UnADM
UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

Primer semestre

Álgebra lineal

U3 Determinantes

División de Ciencias de la Salud, Biológicas y Ambientales

Determinantes

Matriz. *Referencia de: https://www.flickr.com/*

Índice

Presentación

En esta unidad se trabaja con los determinantes; para calcular el determinante de una matriz, se utilizarán los menores y cofactores de la misma.

También se conocerán y aplicarán las propiedades de los determinantes, las cuales permitirán resolver de manera más rápida los cálculos. De hecho, si tiene una fila o columna de ceros, aplicando una de las propiedades de los determinantes y sin realizar ningún cálculo, se puede afirmar que el determinante es cero; el mismo caso ocurre cuando se tienen dos filas iguales o un múltiplo de la otra. La importancia de los determinantes es que permiten simplificar las operaciones para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Posteriormente, estudiarán algunos ejemplos en los que podrás ver la utilidad de lo que has aprendido en el curso de *Álgebra lineal.*

Finalmente, se dará solución al problema que has venido trabajando a lo largo de la asignatura: Sustancias que funcionan como super proteínas, ahora por el método de Cramer.

Competencia específica

Unidad 3	**Utiliza** los determinantes para resolver problemas de diversas áreas por medio de la regla de Cramer.

Propósitos

Utilizar las propiedades de los determinantes que te permitirán realizar los cálculos de una forma más rápida, para resolver problemas de ecuaciones por medio de la regla de Cramer. De esta forma, podrás resolver problemas de diversas áreas utilizando el álgebra lineal.

3.1. Bases de los determinantes

De acuerdo con Deivi (2006) los inicios de la teoría de determinantes de matrices datan del siglo II a.C., con los matemáticos chinos. La idea de determinante apareció en Japón y Europa casi al mismo tiempo. En Japón, fue Takakasu Seki Kowa (1642-1708) el primero en publicar un trabajo sobre este tema. En 1683, Seki escribió un manuscrito titulado *Método de resolver los problemas disimulados*, en el cual se incluyen algunos métodos matriciales expuestos en forma de tablas.

De las primeras menciones formales que se hicieron en Europa acerca de los determinantes, aunque aún bajo otros nombres, se encuentra la de Cardano, quien en su *Ars Magna* de 1545, mostró una regla para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a la cual llamó *regula de modo*. Esta regla forma parte de la que hoy se conoce como regla de Cramer y se aplica a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Posteriormente, durante el año 1683, Leibniz, mediante una carta dirigida a Guillaume de *l'Hôpital* (1661-1704), explicó que cierto sistema de ecuaciones lineales tiene solución; utilizó la palabra “resultante" para ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante y probó varios resultados sobre estos resultantes, incluyendo uno que, en esencia, se retoma en la regla de Cramer.

El matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746) utilizó determinantes en su *Treatise of Geometry,* para resolver sistemas de ecuaciones lineales de cuatro incógnitas. Este tratado fue publicado póstumamente en 1748. Su método fue popularizado dos años después por el matemático suizo Gabriel Cramer como Regla de Cramer, quien en 1750 la publicó en su *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*.

En esta sección se definirán los determinantes, estudiarás sus propiedades más importantes y cómo éstas hacen más sencillo el cálculo de aquéllos. También conocerás algunos conceptos relacionados, como el de menor y cofactor. Posteriormente, revisarás cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales por medio de los determinantes y finalizarás atendiendo algunos ejemplos de aplicaciones del álgebra lineal en diferentes áreas.

¿Sabías que…?

Gerolamo Cardano era médico de profesión y fue el pionero en la descripción de la fiebre tifoidea.

Cardano nació el 24 de septiembre de 1501, en Milán y murió el 21 de septiembre de 1576, en Roma. Su padre, Fazio Cardano, era abogado con una amplia experiencia en matemáticas, a tal grado que dio clases de geometría en la Universidad de Pavia, donde Leonardo da Vinci, al parecer amigo suyo, llegó a consultarlo sobre algunos temas de esta área.

El joven Gerolamo aprendió matemáticas con su padre al trabajar como asistente para él. Posteriormente, se decidió a estudiar medicina y se graduó en 1525, obteniendo una excelente reputación y reconocimiento.

Según una leyenda, Cardano predijo el día de su muerte utilizando la astrología y llegado el día se suicidó para hacer correcta la predicción.

En la actualidad, Gerolamo Cardano es más conocido por sus trabajos en diversas áreas de las matemáticas, tales como álgebra y probabilidad.

3.1.1. Introducción a los determinantes

Los determinantes están definidos para matrices cuadradas, es decir, de nxn. El determinante de una matriz cuadrada es un escalar (número). Se apoya en las matrices de 2x2 para describir cómo se obtienen los determinantes de matrices de orden superior.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define el determinante de A y se denota por |A| como sigue:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

Esta es la forma general en la que se define el determinante de una matriz de 2x2, que es el resultado de una multiplicación cruzada de los elementos de la matriz. Aquí puedes observar que el determinante de una matriz es un escalar. Dicho escalar permite obtener información sobre la matriz a partir de la cual se obtuvo; por ejemplo, el determinante de una matriz puede indicar si una matriz es invertible o no.

Para obtener el determinante de una matriz de 3 x 3, se utilizará la siguiente definición:

Sea la matriz A de 3 x 3 igual a $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces, se define el determinante de A (|A|) como sigue:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \; a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \; a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \; a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Ahora, se mostrarán ejemplos del cálculo de determinantes para comprender mejor la definición.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$; calcula el determinante de A.

Para encontrar el determinante se va a utilizar la definición; en este caso, se está trabajando con un determinante de 2x2, por lo cual se utilizará la primera definición. Para ello, se debe identificar en la matriz cada elemento de la definición; los elementos son:

$a_{11} = 3$ $\qquad a_{12} = 5$ $\qquad a_{21} = 4$ $\qquad a_{22} = 9$

Una vez que se han identificado los elementos que corresponden a la definición, se desarrollará el determinante, tal y como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} &= [(3)(9) - (4)(5)] \\ &= [27 - 20] \\ &= 7 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz A es 7.
Ahora, se va a calcular el determinante de una matriz de 3 x 3.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Calcula su determinante.

Nuevamente, se indican los elementos de la matriz que corresponden a la definición, de la siguiente manera:

$a_{11} = 3$ $a_{12} = 2$ $a_{13} = 7$
$a_{21} = 1$ $a_{22} = 5$ $a_{23} = 2$
$a_{31} = 3$ $a_{32} = 9$ $a_{33} = 4$

Se aplica la definición y se encuentra el determinante de A, como sigue:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Se resuelven los determinantes de 2 x 2 para poder completar el determinante de 3×3, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} |A| &= 3[(5)(4) - (9)(2)] - 2[(1)(4) - (3)(2)] + 7[(1)(9) - (3)(5)] \\ &= 3[20 - 18] - 2[4 - 6] + 7[9 - 15] \\ &= 3[2] - 2[-2] + 7[-6] \\ &= 6 + 4 - 42 \\ &= -32 \end{aligned}$$

Al observar este resultado, se debe tener en cuenta que en una matriz A el símbolo |A| no significa el valor absoluto de la matriz A, ya que el valor absoluto de un número siempre es positivo y por su parte, el determinante de una matriz puede ser tanto positivo como negativo.

El método mediante el cual se resolvió el determinante es conocido como método de expansión por cofactores. Más adelante se darán los detalles de la definición de dicho método.

