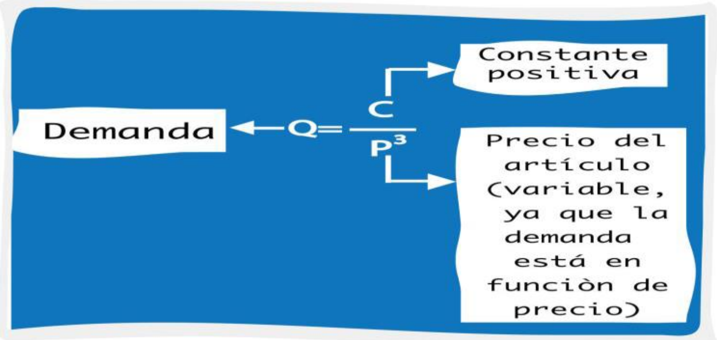
$$\eta = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$



Una manera de determinarla es a través de la diferencial con logaritmos y así obtener:



Determine la elasticidad de la demanda si:



1

Solución: Si se aplican logaritmos a la función de demanda:

$$LnQ = Ln\left[\frac{c}{p^3}\right]$$

$$LnQ = Ln\,c - Lnp^3$$

2

Diferenciando implícitamente a la demanda en función del precio:

$$dLnQ = Ln\,c - Lnp^3$$

$$dLnQ = Ln\,c - 3Lnp$$

3

Por lo que al aplicar la fórmula de elasticidad en la demanda:

$$\eta = \frac{dLnQ}{dLnp} = \frac{dLnc}{dLnp} - 3\frac{dLnp}{dLnp}$$

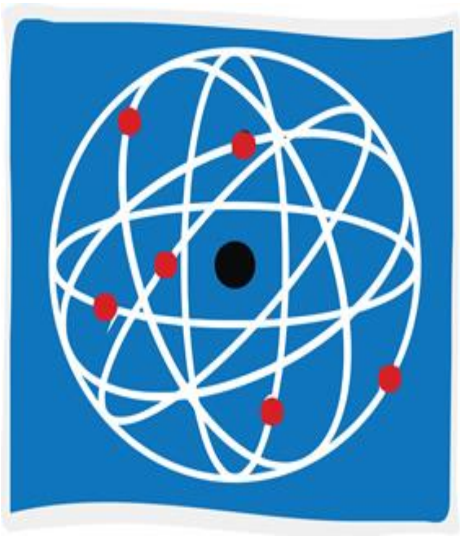
3

Por lo que:

$$\eta = -3$$

Así, la elasticidad de la demanda es de -3, lo que significa que al incrementarse el precio en una unidad monetaria, la demanda de los artículos disminuirá 3 unidades.

4.4. La integral



En la unidad anterior se estudió el cálculo diferencial donde el problema central era: “obtener la derivada de una función dada”. Sin embargo, en el cálculo integral se encuentra la operación inversa de la derivada, es decir “obtener una función original integrando la derivada”.

Por ejemplo, ¿cómo se podría obtener la posición de una partícula si sólo se conoce su velocidad?

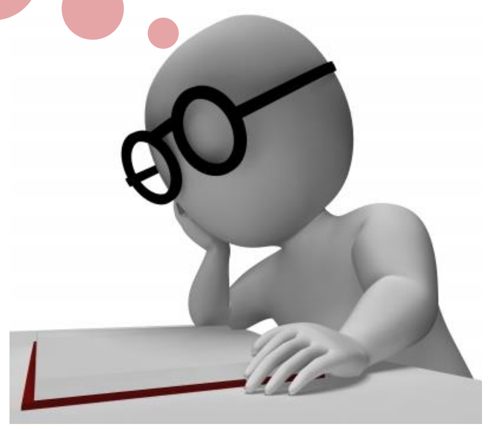
Al concluir esta unidad podrás resolver éste y otro tipo de problemas.

4.4.1. Conceptos relacionados con la integral y fórmulas básicas de integración

La integración es el proceso de determinar una función cuando se conoce su derivada, esto es, la operación inversa o contraria a la derivación.

