Gestión y Administración de PyME

UnADM
Universidad Abierta y a Distancia de México

Nombre de la asignatura

Matemáticas financieras

3º semestre

Clave:

LIC 07142314 / TSU 08142314

Capitalización y amortización

Contenido nuclear

Fuente:
freedigitalphotos.com

División de Ciencias
Sociales y Administrativas

Índice

Presentación de la unidad

Freedigitalphotos.com

Las finanzas se ocupan del estudio e interpretación de operaciones que implican inversión o desembolso de capital, a una tasa de interés determinada y en un periodo especificado. Como gestor(a) y administrador(a) de PyME, es imperativo que conozcas, domines y apliques las matemáticas financieras. Con la información de la unidad 3, podrás integrar los conocimientos que has adquirido a lo largo de la asignatura, y conocerás a fondo el valor del dinero en diferentes periodos y sus aplicaciones.

Competencia específica

Freedigitalphotos.com

Calcula el importe de los pagos y la tasa de interés, a través del establecimiento de los esquemas capitalización y amortización, para planear las acciones que permitan administrar los recursos financieros de la PyME.

Problematización

Una de las interrogantes más importantes en las matemáticas financieras incluye el valor del dinero a través de un periodo, cuando se realiza una inversión o cuando se pide un préstamo.

Esta situación es de vital importancia para el empresario, porque le permite planear cómo puede manejar una deuda a lo largo del tiempo o, bien, los rendimientos que le producirá una inversión en un horizonte de flujos monetarios, para ello se utilizan las tablas de amortización que permiten tomar decisiones que involucran: monto de dinero, tasa de intereses, temporalidad y desembolso inicial.

Los empresarios, si no tienen claro cómo hacer una tabla de amortización, pueden, por un lado, tener problemas de falta de liquidez que podrían derivar en el cierre de la PyME o, bien, desaprovechar oportunidades de inversión.

Freedigitalphotos.com

Metodología de trabajo

Freedigitalphotos.com

Dada la naturaleza de la asignatura, la estrategia metodológica del proceso enseñanza–aprendizaje sobre la cual vas a desarrollar el curso es la resolución de un caso práctico. De esta, manera garantizarás el logro de la competencia planteada.

Es imperativo que comprendas los conceptos y las herramientas expuestas a lo largo del curso, ya que te permitirán adquirir las habilidades necesarias para resolver casos prácticos del tipo financiero, y porque las aplicarás en tu vida laboral y personal.

La mecánica de trabajo se describe a continuación:

- Investigación
- Realización de actividades de aprendizaje
- Solución de casos prácticos (ejercicios)
- Vinculación del tema con la vida real

La participación de tu docente en línea es fundamental, ya que planteará las estrategias que aseguren tu aprendizaje y el de tus compañeros(as), fomentará el trabajo en equipo, y estimulará la investigación y la discusión bajo un ambiente de respeto a la opinión, para que el entorno de trabajo sea conveniente.

Fuente: Freedigitalphotos.com

Ponemos a tu disposición un material didáctico complementario que se encuentra en la carpeta material de apoyo, con la finalidad de que conozcas de manera más cercana como se aplica la capitalización y amortización en un contexto real.

3.1. Conceptos básicos

La materia Matemáticas financieras tiene como objeto de estudio las finanzas; este concepto comprende, como ya se ha establecido, el valor del dinero en el tiempo y la transferencia de capitales entre dos o más entes económicos, y tiene en consideración una tasa de interés que puede ser simple o compuesto.

Freedigitalphotos.com

El tema de capitalización y amortización se aborda a partir de la simbología ya expuesta en la unidad 2, es decir:

$P =$ Valor presente (capital actual).
$F =$ Valor futuro (monto o capital futuro).
$i =$ Tasa de interés por periodo (anual, semestral, trimestral, etcétera), el cual puede ser interés simple o interés compuesto.
$n =$ Número de periodos (tiempo de capitalización o descuento).
$I =$ Interés generado.

Con relación a la simbología anterior, se debes tener en cuenta las siguientes expresiones:

Para interés simple:

$F = P + I \longrightarrow$ Si $I = P.i.n F = P + (P.i.n)$

Expresión 3.1 (1)

Para interés compuesto:

Expresión 3.1 (2)

La expresión $F = P(1+i)^n$ incluyen los intereses respectivos (I).

Las expresiones que se derivan del **interés compuesto** se consideran más laboriosas en su aplicación, debido a la utilización de potencias, a las cuales se hizo referencia en la obtención de las fórmulas y en los factores de equivalencia respectivas.