Para resolver una matriz de 4 x 4, se tienen que resolver 4 determinantes de 3 x 3; de la misma manera, al resolver un determinante de 5 x 5, se tienen que resolver 5 determinantes de 4 x 4 e inductivamente se desarrollan los demás determinantes, de tal manera que al realizar un determinante de n x n con $n \geq 3$ se deben de realizar n determinantes de (n-1) x (n-1).

¿Sabías que…?

Pese a que hace más de dos mil años los matemáticos chinos habían descubierto ya un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales equivalente al método de Gauss y por lo tanto empleaban tablas con números que actualmente se conciben como arreglos de matrices y determinantes, la aparición formal de los determinantes en las matemáticas, fue hasta el siglo XVI, ¡más de un siglo antes que las matrices! cuyo tratamiento formal vio la luz hasta el siglo XIX. El término matriz fue creado por James Joseph Sylvester, tratando de dar a entender que era “la madre de los determinantes”.

3.1.2. Menores y cofactores de un determinante

Sea A una matriz cuadrada de n x n y sea M_{ij} la matriz de (n-1) x (n-1) que se obtiene eliminando de A la fila i y la columna j, a M_{ij} se le conoce como el menor ij de la matriz A.

Al desarrollar un determinante de la matriz A de n x n con $n \geq 3$ siempre se van a encontrar con al menos 3 de los menores de A; por ejemplo, cuando se calcula el determinante de la matriz

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, se encuentran con los siguientes tres menores:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$$
$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Aunque estos no son los únicos menores de A.

Debe de observarse que en una matriz de n x n con n > 2, se encuentran n x n menores.

Existe un concepto muy importante dentro de las matrices, específicamente hablando de los determinantes, el cual está íntimamente ligado al concepto de menores; dicho concepto es el de cofactor, el cual tiene la siguiente definición.

Definición de cofactor

Sea A una matriz de n x n. El cofactor ij de A, denotado por A_{ij}, se obtiene de la siguiente manera:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Esto significa que el cofactor ij de A se obtiene multiplicando $(-1)^{i+j}$ por el determinante del menor ij.

Como puedes ver, el signo del menor se cambia si la suma i + j es impar y se conserva si es par, ya que $(-1)^{i+j}$ da un negativo cuando i + j es impar, y da un positivo cuando i + j es par.

Ahora, están preparados para conocer cómo se define el método de expansión por cofactores.

Sea A una matriz de n x n, entonces, para obtener el determinante de A se realizan las siguientes operaciones:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

A la expresión anterior se le conoce como método de expansión por cofactores. Este método es el más utilizado en la mayoría de los textos para el cálculo del determinante de las matrices. Y aunque en algunos textos no hacen referencia a él, implícitamente lo utilizan ya que, si te fijas, utilizar los cofactores de A es igual que remitirte al determinante del menor cuando tapas la primera fila y vas recorriendo la columna.

En el cálculo del determinante de la matriz A de 3 x 3 del subtema anterior, se utilizaron 3 cofactores, los cuales son los siguientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = (1)(20-18) = (1)(2) = 2$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(4-6) = (-1)(-2) = 2$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = (1)(9-15) = (1)(-6) = -6$$

Dichos cofactores se multiplican por los números que forman la primera fila.
Si observas, estás haciendo lo mismo que al resolver los determinantes menores.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Revisa otro ejemplo más, para comprender como obtener el menor cofactor y el determinante de una matriz.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, calcula su determinante indicando los menores y cofactores que utilices para ello.

Se va a desarrollar el determinante de A, utilizando los menores y cofactores de A; para esto, primero se obtiene los menores de la siguiente manera:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \qquad M_{14} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 8 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Una vez que se tiene los menores, se va a obtener el determinante de cada uno de ellos como sigue:

$$|M_{11}| = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 2[2-15] - 5[12-18] + 4[30-6]$$
$$= -26 + 30 + 96$$
$$|M_{11}| = 100$$
$$|M_{12}| = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 4[2-15] - 5[16-3] + 4[40-1]$$
$$= -52 - 65 + 156$$
$$|M_{12}| = 39$$
$$|M_{13}| = 4\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 4[12-18] - 2[16-3] + 4[48-6]$$
$$= -24 - 26 + 168$$
$$|M_{13}| = 118$$
$$|M_{14}| = 4\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 4[30-6] - 2[40-1] + 5[48-6]$$
$$= 96 - 78 + 210$$
$$|M_{14}| = 228$$

Ahora que se ha encontrado el determinante de cada uno de los menores, se van a obtener los cofactores correspondientes a dichos menores, tal y como se muestra a continuación.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$
$$A_{11} = (-1)^{1+1}(|M_{11}|)$$
$$A_{11} = (-1)^{2}(100)$$
$$A_{11} = (1)(100)$$
$$A_{11} = 100$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}(|M_{12}|)$$
$$A_{12} = (-1)^{3}(39)$$
$$A_{12} = (-1)(39)$$
$$A_{12} = -39$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}(|M_{13}|)$$
$$A_{13} = (-1)^{4}(118)$$
$$A_{13} = (1)(118)$$
$$A_{13} = 118$$
$$A_{14} = (-1)^{1+4}(|M_{14}|)$$
$$A_{14} = (-1)^{5}(228)$$
$$A_{14} = (-1)(228)$$
$$A_{14} = -228$$

Una vez que se obtiene los cofactores, se aplica el método de expansión por cofactores para encontrar el determinante de A.

Primero, se coloca la ecuación para calcular el determinante de A, a partir de sus cofactores, la cual es la siguiente:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

Únicamente se toman cuatro elementos debido a que A es una matriz de 4 x 4; la forma de expansión por cofactores se refiere a una matriz de n x n y en este caso n = 4, de ahí que suceda esto.

Entonces, los elementos que hacen falta para aplicar la fórmula anterior son:
$a_{11} = 1$ $a_{12} = 7$ $a_{13} = 9$ $a_{14} = 0$

Ahora que se tienen todos los elementos se aplica la fórmula de expansión por cofactores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |A| &= (1)(100) + (7)(-39) + (9)(118) + (0)(-228) \\ &= 100 - 273 + 1062 + 0 \\ &= 889 \end{aligned}$$

Advierte que mientras mayor es la matriz, mayor es el número de operaciones que tienes que realizar para encontrar su determinante; en este caso, se calculó a partir de los menores que se obtuvieron utilizando la primera fila; debes tener en cuenta que los menores se pueden obtener utilizando cualquier fila o cualquier columna de una matriz; quizás los cálculos sean diferentes, pero el resultado final siempre será el mismo.

Esto significa que puedes obtener el determinante a partir de cualquier fila o columna de la matriz y no necesariamente a partir de la primera fila, como se desarrolló aquí.

3.1.3. Propiedades de los determinantes

Existen diferentes situaciones por las cuales muy a menudo pasan, por ejemplo, si tuvieran que subir a un edificio de 4 pisos, simplemente utilizando las escaleras. Sin embargo, si tuvieran que subir a la azotea de un edificio de 70 pisos, subir por las escaleras será algo demasiado agotador y causaría una gran pérdida de tiempo. Por esta razón, la gente prefiere utilizar un elevador para estos casos, ya que eso facilita el trabajo de la subida.

De la misma manera ocurre con los determinantes; como ya se percataron, realizar un determinante de 3 x 3 implica una gran cantidad de operaciones, realizar un determinante de 4 x 4 requiere al menos el cuádruple de las operaciones que se usaron para obtener un determinante de 3 x 3. ¡Imagina si quisieras obtener un determinante de 30 x 30! Serían necesarios varios días para realizarlo. Además, en caso de un error en algún cálculo, habría que volver a realizar las operaciones en más de una ocasión; para esos casos, se pueden ayudar con las propiedades que poseen los determinantes, lo cual se presenta a continuación.