El símbolo con el que se representa a la integral es: $\int$ que denota la operación de antiderivación y que de manera general define a la integral de la siguiente manera:

$$\int f(x)dx = F(X) + C$$



En donde:

$$f(x) = F'(x)$$

C = constante de integración para una integral no definida

Fórmulas y reglas de integración:

1	$\int a dx = ax + c$
2	$\int af(x)dx = a\int f(x) + c$
3	$\int (u \pm v \pm w \pm \cdots)dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx \pm \cdots$
4	$\int udv = uv - \int vdu$ *Integración por partes*
5	$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du$

6	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
7	$\int \frac{du}{u} = Ln\lvert u\rvert + c$
8	$\int e^u du = e^u + c$
9	$\int a^u du = \frac{a^u}{Ln\lvert a\rvert}$

Determine la integral de las siguientes funciones usando las fórmulas de integración:

1

$\int 6dx$ aplicando la fórmula 1 se tiene que:

$$\int adx = ax + c$$

En donde para este caso:
a=6
dx=dx

Por lo que:

$$\int 6dx = \boldsymbol{6x + c}$$

2

$\int (8x^2 + 3x - 2)dx$ aplicando la fórmula 3 y posteriormente para cada caso las fórmulas 1,6 y 2 se tiene que:

$$\int (u \pm v \pm w \pm \cdots)dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx \pm \cdots$$

En donde para este caso:
u=8x2
v=3x
w=-2
dx=dx

Por lo que:

$$\int (8x^2 + 3x - 2)dx = \int 8x^2dx + \int 3xdx - \int 2dx$$
$$= 8\int x^2dx + 3\int xdx - 2\int dx$$
$$= 8\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\frac{x^{1+1}}{1+1} - 2x + c$$
$$= \boldsymbol{\frac{8x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + c}$$

3

$\int 3^{2x}2dx$ aplicando la fórmula 9:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{Ln|a|}$$

En donde
a=3
u=2x
du=2dx

Se tiene entonces que:

$$\int 3^{2x}2dx = \boldsymbol{\frac{3^{2x}}{Ln|3|} + c}$$

Como se puede observar, la resolución de las integrales mediante las fórmulas es fácil si se identifica la similitud de la fórmula con la integral problema, para posteriormente comenzar a sustituir los valores correspondientes.

Ahora bien, hasta ahora se ve la solución de **integrales indefinidas**, es decir, que requieren de una constante de integración para su solución debido a que no tienen una solución exacta, esto es, que no está definida en un intervalo o límites, Así entonces, como existen las integrales indefinidas, también existen las integrales definidas.

Integral definida

Una función $f(x)$ está definida en el intervalo [a, b] si existe el límite de la función a medida que los incrementos tienden a 0 y el número de intervalos se aproxima al infinito, entonces el límite de la función es la integral definida desde un punto ***a*** hasta un punto ***b***, y se representa como:

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Evalúe la siguiente integral:

$$\int_{-3}^{5} (4x^2 - 2x + 1)dx$$

Solución: Usando las fórmulas y reglas de integración, se tiene que:

$$\int_{-3}^{5} (4x^2 - 2x + 1)dx = \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x\right]_{-3}^{5}$$

$$= \left[\frac{4(5)^3}{3} - \frac{2(5)^2}{2} + 5\right] - \left[\frac{4(-3)^3}{3} - \frac{2(-3)^2}{2} + 3\right]$$

$$= \left[\frac{500}{3} - 25 + 5\right] - [36 - 9 + 3]$$

$$= \left[\frac{500}{3} - 25 + 5\right] - 36 + 9 - 3$$

$$\int_{-3}^{5} (\mathbf{4x^2 - 2x + 1})\mathbf{dx} = \mathbf{116.667}$$

4.4.2. Integración por sustitución

Un método para solucionar integrales es el de sustitución, el cual consta de 3 pasos que se verán mediante un ejemplo:

Sea la integral $\int (x^5+3)^3 5x^4 dx$

1

Lo primero es sustituir el valor que se encuentra en el paréntesis por una sola variable, es decir, definir a ***u*** y ***du*** dentro de la integral dada, ejemplo: $u = x^5 + 3$

$$du = 5x^4 dx$$

Sustituir u y du en la integral, esto es:

$$\int (x^5+3)^3 5x^4 dx = \int u^3 du$$

2

Y dar solución a la integral en **u**:

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c$$

3

Finalmente se vuelve a retornar a las variables originales:

$$\frac{u^4}{4} + c = \frac{(x^5+3)^4}{4} + c$$

Así, se puede ver que una integral que contiene un polinomio elevado a una potencia o bien una función más complicada se puede reducir a una más sencilla y fácil de resolver.

4.4.3. Integración por partes

En muchas ocasiones la integral de una función no se puede resolver directamente a través de las fórmulas o por una sustitución, es ahí cuando se recurre a la integral por partes, esto es, que se tienen dos funciones dentro de la integral que hace necesario aplicar este sencillo método de integración, el cual se analizará con un ejemplo:

Sea la integral:

$$\int e^x (x+5)^2 dx$$

En este caso se tienen dos funciones dentro de la integral: una **exponencial** y un **polinomio** de un grado elevado a una potencia, y como se puede ver no es fácil de resolver con una fórmula o mediante una sustitución

Debido a esto es recomendable utilizar la fórmula para integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Al utilizar esta fórmula es necesario escoger qué función dentro de la integral será u y cuál será dv .

Siempre es recomendable que ***u*** corresponda a la función más complicada o bien al polinomio más grande y que ***dv*** sea la función más sencilla y fácil de integrar mediante una sustitución o de preferencia aplicando una fórmula, para este caso, se tiene que:

$$u = (x+5)^2$$

$$dv = e^x$$

Ahora bien, de acuerdo a la fórmula para sustituir la solución, se requiere conocer a ***du*** y a ***v***:

Para encontrar ***du*** se requiere obtener la derivada de la función que se escogió, que para este caso es necesario recurrir a la regla de la cadena:

$$u = (x+5)^2$$

Y aplicando la regla de la cadena para obtener ***du*** **(esto es derivada del interior por derivada del exterior)**, así:

$$du = 2(x+5)^{2-1}$$

$$\boldsymbol{du = 2(x+5)dx}$$

Para encontrar ***v*** se requiere obtener la integral de la función que se escogió como ***v***, que para este caso es posible realizarlo con la fórmula

$$\int e^u du = e^u + c$$

Así, se tiene que:

$$dv = e^x$$

Entonces:

$$v = \int e^x dx$$

$$\boldsymbol{v = e^x + c}$$

Ahora lo que continúa es sustituir en la fórmula de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int e^x (x+5)^2 dx = (x+5)^2 e^x - \int e^x \, 2(x+5) dx$$

$$\int e^x (x+5)^2 dx = (x+5)^2 e^x - \int e^x \, 2(x+5) dx$$

$$\int e^x (x+5)^2 dx = (x+5)^2 e^x - \left[\int 2xe^x \, dx + \int 10e^x dx \right]$$

Si se observa ahora se tienen dos integrales en la solución, pero que son más sencillas que la integral original; como se puede observar, la primera se podrá resolver por partes y la segunda aplicando una fórmula, así para:

$$\int 2xe^x \, dx = \begin{Bmatrix} u = 2x & du = 2dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x + c \end{Bmatrix}$$

$$\int 2xe^x \, dx = 2xe^x - \int e^x 2dx = \mathbf{2xe^x - 2e^x + c}$$

$$\int 10e^x dx = \mathbf{10e^x + c}$$

Por lo tanto, la solución de la integral será:

$$\int e^x (x+5)^3 dx = (x+5)^2 e^x - [(2xe^x - 2e^x) + 10e^x] + c$$

$$\int e^x (x+5)^3 dx = (x+5)^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 10e^x + c$$

$$\int e^x (x+5)^3 dx = (x+5)^2 e^x - 2xe^x - 8e^x + c$$

$$\int e^x (x+5)^3 dx = \mathbf{e^x \left[(x+5)^2 - 2x - 8 \right] + c}$$

4.5. La integral y sus aplicaciones en las matemáticas financieras

Las matemáticas financieras son una parte de la matemática aplicada que estudia los modelos matemáticos relacionados con los cambios cuantitativos que se producen en sumas de dinero. Para esto se requiere el cálculo integral que a continuación se explicará.