3.1.1. Capitalización

La **capitalización** es una operación financiera asociada a la acción del descuento, ya que representa efectos cualitativos y cuantitativos opuestos.

La operación de capitalización referida a una inversión de un capital en el momento presente (*P*), a una tasa de interés determinada y un cierto número de periodos, implica que se obtendrá un capital futuro (*F*) mayor que el capital actual (*P*), por efecto de los intereses (*I*) generados en dicha inversión.

Si se consigna la capitalización al ámbito del servicio bancario, se define como la operación de aplazar o postergar el cobro o el pago de un capital para obtener otro superior. Sin embargo, si el cobro o el pago se anticipan, la operación recibe el nombre de descuento.

En síntesis, se puede establecer un esquema para la capitalización y el descuento de la siguiente manera:

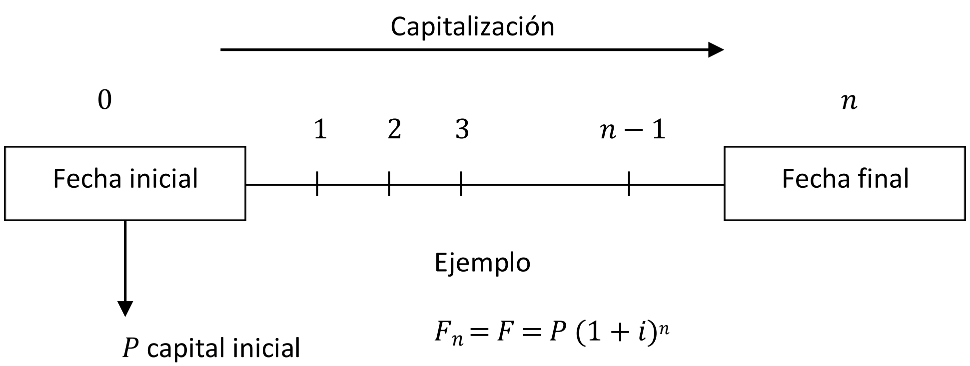
- Operación de capitalización
  - Con interés simple
  - Con interés compuesto
- Operación de descuento
  - Con interés simple
  - Con interés compuesto

Interés simple	Interés compuesto
• La tasa correspondiente se aplica sobre un capital inicial, de tal manera que los intereses producidos no se acumulan al capital.	• La tasa respectiva se aplica cada vez sobre un capital diferente, el cual se origina por la acumulación sucesiva de los intereses o, en su caso, de la resta sucesiva de los descuentos.

En las operaciones financieras a **corto plazo** (máximo un año) se emplea el interés simple. Para operaciones a **largo plazo** (tiempo mayor de un año), por lo general, se utiliza el interés compuesto, bajo el cual la capitalización es más ventajosa para el banco, o para las personas físicas o morales poseedoras de capital.

Freedigitalphotos.com

Esquemáticamente, la capitalización y el descuento se representan de la siguiente manera:

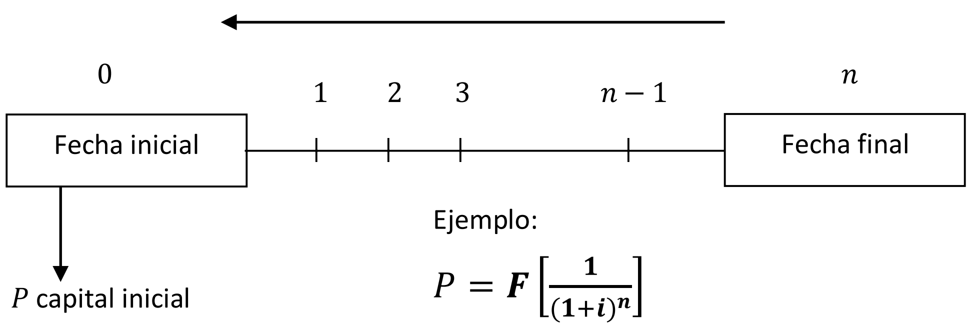


Ejemplo

$F_n = F = P\,(1+i)^n$

$(1+i)^n$ = factor de capitalización

i = interés compuesto



Ejemplo:

$$P = \boldsymbol{F}\left[\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}\right]$$

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}\right] = \boldsymbol{Factor\ de\ descuento}$$

3.1.2. Tasa de amortización

Las operaciones financieras relativas a la capitalización y a la amortización tienen que ver con el concepto de **renta,** el cual se utiliza para denominar a una sucesión de pagos o cobros regulares.