Las propiedades de los determinantes se utilizan para facilitar su cálculo y minimizando el trabajo a realizar para obtenerlo.

Se tienen las siguientes propiedades de los mismos:

Propiedad 1.

Sea A una matriz de n x n; si A tiene una fila o una columna de ceros, entonces |A|= 0.

Para ejemplificar esta propiedad se va a desarrollar el siguiente determinante.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula su determinante.

De entrada, por la propiedad anterior, se sabe que el determinante de esta matriz es cero. Para probar esto se va a desarrollar por medio de la expansión por cofactores como sigue.

Se encuentra el determinante de los menores; en esta ocasión utilizando la fila 3, de la siguiente manera:

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 45 - 6$$
$$|M_{31}| = 39$$
$$|M_{32}| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 25 - 4$$
$$|M_{32}| = 21$$
$$|M_{33}| = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 30 - 36$$
$$|M_{33}| = -6$$

A continuación, se calculan los respectivos cofactores, los cuales son los siguientes:

$$A_{31} = (-1)^{3+1}(|M_{31}|)$$
$$A_{31} = (1)(39)$$
$$A_{31} = 39$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2}(|M_{32}|)$$
$$A_{32} = (-1)(21)$$
$$A_{32} = -21$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}(|M_{33}|)$$
$$A_{33} = (1)(-6)$$
$$A_{33} = -6$$

Ahora se toman los elementos de la tercera fila de A para desarrollar la expansión por cofactores, los cuales son los números cero.

$a_{31} = 0$ $\quad\quad\quad$ $a_{32} = 0$ $\quad\quad\quad$ $a_{33} = 0$

Finalmente, se calcula el determinante de A tal y como se muestra a continuación:

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$
$$|A| = (0)(39) + (0)(-21) + (0)(-6)$$
$$|A| = 0 + 0 + 0$$
$$|A| = 0$$

De igual manera, si se utilizará cualquier otra fila o columna de A, se obtendría de nueva cuenta el mismo resultado. A su vez, si A tuviera cualquier otra fila o cualquier otra columna completa de ceros, su determinante sería cero. Lo único que se requeriría hacer es tomar dicha fila o dicha columna de ceros, como en este caso.

Propiedad 2.

Sea A una matriz de n x n; si se multiplica a una fila o columna de A por un escalar c, entonces el determinante de A se multiplicaría por c.

Para comprender esta propiedad, se tiene el siguiente ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ -7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; se van a comparar los determinantes de la matriz A y de la matriz B, donde B es la matriz que se obtiene de multiplicar la segunda columna de A por 3, dicho de otra manera.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ -7 & 18 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora que conoces el método de expansión por cofactores, queda a tu disposición la mejor manera para reducir tus operaciones. De ahora en adelante se realizará sin explicaciones detalladas y con la reducción de operaciones, tal y como sigue.

$$|A| = 3(-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} + 6(-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$|A| = -3(32) - 1(33) - 6(-14)$$
$$|A| = -96 - 33 + 84$$
$$|A| = -45$$

Mientras que:
$$|B| = 9(-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} + (-3)(1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} + 18(-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$|B| = -9(32) - 3(33) - 18(-14)$$
$$|B| = -288 - 99 + 252$$
$$|B| = -135$$

Al comparar los determinantes de A y B y por la propiedad anterior, se tiene que se debe de cumplir que el determinante de B sea igual a tres veces el determinante de A, es decir,
$$|B| = 3|A|$$

Lo anterior quiere decir que, si se sustituye el valor del determinante de A y el de B en la ecuación anterior, se debe de llegar a una identidad; se hacen las sustituciones correspondientes para verificar tal identidad:

$$|B| = 3|A|$$
$$-135 = 3(-45)$$
$$-135 = -135$$

Tal y como se esperaba, se llegó a una identidad, lo cual da una idea de cómo comprobar la segunda propiedad de los determinantes, la idea de esta propiedad no es la de crear una matriz con valores más grandes, sino encontrar algún divisor de la matriz que permita hacer más pequeños a los elementos de la misma.

Si observas, lo que se hizo fue obtener los determinantes a partir de la columna que se multiplico por tres. Esto es como multiplicar cada menor de A por 3, dándote una idea de qué es lo que sucede en un caso general.

Propiedad 3.

Sean A, B y C tres matrices con las mismas dimensiones. Si A, B y C son iguales, excepto por una columna, o fila, y dicha columna, o fila, en C es la suma de las mismas columnas, o filas, en A y B, entonces

$$|C| = |A| + |B|$$

Dicho de otra manera, si la columna, o fila, j de C es la suma de la columna, o fila, j de A más la columna, o fila, j de B, entonces el determinante de C es la suma de los determinantes de A y B, siempre y cuando las demás columnas, o filas, de las tres matrices sean idénticas.

Se va a realizar un ejemplo de esta propiedad para observar la ayuda en cuanto a ahorro de tiempo y de operaciones que permite el utilizarla, cuando se cumplen las condiciones necesarias para su aplicación.

Sean A y B dos matrices, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la suma del determinante de A con el determinante de B.

Para encontrar la suma de los determinantes, primeramente, se tiene que calcular el determinante de cada una de las matrices, tal y como sigue:

$$|A| = 4(1)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$
$$|A| = 4(7-6) - 1(1-18) + 1(2-42)$$
$$|A| = 4 + 17 - 40$$
$$|A| = -19$$

$$|B| = 5(1)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$
$$|B| = 5(7-6) - 3(1-18) + 1(2-42)$$
$$|B| = 5 + 51 - 40$$
$$|B| = 16$$

Se tiene entonces que la suma de los determinantes de A y B está dada por

$$|A| + |B| = -19 + 16$$
$$= -3$$

Debido a que las operaciones fueron simplificadas, no se distingue la gran cantidad de operaciones que se realizaron para encontrar esta suma. Sin embargo, aun cuando la suma anterior puede verse mucho más simple si se aplica la propiedad 3 de los determinantes, para esto, lo que se hace es por inspección distinguir dos filas o columnas de A y B que sean idénticas, si existen; entonces, se forma una nueva matriz con estas dos filas o columnas y a continuación se construye la que haga falta medio de la suma de la fila o columna de A y B que son distintas; aplicando esto, se puede construir para éste ejemplo la siguiente matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De la cual, al obtener su determinante, éste debe de ser igual a la suma de los determinantes de A y B.

$$|C| = 9(1)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$
$$|C| = 9(7-6) - 4(1-18) + 2(2-42)$$
$$|C| = 9 + 68 - 80$$
$$|C| = -3$$

Tal y como puede observarse, el proceso de obtener la suma de los determinantes de dos o más matrices puede simplificarse, siempre y cuando las matrices que se utilizan cumplan las condiciones que pide la propiedad 3; de ser así, permiten un ahorro de tiempo y esfuerzo.

Si te das cuenta, lo que se hizo fue obtener los determinantes a partir de la columna que era diferente. Por ello, todos los menores quedaron igual y lo que variaba era el número por el cual se iban multiplicando los menores. Así, la obtención del determinante de la matriz C es como sumar las entradas de la columna diferente para A y B y multiplicarlas por el menor, el cual no cambia. Esto debe darte una idea de qué es lo que sucede en un caso general.