4.5.1. La función de utilidad

La función de Utilidad tiene su fundamento en la teoría respecto al consumidor y que se refleja en el flujo monetario que tendrá la empresa al realizar la venta de algún artículo o cuando vende un servicio y esto está en función de los costos que se generen.

Recordando la función de Utilidad, se tiene:

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

De la que se espera que siempre los ingresos sean mayores a los costos para así obtener la mayor ganancia posible. Así, se puede ver que al integrar la función de utilidad marginal se obtiene la **Utilidad Total**.

Una comercializadora de queso francés tiene, debido a sus ventas, la siguiente función de utilidad marginal::

$$U'(x) = 230 - 10x$$

Determine la función de utilidad total de la empresa.

Solución: Para encontrar la función de Utilidad de la empresa comercializadora, es necesario integral la función de utilidad marginal, por lo que se tiene:

$$U(x) = \int U'(x) = \int dU = \int (230 - 10x)\,dx$$

$$U(x) = 230x - \frac{10x^2}{2} + c$$

$$U(x) = 230x - 5x^2 + c$$

Y ya que cuando no hay ventas de quesos la Utilidad será de cero, entonces la constante de integración ***c*** será igual a cero.

Por lo que finalmente la Utilidad Total de la comercializadora de queso francés estará dada por:

$$\boldsymbol{U(x) = 230x - 5x^2}$$

4.5.2. Asignación y agotamiento de recursos

Algunos conceptos relacionados con este tema son:

- Costo Capital: es el costo de compra menos el valor de recuperación.
- Costo de Operación: incluye a los costos de propiedad y mantenimiento de equipo
- Formación de Capital: es el proceso por el cual de manera continua se incrementa la cantidad acumulada de bienes de capital y está en función del tiempo.
- Recursos: son los elementos de carácter material, tecnológico o humano que sirven para desarrollar una tarea específica donde se quiere llegar a un objetivo final, de ahí que es importante describir los tres tipos de recursos con que cuenta una empresa:

Material	Tecnológico	Humano
• También llamado monetario, es el que permite destinar las cantidades de dinero para realizar diversas actividades, tales como los pagos, compras, salarios, entre otros. Así, cuando los ingresos de la empresa son iguales a los costos se crea un punto de equilibrio, y cuando los ingresos son menores a los costos las ganancias de la empresa se pierden y empieza a presentarse un **agotamiento de recursos**, lo que llevará a la empresa a la quiebra, ya que no puede hacer frente a sus necesidades.	• Es el que permite realizar la actividad de la empresa de manera eficiente y va desde la maquinaria del área de proceso hasta las computadoras del área de oficinas, es importante siempre tenerlo en buenas condiciones y contar con los recursos tecnológicos adecuados ya que de ellos dependerá la eficiencia en los procesos que se desarrollan dentro de la empresa.	• Corresponde al personal con que cuenta la compañía o empresa para desarrollar las actividades con apoyo de los recursos tecnológicos, así la cantidad de recursos humanos con que cuente la empresa dependerá en gran parte del nivel de producción que ésta maneje.

Una empresa turística considera incrementar su personal de promoción. El costo marginal de la incorporación de dicho personal está dado por: $C'(x) = 3Lnx$

En donde el costo **C(x)** está dado en unidades que representan 10000 unidades monetarias y **x** es el número de personas que se van a contratar. Si se contratan 10 personas, ¿cuál es será el costo total si no hay costos fijos?