El término renta puede corresponder a las siguientes denominaciones:

- Renta de trabajo: sueldo de un trabajador.
- Renta de crédito: pago mensual establecido.

En suma, dentro del campo financiero, una renta es una sucesión de capitales con vencimientos periódicos y con alguna relación entre sí.

Dentro del cálculo financiero se pueden identificar 2 clases de renta:

- Una serie de depósitos periódicos para construir un capital.
- Una serie de pagos derivados de un préstamo de este tipo de renta, de la cual se derivó el concepto de amortización, que se tratará más adelante.

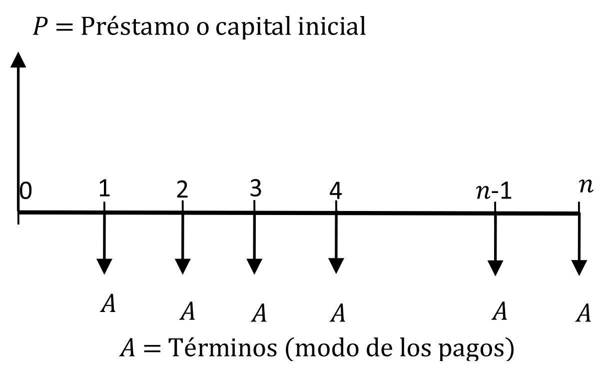
En las rentas de cualquier tipo se consideran los conceptos siguientes:

1. **Fecha de compromiso**: obligación de pagar o derecho de cobrar la renta.
2. **Fecha de vencimiento**: momento del cobro o pago de cada componente de la serie de los flujos monetarios respectivos.
3. **Fecha final**: momento de cobro o pago del último componente de la serie de flujos monetarios.
4. **Plazo**: tiempo considerado entre la fecha de compromiso y la última fecha de cobro o pago del último componente de la serie de flujos.
5. **Término**: importe o monto de cada uno de los flujos relativos a cobros o pagos. El concepto término puede ser sustituido por los vocablos siguientes: prima, anualidad, mensualidad, etcétera.

La información anterior, proporciona los requerimientos básicos para abordar el concepto de amortización. Ahora bien, se hará referencia a dos tipos de renta, es decir:

- Rentas de amortización
- Rentas de capitalización

Rentas de amortización: la finalidad de este tipo de rentas es pagar un capital inicial o actual, por ello se establece que **amortizar** es igual a pagar o cubrir. Así, a las rentas de amortización les corresponde el diagrama siguiente:



En este caso, la incógnita *A* representa el importe que se debe amortizar y *n* representa el periodo para amortizar el préstamo o valor actual *P*.

En el diagrama anterior, se tiene que para una tasa de interés compuesto (i) el valor actual (P) resulta ser:

$$P = \frac{A(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Expresión 3.1.2 (1)

Si se despeja A, se tiene:

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Expresión 3.1.2 (2)

En la expresión 3.1.2 (2), A representa el pago por periodo o término (las expresiones anteriores se expusieron en la unidad pasada).

Ejemplo 3.1

Una persona solicita un crédito (capital actual) de $50, 000. El compromiso consiste en amortizar el crédito en doce mensualidades a un interés mensual del 3%. ¿Cuánto debe pagar cada mes?

Solución:

$$P = 50{,}000$$
$$i = 3\%$$
$$n = 12$$
$$A = \text{desconocido}$$

Según la expresión 3.1.2 (2), resulta:

$$A = P\left[\frac{i\,(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}\right] = 50,000\left[\frac{0.03(1+0.03)^{12}}{(1+0.03)^{12}-1}\right] = \$5,023.10$$

En el ejemplo anterior, se deben pagar doce documentos por $5, 023.10 para amortizar $50, 000 en doce meses. Si se habla del concepto de equivalencia, se establece que doce flujos monetarios de $5, 023.10 son equivalentes a un valor actual de $50, 000, siempre y cuando el interés sea del 3% (0.03) mensual.