Propiedad 4.

Si A es una matriz de n x n, al intercambiar dos filas o columnas distintas de A, su determinante cambia de signo.

Uno de los usos que se le puede dar a esta propiedad es el de establecer un saldo en contra, ya sea en cuanto a capital o en cuanto a materia prima.

Se va a realizar el siguiente ejemplo, para dar uso a esta propiedad.
Sean A y B dos matrices de 3 x 3, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Encuentra los determinantes de A y de B y compáralos.
Lo primero que se hace es calcular el determinante de A y el de B:

$$|A| = 1(1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 5(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3(1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$|A| = 1(8+2) - 5(-4-3) + 3(2-6)$$
$$|A| = 10 + 35 - 12$$
$$|A| = 33$$

$$|B| = 1(1)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3(1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$|B| = 1(-2-8) - 5(3+4) + 3(6-2)$$
$$|B| = -10 - 35 + 12$$
$$|B| = -33$$

Advierte que, las matrices A y B son idénticas, con la diferencia de que la primera y segunda columnas están intercambiadas entre una y otra matriz; debido a esto, el signo del determinante de las matrices es distinto.

Como podrás darte cuenta, lo que se hizo fue obtener los determinantes a partir de la fila que permaneció estable. Como las otras filas se intercambiaron, resultó que todos los menores quedaron iguales en cuanto a sus cantidades, pero con signos contrarios. Por ello, los determinantes son iguales en valor absoluto, pero tienen signos contrarios. Esto debe darte una idea de qué es lo que sucede en un caso general.

Propiedad 5.

Sea A una matriz de n x n; si A tiene dos filas o columnas iguales, entonces su determinante es cero.

Cuando se encuentra la inversa de una matriz que posea dos filas o columnas iguales, se identifica al instante que su determinante es cero; gracias a esta propiedad, se puede establecer de inmediato que dicha matriz no es invertible, por lo cual no tiene inversa. Observen el siguiente ejemplo.

Sea A una matriz de 3 x 3, donde

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 15 \\ 42 & 16 & 99 \\ 42 & 16 & 99 \end{pmatrix}$$

El valor de los elementos de A es más grande de los que comúnmente sea realizado hasta el momento; van a resolver esta matriz como en los ejemplos anteriores, aplicando la expansión por cofactores; obviamente por la propiedad que se acaba de anunciar el determinante de esta matriz es cero.

Ahora van a desarrollar el determinante de A como sigue:

$$|A| = (9)\begin{vmatrix} 16 & 99 \\ 16 & 99 \end{vmatrix} - (7)\begin{vmatrix} 42 & 99 \\ 42 & 99 \end{vmatrix} + (15)\begin{vmatrix} 42 & 16 \\ 42 & 16 \end{vmatrix}$$
$$|A| = (9)(1584 - 1584) - (7)(4158 - 4158) + (15)(672 - 672)$$
$$|A| = 9(0) - (7)(0) + (15)(0)$$
$$|A| = 0 - 0 + 0$$
$$|A| = 0$$

Noten la diferencia que existe entre utilizar la propiedad 4 y calcular el determinante de A por medio de la expansión por cofactores; obviamente es mucho más rápido decir que el determinante es cero por medio de la propiedad, que descubrirlo por medio de las operaciones. Este ejemplo visualiza el hecho de que se simplifica el obtener un determinante si dos columnas o filas de una matriz son iguales.

Si prestas atención, lo que se hizo fue obtener el determinante a partir de la fila que era diferente. Como las otras dos filas eran iguales, y los menores se obtienen multiplicando cruzado, entonces se obtienen cantidades absolutamente iguales, pero con signos contrarios. Por ello, todos los menores quedaron iguales a cero. Para obtener el determinante de una matriz de dimensión mayor a 3X3 se van utilizando los renglones o las columnas que sean distintas. Al final se llega a las columnas o filas iguales. Esos menores dan cero, y como multiplican otros números, entonces los resultados van dando ceros. Esto debe darte una idea de qué es lo que sucede en un caso general.

Propiedad 6.

Sea A una matriz de n x n; si una fila o columna de A es un múltiplo escalar de otra fila o columna, entonces, el determinante de A es cero.

Esta propiedad, al igual que la anterior, permite hacer un total de cero operaciones para encontrar el determinante de una matriz que cumpla con las condiciones necesarias para su aplicación; al respecto, se tiene el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Sea A una matriz de 3 x 3, donde

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 12 \\ 11 & 21 & 63 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

Puedes apreciar que la columna 2 multiplicada por 3 es igual a la columna 3. Calcula el determinante de A.

El determinante de A, es igual a:

$$\begin{gathered} |A| = (-9)(1)\begin{vmatrix} 21 & 63 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} + 11(-1)\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} + 6(1)\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 21 & 63 \end{vmatrix} \\ = (-9)(-189+189) - (4)(-36+36) + (12)(252-252) \\ = (-9)(0) - 4(0) + (12)(0) \\ = 0 - 0 + 0 \\ |A| = 0 \end{gathered}$$

Las operaciones efectuadas no fueron demasiadas debido a que se trataba de un determinante de 3 x 3, pero, aun así, se pueden resumir a nada; esto se logra analizando los elementos de la matriz. Si te percatas, existe un parecido entre las columnas 2 y 3, como ya observaron; la columna 3 resulta de multiplicar a la columna 2 por tres, lo cual hace que A cumpla con las condiciones necesarias para aplicar las propiedades 1 y 5 e identificar de inmediato que el determinante de A es cero.

Si observas, lo que se hizo fue obtener el determinante a partir de la columna que no era múltiplo. Como las otras dos columnas era un múltiplo de la otra, y los menores se obtienen multiplicando cruzado, entonces se obtienen cantidades absolutamente iguales, pero con signos contrarios. Por ello, todos los menores quedaron iguales a cero. Para obtener el determinante de una matriz de dimensión mayor a 3X3 se van utilizando los renglones o las columnas que no sean múltiplos. Al final se llega a las columnas o filas que son múltiplos. Esos menores dan cero, y como multiplican otros números, entonces los resultados van dando ceros. Esto debe darte una idea de qué es lo que sucede en un caso general.

Propiedad 7.

Sea A una matriz de n x n. Si se realiza la suma de un múltiplo escalar de una fila o columna de A con otra fila o columna de A, entonces el determinante de A se conserva.

Lo que dice esta propiedad es que si se hace el producto de un escalar por una fila o columna de una matriz y el resultado lo suman a otra fila o columna de la misma matriz, entonces el determinante se mantiene igual, es decir, no cambia.

Vean el siguiente ejemplo para comprender más a fondo esta propiedad.
Sea A una matriz de 3 x 3 donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 12 \\ 17 & 26 & 93 \\ -7 & -20 & -11 \end{pmatrix}$$

Y sea B la matriz que resulta de sumar a la fila 2 el triple de la fila 3, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 12 \\ -4 & -34 & 60 \\ -7 & -20 & -11 \end{pmatrix}$$

Calcula los determinantes de A y B y compáralos entre sí.
Entonces, se calcula el determinante de A y de B como sigue:

$$|A| = 17(-1)\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ -20 & -11 \end{vmatrix} + 26(1)\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ -7 & -11 \end{vmatrix} + 93(-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -20 \end{vmatrix}$$
$$|A| = -17(-44+240) + 26(-33+84) - 93(-60+28)$$
$$|A| = -17(196) + 26(51) - 93(-32)$$
$$|A| = -3332 + 1326 + 2976$$
$$|A| = 970$$

$$|B| = -4(-1)\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ -20 & -11 \end{vmatrix} + (-34)(1)\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ -7 & -11 \end{vmatrix} + 60(-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -20 \end{vmatrix}$$

$$|B| = 4(-44 + 240) - 34(-33 + 84) - 60(-60 + 28)$$
$$|B| = 4(196) - 34(51) - 60(-32)$$
$$|B| = 784 - 1734 + 1920$$
$$|B| = 970$$

Como puedes ver, los determinantes de ambas matrices son iguales, de lo cual se infiere que la propiedad 7 sí se cumple para los determinantes de las matrices dadas.