Solución: Para encontrar la función de Costo Total es necesario integrar a la función de costo marginal:

$$C(x) = \int C'(x) = \int dC = \int 3Lnx\,dx$$

Así, utilizando la integración por partes, se tiene:

$$C(x) = \int 3Lnx\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \int udv = uv - \int vdu \\ u = Lnx \qquad du = \frac{dx}{x} \\ dv = 3dx \quad v = \int 3dx = 3x + c \end{array} \right\}$$

$$C(x) = \int 3Lnx\,dx = 3xLnx - \int 3x\frac{dx}{x}$$

$$C(x) = \int 3Lnx\,dx = 3xLnx - \int 3dx$$

$$C(x) = 3xLnx - 3x + c$$

Y como los costos fijos son cero:

$$\boldsymbol{C(x) = 3xLnx - 3x}$$

Y como quieren contratar a 10 nuevas personas, entonces:

$$C(10) = 3(10)Ln10 - 3(10) = \mathbf{39.08}\,\boldsymbol{unidades}$$

O lo que es lo mismo:

$$(39.08\,unidades)(10000) = \mathbf{390800}\,\boldsymbol{unidades\ monetarias}$$

4.5.3. Inventarios

El **Inventario** representa a las existencias de cualquier artículo, material o recurso utilizado en una organización para los procesos de fabricación y/o distribución.

Cuando se manejan inventarios puede haber 3 tipos de costos:

Costos de compra

- Debidos a la compra de artículos o materia prima, para adquirir mercancía como respaldo ante una posible escasez o desabasto en el Mercado.

Costos de tener

- Se genera cuando se requiere mantener un nivel satisfactorio de materia prima o producto terminado e incluye costos de manejo, daños y pérdidas provocadas por el manejo de los artículos, fletes, papelería y todos los requerimientos de registro de almacén y reposición de mercancía utilizada.

Costos de mantenimiento

- Los generados por tener un artículo en inventario, incluye costos de capital invertido, de deterioro, obsolescencia, robos, impuesto y seguros, así como espacio, instalación, depreciación del edificio y equipo de almacén, etc.

Cierre de la unidad

Has concluido el estudio de la unidad y, con ello, la asignatura. ¡Felicidades!

En esta unidad estudiaste el concepto de la derivada, las fórmulas y los métodos de derivación, así como el concepto de la diferencial, el cual te permitirá tener los conocimientos necesarios para comprender el análisis marginal y sus implicaciones en los procesos económicos y administrativos de una empresa.

Además, la unidad establece los principios del cálculo integral para que puedas utilizarlos en la solución de problemas relacionados con utilidades, asignación de recursos e inventarios, temas de gran importancia dentro del área de las matemáticas financieras.

Finalmente, durante toda la asignatura revisaste algunas aplicaciones del cálculo que te ayudarán a solucionar problemas relacionados dentro del ámbito, personal, profesional y laboral.

Fuentes de consulta

- Chiang (2006). *Métodos fundamentales en economía matemática*. México: McGraw-Hill.
- Cissell, R., et al. (1999). *Matemáticas Financieras*. México: CECSA.
- García, E. (1998). *Matemáticas Financieras por medio de Algoritmos, Calculadora Financiera y PC*. México: McGraw-Hill.
- Harshbarger, R. J. et al. (2005). *Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.
- Hernández, A. (1998). *Matemáticas Financieras Teoría y Práctica*. México: Ediciones Contables, Administrativas y Fiscales.
- Leithold, L. (2006). *El cálculo*. Oxford: Cúspide.
- Motoyuki, A. (2000). *Matemáticas Financieras*. Argentina: Despeignes.
- Render, B., et al., (2006). *Métodos cuantitativos para los negocios*. México: Pearson Educación.
- Spiegel, M. R. (1994). *Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas*. México: McGraw-Hill.
- Thomas (2006). *Cálculo de una Variable*. Prentice Hall.
- Toledano y Castillo, M. A., et al. (1984). *Matemáticas Financieras*. México: CECSA.
- Vidaurri, H. M. (2001). *Matemáticas Financieras*. México: Thompson Learning.