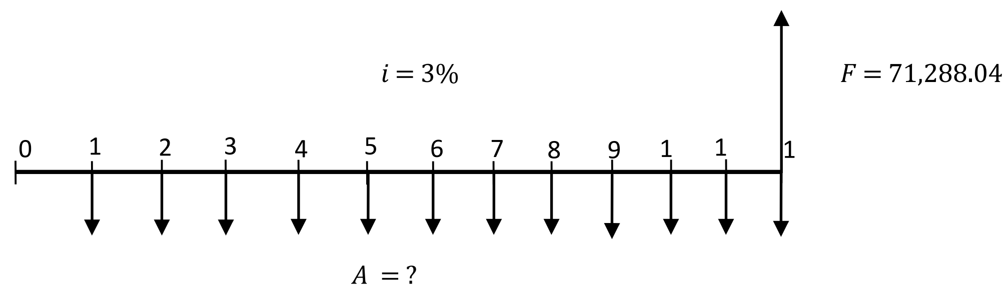
Rentas de capitalización: con el propósito de vincular los conceptos de amortización y capitalización con el concepto de equivalencia, se considera el siguiente caso de rentas de capitalización, relativo al ejemplo anterior:

Ejemplo 3.2

Se requieren acumular $71, 288.04 en el mes 12. ¿Cuánto se debe invertir mensualmente si la tasa de interés compuesto es de 3% mensual?

Solución:

El diagrama de flujo monetario es:

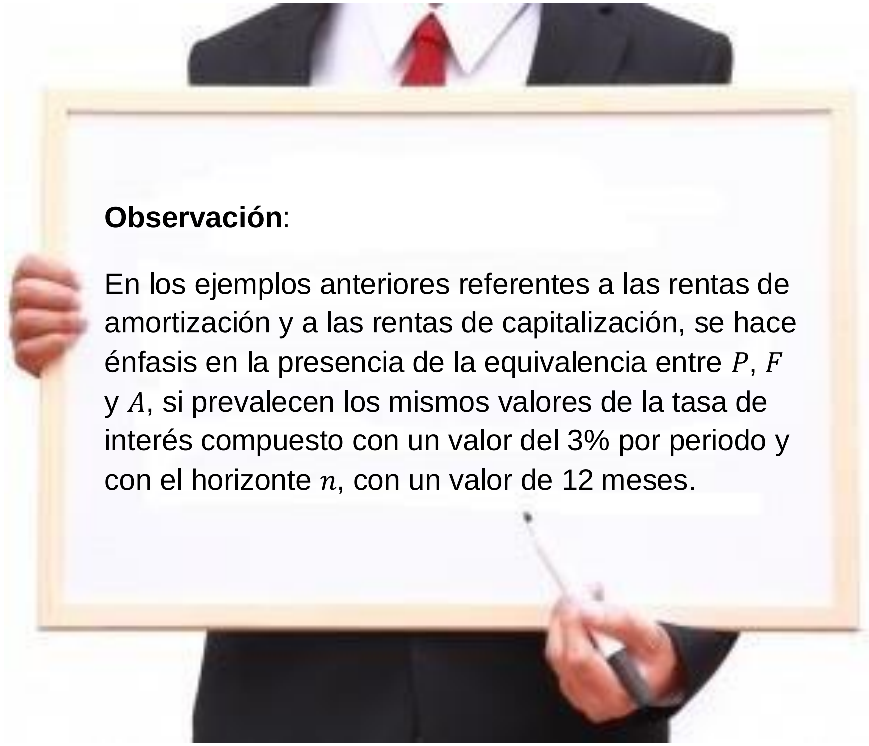


La expresión por utilizar se deriva de:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \therefore A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 71{,}288.04\left[\frac{0.03}{(1+.0.03)^{12} - 1}\right]$$

$$A = \$5{,}023.10$$



Freedigitalphotos.com

3.2. Aplicaciones

En este apartado encontrarás ejemplos de aplicaciones de los conceptos de capitalización y amortización, con los que relacionarás todos los conceptos de la unidad con situaciones que enfrentarás en la vida real.

En las operaciones financieras acontece un intercambio de dinero, en el cual la entrega y la recuperación del mismo ocurren en fechas diferentes, generándose así un rendimiento o un costo, lo cual se traduce como un interés en dichas operaciones; lo anterior equivale dentro de otras causas y efecto, a un premio o castigo, según las circunstancias de las partes involucradas.

Freedigitalphotos.com

3.2.1. Cálculo de montos de capitalización

Los **métodos de capitalización** simple y compuesta permiten determinar la cuantía de un capital en un periodo posterior, para ello utilizan varias variables como el tiempo y los intereses generados. Si se conocen estos procesos, se pueden entender muchas operaciones financieras y determinar, a través de cálculos, cuál resultaría compatible con los objetivos establecidos.