Esta última propiedad puede utilizarse para aquellos casos en los cuales por medio de una operación con renglones se puede simplificar la matriz y con ello el cálculo de su determinante; de esta manera, se ahorra tiempo y operaciones.

Si bien aprecias lo anterior, lo que se hizo fue obtener el determinante a partir de la fila que sufrió los cambios. Como las otras dos filas no se alteran, los menores permanecen iguales en ambas matrices. Así, lo que se altera es el renglón de los números que van a multiplicar a los cofactores. Pero como se obtiene estos multiplicando por el mismo escalar y sumando los correspondientes números del otro renglón, entonces lo que se aumenta en una parte se quita en la otra ¿Lo observaste? Esto debe darte una idea de qué es lo que sucede en un caso general.

¿Sabías que…?

Algunos de los más grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX contribuyeron al desarrollo de las propiedades de los determinantes. La mayoría de los historiadores coinciden en afirmar que la teoría de los determinantes se originó con el matemático alemán Goofried Wilhelm Leibniz (1646-1716) quien fue con Newton, el co inventor del cálculo diferencial e integral. Leibniz empleó los determinantes en 1693 en relación con los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. No obstante, hay quienes creen que el matemático japonés Seki Kowa hizo lo mismo unos 10 años antes.

En 1858, el matemático inglés Arthur Cayley publicó unas "Memorias sobre la teoría de matrices" en la que daba la definición de matriz y las operaciones suma de matrices, de producto de un número real por una matriz, de producto de matrices y de inversa de una matriz. Cayley afirma que obtuvo la idea de matriz a través de la de determinante y también como una forma conveniente de expresar transformaciones geométricas.

3.2. Solución de sistemas lineales por determinantes

En la unidad anterior se estudió la forma de resolver sistemas de ecuaciones lineales a partir de la matriz asociada a tales sistemas.

En este tema se van a resolver algunos sistemas de ecuaciones lineales utilizando un método que se conoce como la regla de Cramer y está basado en la obtención de ciertos menores y cofactores de algunos determinantes relacionados a matrices asociadas al sistema de ecuaciones.

La regla de Cramer da solución a un sistema de ecuaciones lineales en términos de ciertos determinantes, asociados con la matriz de dicho sistema. Recuerda que recibe su nombre debido a que éste método fue publicado en 1750 por el matemático suizo Gabriel Cramer en su libro *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.*

Aunque la regla de Cramer es un método muy útil en la solución de ciertos sistemas de ecuaciones, su aplicación resulta ineficiente para matrices grandes, pues es sumamente laboriosa para sistemas de más de cuatro incógnitas y por ello suele no ser usado en aplicaciones que involucran muchas ecuaciones.

3.2.1. Regla de Cramer

La regla de Cramer es uno de los métodos más sencillos que se utilizan para resolver un sistema de ecuaciones lineales y se utiliza por medio de las matrices y sus determinantes. Además, relaciona la solución de los sistemas de ecuaciones lineales con el determinante de la matriz asociada a dicho sistema.

Ya vieron que un sistema de ecuaciones lineales puede representarse como:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Para trabajar con la regla de Cramer, a partir de una matriz A, se deben construir otras matrices, las cuales se denotarán como A_i. Cada A_i es idéntica a A, excepto por la columna *i*. En cada A_i la columna *i* será reemplazada por el vector **b**. De esta manera, al obtener los determinantes de cada una de las matrices formadas, se podrá aplicar la regla de Cramer.

Se representan los determinantes obtenidos de las matrices A_i como sigue.

$$
\begin{aligned}
D_1 &= |A_1| \\
D_2 &= |A_2| \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
D_n &= |A_n|
\end{aligned}
$$

y

$$D = |A|$$

Una vez que ya sean establecidos todos estos elementos, se puede dar a conocer la regla de Cramer, la cual establece lo siguiente:

Sea A una matriz de n x n tal que $|A| \neq 0$, entonces, el sistema A**x**=**b** tiene como única solución a $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$.

Donde

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{D_1}{D} \\
x_2 &= \frac{D_2}{D} \\
x_3 &= \frac{D_3}{D} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
x_n &= \frac{D_n}{D}
\end{aligned}
$$

Donde, $D_i$representa el determinante de la matriz A_i y D representa el determinante de A.

Verán el siguiente ejemplo, para comprender la regla de Cramer.

Ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer.

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 11 \\
7x_1 + x_2 - 9x_3 &= -4 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

Lo primero que deben hacer es recordar cómo se representa un sistema de ecuaciones por medio de matrices y vectores, es decir, la forma:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Para el sistema anterior se tiene que los datos correspondientes son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & -9 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Con esto, se puede representar el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & -9 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Una vez que se tiene la matriz A asociada del sistema y su vector b de constantes, se pueden encontrar los elementos que se necesitan para aplicar la regla de Cramer.

Primero, se encuentran las submatrices A_i; para ello se debe reemplazar en A la columna *i* por *b*, de la siguiente manera:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & -9 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ 7 & -4 & -9 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 7 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

A continuación, encontraran los determinantes de las submatrices anteriores.

$$D_1 = |A_1|$$
$$= 11(2+27) - (-2)(-8+45) + 5(-12-5)$$
$$= 319 + 74 - 85$$
$$D_1 = 308$$
$$D_2 = 3(-8+45) - 11(14+9) + 5(35+4)$$
$$= 111 - 253 + 195$$
$$D_2 = 53$$
$$D_3 = 3(5+12) - (-2)(35+4) + 11(21-1)$$
$$= 51 + 78 + 220$$
$$D_3 = 349$$

Ahora, se encuentra el determinante de la matriz principal A.

$$D = |A|$$
$$D = 3(2 + 27) - (-2)(14 + 9) + 5(21 - 1)$$
$$D = 87 + 46 + 100$$
$$D = 233$$

En este momento, se tiene todos los elementos que se necesitan para aplicar la regla de Cramer, lo cual se hace a continuación.

Para una matriz de 3 x 3, la regla de Cramer establece que la solución de un sistema de ecuaciones lineales está dada por:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$
$$x_2 = \frac{D_2}{D}$$
$$x_3 = \frac{D_3}{D}$$

De esta manera, para el sistema de ecuaciones lineales, se tiene que la solución única es:

$$x_1 = \frac{308}{233}$$
$$x_2 = \frac{53}{233}$$
$$x_3 = \frac{349}{233}$$

Como ya se había comentado, la regla de Cramer relaciona un sistema de ecuaciones con su determinante para encontrar la solución que satisface las condiciones de dicho sistema lineal.

3.3. Ejemplos de aplicación

El álgebra lineal tiene una gran cantidad de aplicaciones en muchos campos del conocimiento humano, tanto en ciencias sociales como en ingenierías y en las llamadas ciencias exactas. El objetivo del siguiente tema es, justamente, mostrar esa utilidad del álgebra lineal y en particular de lo que estudiaste a lo largo de este curso, en tu área de estudio.

Esto se logrará a través del desarrollo de algunos ejemplos de aplicaciones de matrices y de determinantes. Recuerda que uno de los pilares de las matrices son los vectores. A su vez, las matrices dan pie al estudio de los determinantes. De esta manera, a través de los ejemplos que aquí se estudian, podrás ver también cómo interactúan y se complementan todos los temas que viste en esta asignatura.

3.3.1. Aplicación de matrices

A continuación, se presentan algunas aplicaciones de matrices.

Ejemplo: gráficos de computador

El diseño asistido por computador (CAD) le ahorra a la Ford Motor Company millones de dólares cada año. Adoptados por primera vez por Ford a principios de 1970, CAD y CAM (fabricación asistida por computador) han revolucionado la industria automovilística. Hoy día, los gráficos por computador constituyen el corazón, y el álgebra lineal el alma del diseño moderno de automóviles.

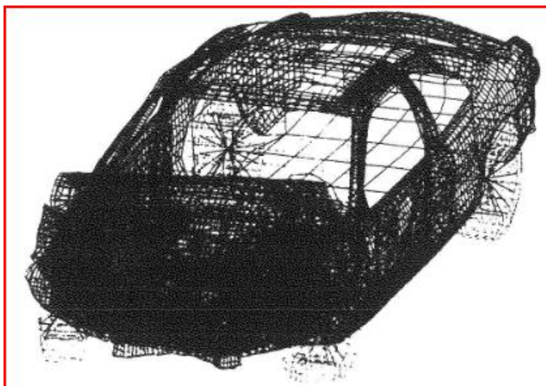
Muchos meses antes de que se construya un nuevo modelo de automóvil, los ingenieros diseñan y construyen un automóvil matemático: un modelo de alambre que existe solamente en la memoria de un computador y en las terminales de exhibición de gráficos. (Arriba se muestra el Lincoln Mark VIII de 1993)**.** Este modelo matemático organiza e influye en cada paso del diseño y fabricación del automóvil.

Trabajando en más de 2600 estaciones de trabajo para gráficos, los ingenieros de Ford perfeccionan el diseño original, esculpen las líneas fluidas de la carrocería, ponen a prueba la capacidad de las láminas de metal para soportar las deformaciones y los dobleces necesarios para producir la carrocería, ajustan la colocación de los asientos interiores, planean y disponen las partes mecánicas, y producen los planos de ingeniería para los miles de componentes que los proveedores fabricarán. Los ingenieros inclusive hacen pruebas de carretera para la suspensión del carro matemático, colocan al automóvil en un túnel de viento matemático y ¡hacen repetidas pruebas de colisión del auto en el computador!

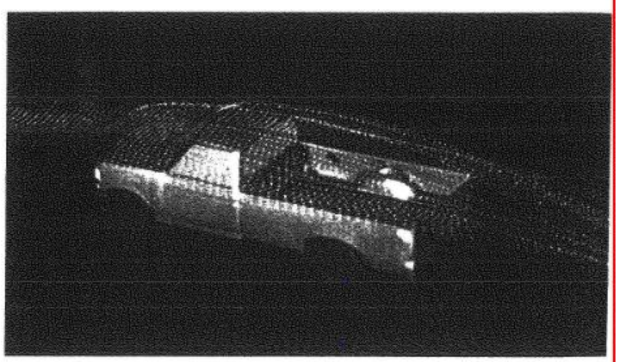
El modelo de alambre del automóvil se almacena en muchas matrices de datos para cada componente principal. Cada columna de una matriz enumera las coordenadas de un punto sobre la superficie del componente. Las demás columnas describen cuáles puntos se deben conectar con curvas; un escáner tridimensional genera los puntos de datos originales pasando sensores por un modelo de arcilla de tamaño natural del automóvil. Las piezas individuales del interior del automóvil también se almacenan como matrices de datos. Los componentes más pequeños se trazan con software de gráficos por computador en la pantalla y las piezas mayores se forman ensamblando matemáticamente los componentes más pequeños.

Posteriormente, los programas matemáticos generan más puntos, curvas y datos de color para *interpretar y dibujar* la superficie exterior del automóvil, haciendo que éste se vea tan real en la pantalla que parezca un automóvil de verdad en la sala de exhibición de un distribuidor. Los clientes potenciales opinan mientras el automóvil gira en el “piso de la sala de exhibición”. Si a los clientes no les gusta, el diseño puede cambiarse *antes* de que se construya el coche real.

Ya sea que trabajen en el diseño general de la carrocería o modifiquen un componente pequeño, los ingenieros llevan a cabo varias operaciones básicas sobre imágenes gráficas, como cambiar la orientación o la escala de una figura, hacer un acercamiento de alguna región pequeña o cambiar entre vistas bi y tridimensionales. El álgebra lineal es en verdad el “alma” del software de gráficos porque todas las manipulaciones de imágenes en la pantalla se logran mediante técnicas de álgebra lineal.



Un modelo de alambre en una prueba de colisión.



Un camión en un túnel de viento matemático.

Se ha visto que los determinantes están estrechamente ligados con las matrices. Por ello, casi cualquier problema que pueda ser resuelto mediante matrices podrá ser resuelto mediante determinantes.

Ahora se resolverá un ejercicio.

Ejercicio: fertilizantes básicos

Un grupo de ingenieros de varias áreas está analizando cinco compuestos que forman tres tipos de fertilizantes básicos I, II y III. Las cantidades se miden en gramos. Pueden obtenerse fertilizantes especiales resolviendo combinaciones de los tres tipos básicos. Es decir, los fertilizantes especiales pertenecen al espacio generado por los tres vectores que representan los fertilizantes básicos. El objetivo del estudio es crear nuevos fertilizantes que dañen menos el ambiente y el suelo.

Las cantidades de cada compuesto que forman cada uno de los fertilizantes básicos están dado en gramos y se expresan por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{Fertilizante I} & \text{Fertilizante II} & \text{Fertilizante III} \end{array} \\ \text{Compuesto} & \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 0 & 20 \\ 15 & 50 & 10 \\ 25 & 15 & 30 \\ 20 & 15 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los ingenieros desean obtener un fertilizante con las siguientes cantidades:

2,200 gramos del compuesto A, 1,900 del compuesto B, 1,950 del compuesto C; 2,550 del compuesto D y 1,400 del compuesto E.

Si esto es posible, ¿qué cantidad de cada fertilizante básico se necesitaría para formar el fertilizante especial?

Se llamará x_1, x_2 y x_3 a las cantidades que se utilizarán de los fertilizantes básicos I, II y III, respectivamente.

Se construye el sistema de ecuaciones a partir de los datos dados y de lo que se desea obtener:

Se utilizarán x_1, x_2 y x_3 gramos de los fertilizantes básicos I, II y III, respectivamente, por compuesto A, B. C, D y E, para obtener las cantidades deseadas de cada uno en la mezcla:

Compuesto	Fertilizante I		Fertilizante II		Fertilizante III		Cantidades deseadas por compuesto
A	$10x_1$	+	$20x_2$	+	$30x_3$	=	2200
B	$30x_1$	+	$0x_2$	+	$20x_3$	=	1900
C	$15x_1$	+	$50x_2$	+	$10x_3$	=	1950
D	$25x_1$	+	$15x_2$	+	$30x_3$	=	2550
E	$20x_1$	+	$15x_2$	+	$10x_3$	=	1400

Se obtiene la matriz ampliada asociada al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 20 & 30 & 2200 \\ 30 & 0 & 20 & 1900 \\ 15 & 50 & 10 & 1950 \\ 25 & 15 & 30 & 2550 \\ 20 & 15 & 10 & 1400 \end{array}\right)$$

La matriz no es una matriz cuadrada, ya que está asociada a un sistema de cinco ecuaciones con tres incógnitas. Vean qué sucede al aplicar el método de Gauss.