La **capitalización simple** se fundamenta en una determinación futura de un capital, utilizando una expresión matemática (fórmula) no acumulativa; en otras palabras, el capital inicial genera intereses, los cuales no se añaden al capital inicial para calcular nuevos rendimientos. Normalmente se puede emplear en inversiones, pero también existe la posibilidad de que esta fórmula se utilice cuando un préstamo está en **fase de carencia**, es decir, cuando el deudor, al no poder afrontar el pago del préstamo, desea evitar que el monto se incremente, para lo cual sólo paga los intereses durante un periodo.

En discrepancia a la capitalización simple, la **compuesta** contiene intereses productivos. Este tipo de interés se agrega al capital inicial para generar nuevos intereses con base en el nuevo monto del capital, repitiendo este proceso hasta a completar el periodo.

Con relación a lo anterior, se puede también establecer el concepto de **descuento**, es decir, poseer anticipadamente un capital que debería cobrarse en un tiempo futuro, por lo cual se obtiene un valor menor.

La capitalización (o el descuento) es una operación que se puede calcular con interés simple o con interés compuesto.

3.2.1.1. Capitalización con interés simple

Ejemplo 3.3

Un banco presta $10, 000 durante dos años, a una tasa de interés simple de 40% anual. Calcula los intereses producidos y el monto total del banco al final del año dos.

Solución:

$$\text{Fórmulas} \begin{cases} F = P + I \\ I = p.i.n \end{cases} \therefore F = P + p.i.n$$

F = Valor futuro o monto total = desconocido

I = Intereses producidos = desconocidos

i = Interés simple = 0.40

n = 2 años

P = Valor presente

$$I = p.i.n = 10,000 \times 0.40 \times 2 = 8,000$$

$$F = P + I = 10,000 + 8,000 = 18,000$$

Ejemplo 3.4

El banco dice: “te presto $10, 000 a un plazo de dos años y al final de ese tiempo me pagarás $18, 000”. Determina el interés simple que te cobraría.

Solución:

$$F = 18{,}000$$
$$P = 10{,}000$$
$$n = 2$$
$$i = \text{desconocido}$$

Se tiene que:

$$F = P + I \therefore I = F - P$$
$$I = 18{,}\,000 - 10{,}\,000 = 8{,}\,000$$

También:

$$I = p.i.n \therefore i = \frac{I}{P.n}$$

$$i = \frac{8{,}000}{10{,}000 \times 2} = 0.40 \times 100 = 40\%$$

Ejemplo 3.5

Si la financiera presta al 40% de interés simple y ofrece un préstamo de $10, 000, para después pagar $18, 000. ¿A qué plazo en meses propone esa operación?

Solución:

$F = 18{,}000$

$P = 10{,}000$

$i = 40\%$

$n =$

Se tiene que: $F = P + I \therefore I = F - P$

$$I = 18,000 - 10,000 = 8,000$$

Y que: $I = p.i.n \therefore n = \frac{I}{P.i}$

$$n = \frac{8,000}{10,000 \times 0.40} = 2 \text{ meses}$$

En el interés simple puede ocurrir que la tasa de interés adquiera dos o más valores durante un año, por lo que en este caso se trata de una tasa variable. Esta situación puede originarse debido a situaciones especiales en el mercado financiero, que provoquen alguna importancia a los saldos de los inversionistas a corto plazo.

Ejemplo 3.6

Un cliente ahorrador cuenta con un saldo de $20, 000 al inicio de año. El banco le hace saber que en dicho año el interés será del:

- 40% a partir del 1 de enero
- 35% a partir del 1 de abril hasta el 31 de diciembre

En estas circunstancias, los intereses (I) son:

- Para el 40%
  $I = 20{,}000.00 * 0.40 * {}^{90}/_{360} = 2{,}000.00$

- Para el 35%

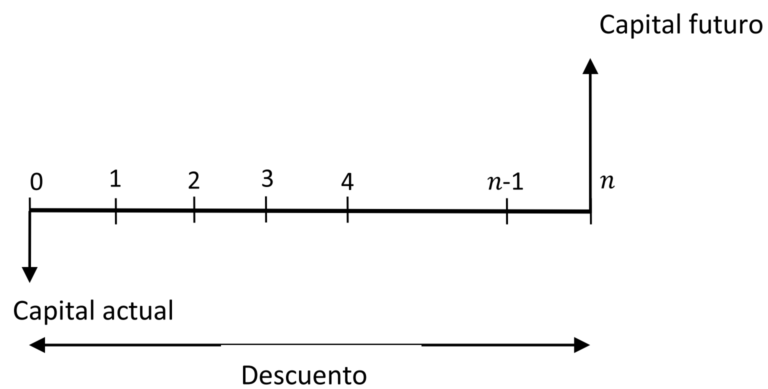
  $I = 20{,}000.00 * 0.35 * {}^{275}/_{360} = 5{,}5347.22$

En total, el ahorrador obtendrá $I = \$2{,}\ 000.00 + 5{,}347.22 = \$7{,}347.22$

Nota: Para efectos de cálculo de interés bancario se toma el año comercial de 360 días.