Se realizan operaciones sobre la matriz:

Se divide entre 10 cada renglón, así se obtiene el primer 1, de la entrada a_{11}, y se facilitan las siguientes operaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 3 & 0 & 2 & 190 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 & 195 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 3 & 255 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 & 140 \end{array}\right)$$

Se multiplica por 3 el primer renglón y al resultado se le resta el segundo renglón. Lo obtenido se coloca en el segundo renglón:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 6 & 7 & 470 \\ \frac{3}{2} & 5 & 1 & 195 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 3 & 255 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 & 140 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 6 & 7 & 470 \\ 0 & -2 & \frac{7}{2} & 135 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 3 & 255 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 & 140 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 6 & 7 & 470 \\ 0 & -2 & \frac{7}{2} & 135 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & 295 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 & 140 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 6 & 7 & 470 \\ 0 & -2 & \frac{7}{2} & 135 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & 295 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 & 300 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 6 & 7 & 470 \\ 0 & -2 & \frac{7}{2} & 135 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & 295 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & -2 & \frac{7}{2} & 135 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & 295 \\ 0 & 6 & 7 & 470 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & 375 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & 295 \\ 0 & 6 & 7 & 470 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & 295 \\ 0 & 6 & 7 & 470 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 7 & 9 & 590 \\ 0 & 6 & 7 & 470 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 5 & 250 \\ 0 & 0 & 5 & 250 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 220 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Se puede observar que para las tres últimas filas de la matriz son iguales: 0, 0, 1 y 50, justo en ese orden.

Por lo tanto, según el método de Gauss, x_3 es siempre igual a 50, de donde se deduce que el sistema sí tiene solución y ésta es única. Si los valores asociados a x_3 hubieran resultado diferentes para las filas 3, 4 y 5, el sistema no tendría solución.
Según el método de Gauss:

$$x_3 = 50$$

De donde

$$x_2 + 2x_3 = 120$$

Entonces

$$x_2 + 2(50) = 120$$

$$x_2 + 100 = 120$$

$$x_2 = 120 - 100$$

$$x_2 = 20$$

Y

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 220$$

Entonces

$$x_1 + 2(20) + 3(50) = 220$$

$$x_1 + 40 + 150 = 220$$

$$x_1 + 190 = 220$$

$$x_1 = 220 - 190$$

$$x_1 = 30$$

Estos valores cumplen el sistema formado por las tres primeras ecuaciones. Ahora bien, si fuera posible realizar el fertilizante con las cantidades deseadas de los compuestos, se requiere que estas soluciones satisfagan también las dos ecuaciones restantes. Dado que en la matriz resultante las dos últimas filas son iguales a la tercera, se tiene que estos valores satisfacen también las ecuaciones 4 y 5.

Por lo tanto, es posible realizar el fertilizante con una mezcla de las cantidades deseadas de cada compuesto, a partir de los fertilizantes básicos. Para ello, se deben utilizar: 30 gramos del fertilizante I, 20 gramos del fertilizante II y 50 gramos del fertilizante III.

3.3.2. Aplicación de sistemas de ecuaciones

A continuación, se presentan algunas aplicaciones de determinantes.

Ejemplo: modelos lineales en economía e ingeniería

Era el final del verano de 1949. El profesor de Harvard, Wassily Leontief, estaba introduciendo cuidadosamente la última de sus tarjetas perforadas en el computador Mark II de la universidad. Las tarjetas contenían información sobre la economía de Estados Unidos y representaban un total de más de 250, 000 piezas de información producidas por la Agencia de Estadísticas del Trabajo de E.U.A tras dos años de intensa labor. Leontief había dividido la economía estadounidense en 500 “sectores”, tales como la industria del carbón, la industria automovilística, comunicaciones y así sucesivamente.

Para cada sector, había elaborado una ecuación lineal que describía cómo éste distribuía sus salidas hacia otros sectores de la economía. Debido a que el Mark II, uno de dos computadores más grandes de aquella época, no podía manejar los sistemas resultantes de 500 ecuaciones con 500 incógnitas. Leontief destiló el problema a un sistema de 42 ecuaciones con 42 incógnitas.

Programar el computador Mark II para las 42 ecuaciones de Leontief había requerido varios meses de esfuerzo y él estaba ansioso por ver cuánto le llevaría al computador resolver el problema. El Mark II zumbó y parpadeó durante 56 horas antes de producir finalmente una solución.

Leontief, quien obtuvo el premio Nobel de Economía 1973, abrió la puerta a una nueva era en modelos matemáticos en economía. Sus esfuerzos en Harvard en 1949 marcaron uno de los primeros usos significativos de los computadores para analizar lo que entonces era un modelo matemático a gran escala. Desde ese tiempo, los investigadores en muchos otros campos han usado computadores para analizar modelos matemáticos.

Debido a las cantidades masivas de datos implicados, los modelos generalmente son *lineales*; esto es, se describen como *sistemas de ecuaciones lineales.*

La importancia del álgebra lineal para las aplicaciones se ha elevado en proporción directa al incremento en la potencia de cómputo. Con cada nueva generación de hardware y software se dispara una demanda de mayor capacidad. La ciencia de cómputo está así intrincadamente ligada al álgebra lineal, a través del crecimiento explosivo del procesamiento en paralelo y de los cálculos en gran escala.

Los científicos e ingenieros trabajan ahora en problemas mucho más complejos que los que podían imaginarse hace algunas décadas. ¡Hoy, el álgebra lineal tiene más valor potencial para los estudiantes en muchos campos científicos y de negocios que cualquier otra materia de matemáticas de licenciatura!

- *Prospección petrolera.* Cuando un barco busca depósitos petrolíferos mar adentro, sus computadores resuelven miles de sistemas de ecuaciones lineales independientes *diariamente.* Los datos sísmicos para las ecuaciones se obtienen de ondas de choque bajo el agua producidas por medio de explosiones con cañones de aire. Las ondas rebotan en rocas bajo la superficie y se miden con geófonos sujetos a cables de una milla de largo tras del barco.
- *Programación lineal.* Hoy en día muchas decisiones gerenciales importantes se toman con base en modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables. La industria de aviación, por ejemplo, usa programas lineales que organizan las tripulaciones para los vuelos, registran la ubicación del aparato aéreo o planean los diversos programas de servicios de apoyo tales como el mantenimiento y las operaciones de terminal.
- *Redes eléctricas.* Los ingenieros utilizan un software de simulación para diseñar circuitos eléctricos y microchips que incluyen millones de transistores. El software depende de técnicas de álgebra lineal y de sistemas de ecuaciones lineales.

Los sistemas de ecuaciones lineales están en el corazón del Álgebra lineal.

Ahora, se retoma el problema *Fertilizantes básicos* de la sección anterior, para resolverlo por el método de determinantes.

Se había construido el siguiente sistema de ecuaciones:

Compuesto	Fertilizante I		Fertilizante II		Fertilizante III		Cantidades deseadas por compuesto
A	$10x_1$	+	$20x_2$	+	$30x_3$	=	2200
B	$30x_1$	+	$0x_2$	+	$20x_3$	=	1900
C	$15x_1$	+	$50x_2$	+	$10x_3$	=	1950
D	$25x_1$	+	$15x_2$	+	$30x_3$	=	2550
E	$20x_1$	+	$15x_2$	+	$10x_3$	=	1400

La matriz asociada al sistema está dada por:

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 0 & 20 \\ 15 & 50 & 10 \\ 25 & 15 & 30 \\ 20 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Vean que esta matriz no es cuadrada, ya que surge de un sistema de cinco ecuaciones con tres incógnitas.

Como sólo pueden sacarse determinantes de matrices cuadradas, entonces se debe hacer cuadrada la matriz asociada. Para ello, se trabajará entonces sólo con tres incógnitas y tres ecuaciones, es decir, se eliminarán las dos últimas filas del sistema para obtener la matriz:

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 0 & 20 \\ 15 & 50 & 10 \end{pmatrix}$$

Ahora sí, se puede obtener el determinante de dicha matriz:

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 0 & 20 \\ 15 & 50 & 10 \end{vmatrix}$$

Éste es el determinante del sistema formado por las tres primeras ecuaciones:

$$\begin{array}{lllllll} 10x_1 & + & 20x_2 & + & 30x_3 & = & 2200 \\ 30x_1 & + & 0\,x_2 & + & 20\,x_3 & = & 1900 \\ 15x_1 & + & 50\,x_2 & + & 10\,x_3 & = & 1950 \end{array}$$

Entonces:

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 0 & 20 \\ 15 & 50 & 10 \end{vmatrix} = 30(-1)^3 \begin{vmatrix} 20 & 30 \\ 50 & 10 \end{vmatrix} + 0(-1)^4 \begin{vmatrix} 10 & 30 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} + 20(-1)^5 \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 50 \end{vmatrix}$$

$$= 30(-1)(200 - 1500) + 0 + 20(-1)(500 - 300) = -30(-1300) - 20(200)$$

$$= 39000 - 4000 = 35000$$

Obsérvese que se sacó el determinante a partir de la segunda fila, ya que el cero simplifica las operaciones.

Ahora se sacan los determinantes asociados a las variables. Recuérdese que las entradas asociadas a cada variable son sustituidas por las entradas de las constantes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2200 & 20 & 30 \\ 1900 & 0 & 20 \\ 1950 & 50 & 10 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 10 & 2200 & 30 \\ 30 & 1900 & 20 \\ 15 & 1950 & 10 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 2200 \\ 30 & 0 & 1900 \\ 15 & 50 & 1950 \end{vmatrix}$$

Asociados a x_1, x_2 y x_3 respectivamente.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2200 & 20 & 30 \\ 1900 & 0 & 20 \\ 1950 & 50 & 10 \end{vmatrix}$$
$$= 1900(-1)^3 \begin{vmatrix} 20 & 30 \\ 50 & 10 \end{vmatrix} + 0(-1)^4 \begin{vmatrix} 10 & 30 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} + 20(-1)^5 \begin{vmatrix} 2200 & 20 \\ 1950 & 50 \end{vmatrix}$$

$$= 1900(-1)(200 - 1500) + 0 + 20(-1)(110000 - 39000)$$
$$= -1900(-1300) - 20(71000)$$

$$= 2470000 - 1420000 = 1050000$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 10 & 2200 & 30 \\ 30 & 1900 & 20 \\ 15 & 1950 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 30(-1)^3 \begin{vmatrix} 2200 & 30 \\ 1950 & 10 \end{vmatrix} + 1900(-1)^4 \begin{vmatrix} 10 & 30 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} + 20(-1)^5 \begin{vmatrix} 10 & 2200 \\ 15 & 1950 \end{vmatrix}$$

$$= 30(-1)(22000 - 58500) + 1900(100 - 450) + 20(-1)(19500 - 33000)$$

$$= -30(-36500) + 1900(-350) - 20(-13500)$$

$$= 1095000 - 665000 + 270000 = 700000$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 2200 \\ 30 & 0 & 1900 \\ 15 & 50 & 1950 \end{vmatrix}$$

$$= 30(-1)^3 \begin{vmatrix} 20 & 2200 \\ 50 & 1950 \end{vmatrix} + 0(-1)^4 \begin{vmatrix} 10 & 2200 \\ 15 & 1950 \end{vmatrix} + 1900(-1)^5 \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 50 \end{vmatrix}$$

$$= 30(-1)(39000 - 110000) + 0 + 1900(-1)(500 - 300)$$

$$= -30(-71000) - 1900(200)$$

$$= 2130000 - 380000 = 1750000$$

Así, se sacan los valores de x_1, x_2 y x_3 a partir de las correspondientes divisiones:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1050000}{35000} = 30$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{700000}{35000} = 20$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1750000}{35000} = 50$$

Los resultados, efectivamente, son los valores de x_1, x_2 y x_3 que se obtuvieron a partir del método de Gauss. Ahora bien, si no se supieran los valores de x_1, x_2 y x_3, entonces se tendrían que aplicar los valores obtenidos a las ecuaciones que no intervinieron en los determinantes, para comprobar que efectivamente esas soluciones satisfacen las dos ecuaciones restantes.

Cierre de la unidad

Se te recomienda resolver todos los ejercicios del cuadernillo que corresponden a esta unidad, para adquirir mayor habilidad. El *Cuadernillo de ejercicios* lo podrás encontrar en la carpeta Material de apoyo de la primera unidad de esta asignatura.

Ahora ya concluiste con los tópicos de la asignatura, por lo tanto, solo falta que pongas en práctica los conocimientos adquiridos en tu práctica profesional.

Para saber más

Benítez López, Julio; *Breve historia del álgebra matricial* [en línea]. Recuperado el 11 de octubre de 2010, de:

http://personales.upv.es/jbenitez/cajon_sastre/histam.pdf

Kline, Morris. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días I.* Madrid: Alianza Editorial.

Kline, Morris. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días II.* Madrid: Alianza Editorial.

Morales, María I.; *Blog: Mis clases de álgebra II en la web* [en línea] (1994). Recuperado el 11 de octubre de 2010, de:

http://algebra-ii.blogspot.com/

Fuentes de consulta

1. Kolman, B.; Hill Bernard Kolman; David R. Hill; *Álgebra lineal* (8a. Edición); México (2006), Pearson Educación.
2. Lay, D. C.; *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (tercera edición); México (2007), Pearson Educación.
3. Williams, G. *Álgebra lineal con aplicaciones*; México (2004), Mc Graw Hill.

Fuentes electrónicas

Aznar, E.; Universidad de Granada (2007), Facultad de Ciencias (Sección de Matemáticas) Departamento de Álgebra. [en línea]. Recuperado el 10 de noviembre de 2010, de: http://www.ugr.es/~eaznar/cardano.htm

Corcobado, J. L. y Marijuán, J. *Matemáticas I* [en línea]. Recuperado el 11 de octubre de 2010, de: https://selectividad.intergranada.com/Bach/mate2ccnn/Complementario/COU.pdf

Luzardo, Deivi; Peña, Alirio J.; *Historia del Álgebra Lineal hasta los albores del Siglo XX*; Divulgaciones [en línea] (2006), Vol. 14, No. 2. Recuperado el 11 de octubre de 2010, de:
http://www.emis.de/journals/DM/vol14-2.htm

Medel, J y García C. (2016). Historia del determinante. Revista Ciencia [en línea]. Recuperado el 24 de septiembre de 2018, de: https://www.revistaciencia.amc.edu.mx/images/revista/67_1/PDF/Determinante.pdf