3.2.1.2 Operación de descuento

El **descuento** consiste básicamente en adelantar la fecha de disposición o el paso de un capital, de tal manera que el descuento equivale a la operación inversa de la capitalización. Por tanto, el descuento implica disminuir el monto de un capital futuro. Observa el siguiente diagrama:



Capital actual = Capital futuro – Descuento

En el descuento, el capital futuro se denomina también como valor nominal (Vn) y el valor actual, como el valor efectivo; de tal manera que:

$$Ve = Vn - D;\ D = Vn.i.n$$

Ejemplo 3.7

Un banco descuenta una letra de cambio (documento) con valor nominal de $10, 000 y aplica una tasa de interés simple del 40% anual, a 70 días antes de su vencimiento. ¿Cuál es el valor del descuento y cuál es el valor efectivo a pagar?

Solución:

$D = \text{desconocido}$

$V_e = 10,000$

$i = 40\%$

$70\ días$

$$V_n . i . n = 10,000 \times 0.40 \times \frac{70}{360} = \$777.77$$

$$V_e = V_n - D = 10,000 - 777.77 = \$9,222.23$$

3.2.1.3 Capitalización con interés compuesto

En la unidad 2 se derivó la ecuación del valor futuro (F) a un capital actual (P), invertido a una tasa de interés compuesto a n periodos, es decir:

$F = P(1+i)^n$, en la cual:

$(1+i)^n$ = al factor de capitalización, de tal manera que:

El capital futuro = al capital actual × el factor de capitalización, es decir:

$$F = P \times (Factor\ de\ capitalización)$$

Observación

Para encontrar el valor de un factor de capitalización requerido, existen tablas para diferentes valores de i y de n.

Ejemplo 3.8

¿Cuánto se capitalizará dentro de 7 años si ahora se invierten $50, 000 a un interés del 21% anual?

Solución:

$F = \text{desconocido}$

$P = 50,000$

$i = 21\%$

$n = 7 \text{ años}$

$F = P\ (1+i)^{n} = 50,000\ (1+0.21)^{7} = \$189,875.00$

Si se emplea el factor de capitalización, resulta que:

$F = P \times (factor\ de\ capitalización)$

$= 50,000 \times 3.79749$

$F = \$189,875$

Ejemplo 3.9

Se realizan las siguientes inversiones a un interés compuesto $(i = 15\%)$:

- \$1, 000 ahora
- \$3, 000 dentro de 3 años
- \$5, 000 dentro de 5 años

¿Cuánto se capitalizará el año 7?

Este caso equivale a una sola inversión en 3 ocasiones.

Solución:

$F =$ desconocido

$P_1 = \$1,000\ (n = 0)$

$P_2 = \$3,000\ (n = 3)$

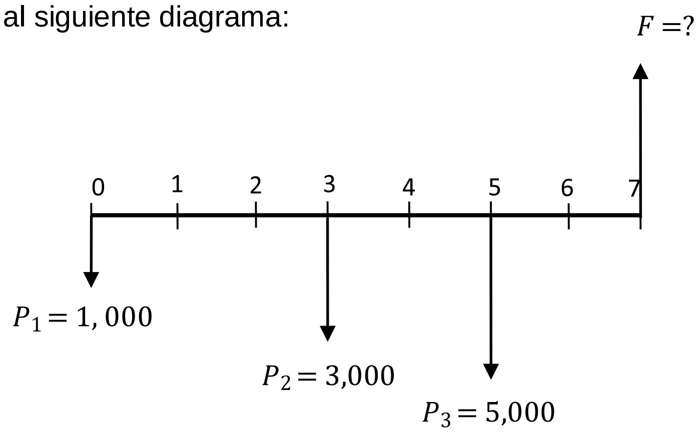
$P_3 = \$5{,}000\ (n = 5)$

$F = P\ (1 + i)^n$

$F = \$1,000.0\ (1 +.15)^7 + \$3,000.0\ (1 +.15)^4 + \$5,000.0\ (1 +.15)^2$

$F = \$2,660.00 + \$5,247.00 + \$6,612.00 = \$14,519.00$

Lo anterior equivale al siguiente diagrama:

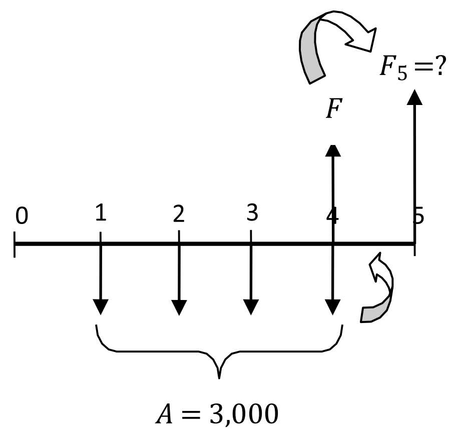


Ejemplo 3.10

Un plan de inversiones uniformes (A) acontecerá durante los periodos del 1 al 4, con un valor de \$3, 000 por cada una de ellas. ¿Cuánto se capitalizará en el periodo 5 si el interés es del 10% anual?

Solución:

A este problema le corresponde el siguiente diagrama:



$F_5 =$ desconocido

$A\ (1-4) = 3,000$

$i = 10\%$

$n\ (total) = 5$

El primer paso es acumular o capitalizar los depósitos A en el periodo 4 (F_4), ya que el factor (F/A) opera directamente a un valor de $n = 4$ (cuatro depósitos). Después, el valor correspondiente se capitaliza en el periodo 5 (F_5) con $n = 1$ y con el factor (F/P).

La fórmula para capitalizar una serie A es:

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Aplicando la expresión anterior obtenida en la unidad 2, se tiene:

$$F_4 = 3,000 \left[\frac{(1+0.10)^4 - 1}{0.10}\right] = 3,000 \times 4.641 = \$13,923$$

$$F_5 = 13,923\,(1+i)^n = 13,923(1+0.10)^1 = \$15,315.30$$

3.2.2. Fondo de amortización

Se enfatiza que las rentas o **fondos de amortización** tienen la finalidad de amortizar o pagar un capital presente o actual (un préstamo). Este concepto se citó en el inciso 3.1.2.

Es importante resaltar que cualquier pago a capital dentro de un crédito se denomina amortización, de ahí el nombre de la tabla de amortización. La única manera en que no se hace una amortización es cuando sólo se pagan los intereses o cuando el crédito comprende un periodo de gracia.

Por ello, las condiciones en que se acuerda el crédito son importantes y debes tenerlas muy presentes, pero sobre todo muy bien esclarecidas: pagos fijos, pagos constantes a capital + interés (decrecientes), pagos fijos + anualidades, etcétera.

Freedigitalphotos.com

Los ejemplos del cálculo de fondos de amortización que se presentan, revisten dos aspectos a saber:

Fondos pagaderos al final de cada periodo iniciado con el periodo uno (1).	Fondos pagaderos al final de cada periodo, pero iniciando en un periodo diferente del primero, hasta un punto enésimo.

Se aclara que las rentas o fondos de amortización se refieren a una serie uniforme de flujos monetarios (*A*).

Ejemplo 3.11

Un préstamo de $30,000 deberá ser amortizado o pagado en 12 pagos mensuales, los cuales se efectuaran al final de cada mes, iniciando con el primer mes. La tasa es de 4% de interés compuesto mensual. ¿De qué magnitud resulta cada pago A?

Solución:

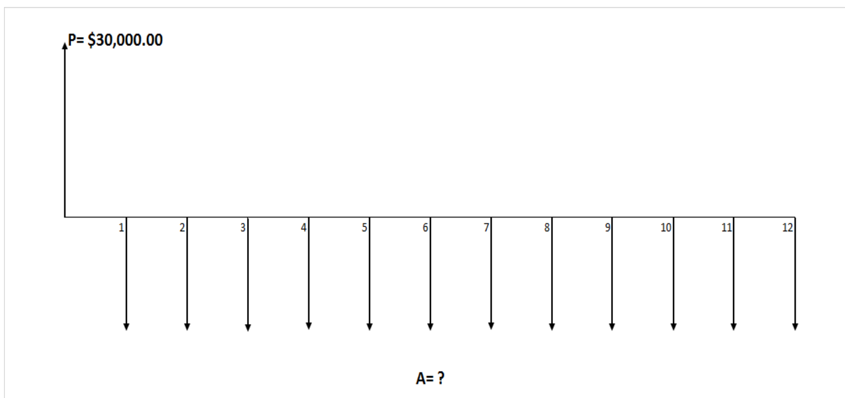
$P = \$30,000$

$A = \text{desconocido}$

$i = 4\% \ (IC)$

$N = 12$

Diagrama:



En la unidad 2 se dedujo la fórmula para hallar un valor uniforme (*A*), a partir de un valor actual o presente (*P*), es decir:

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] = 30,000(0.106552)$$

$$A = \$3,196.56$$

Nota

La estructura del diagrama de interés permite la aplicación directa de la fórmula, para encontrar A a partir de P, teniendo como valor de n una cantidad igual de periodos al horizonte de dicho diagrama $(n = 12)$.

Ejemplo 3.12

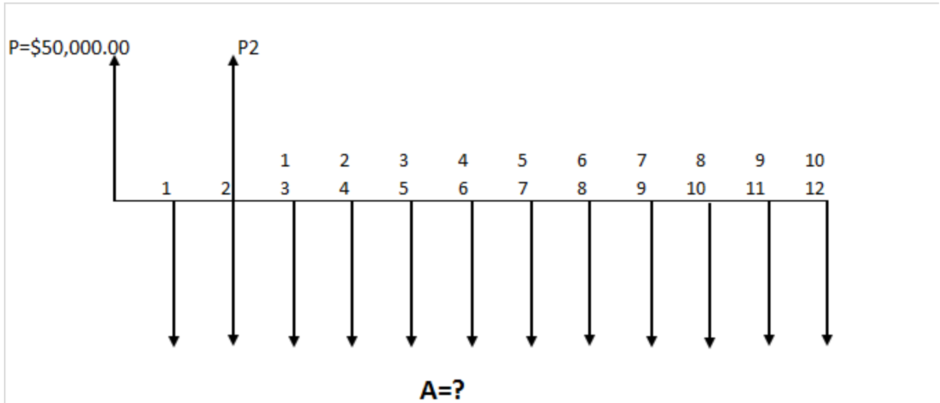
Se solicita un préstamo de $50, 000 para amortizarlo en 10 mensualidades, la condición de los pagos será a partir del final del mes 3 hasta el mes 12. La tasa de interés corresponde al 5% mensual compuesto.

Solución:

En este ejemplo se pueden suponer dos situaciones:

Si la institución que otorga el crédito no realiza ningún cargo o costo financiero a partir del presente hasta el final del mes 2, el problema se convierte en un caso igual al ejemplo anterior (ejemplo 3.11), ya que solo bastaría ubicar los $50, 000 en el punto 2 y resolver el problema del mismo modo que el ejemplo citado (ejemplo 3.11) con la expresión: hallar A dado P, $i = 5\%$ y $n = 10$.

Por otra parte, si quien presta cobra intereses desde **ahora**, el problema se resuelve de acuerdo con el siguiente diagrama:



Solución:

$P_0 =$ Valor actual del préstamo

$P_2 =$ Valor equivalente de P_0 en el punto 2

$i = 5\%$ mensual

$n_1 = 2$

$n_2 = 10$

$A =$ desconocido

$$P_2 = P_0\,(1+i)^2 = 50,000\,(1+0.05)^2 = 55,125$$

El valor de P_2 indica el nuevo capital que se tiene que amortizar durante un horizonte de $n = 10$, es decir:

$$A = P_2\left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] = 55{,}125\left[\frac{0.05\,(1+0.05)^{10}}{(1+0.05)^{10} - 1}\right] = 55,125\,(0.1295045)$$

$$A = \$7,138.94$$

Cierre de la unidad

¡Felicidades!

Freedigitalphotos.com

Has concluido la Unidad 3. Capitalización y amortización. Con esto también has finalizado el curso de Matemáticas financieras. ¡Muy bien! Ahora posees todas las herramientas que necesitas para tomar mejores decisiones financieras que te permitirán usar el dinero eficientemente. No olvides aplicar todo lo que has aprendido a la hora de gestionar y administrar PyME.

Fuentes de consulta

- Vidaurri, H. M. (2008). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: Cengage Learning.
- Díaz, A. y Aguilera, V. M. (1999). *Matemáticas financieras* (3ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Highland, E. H. y Rosenbaum, R. S. (1987). *Matemáticas financieras*. México: PrenticeHall Hispanoamericana.