



Segundo Semestre

Física

U2

Dispositivos eléctricos



## Índice

|   |    |
|---|----|
| Presentación de la unidad.....  | 3  |
| Propósitos.....   | 5  |
| Competencia específica.....   | 5  |
| Modelos electrostáticos.....  | 7  |
| Campo eléctrico.....  | 9  |
| Ley de Coulomb.....   | 11 |
| Modelos básicos de magnetismo.....  | 22 |
| Ley de Gauss para el campo eléctrico.....   | 23 |
| Campo magnético.....  | 24 |
| Ley de Gauss para el magnetismo.....  | 33 |
| Ley de Ampere.....  | 34 |
| Ley de Faraday.....   | 36 |
| Modelos electromagnéticos.....  | 38 |
| Circuitos.....  | 40 |
| Resistores.....   | 40 |
| Capacitores.....  | 43 |
| Inductores.....   | 48 |
| Evidencia de aprendizaje. Problemas prototípicos sobre dispositivos eléctricos..... | 49 |
| Autorreflexiones.....   | 49 |
| Cierre.....   | 49 |
| Para saber más.....   | 50 |
| Fuentes de consulta.....  | 50 |

## Presentación de la unidad



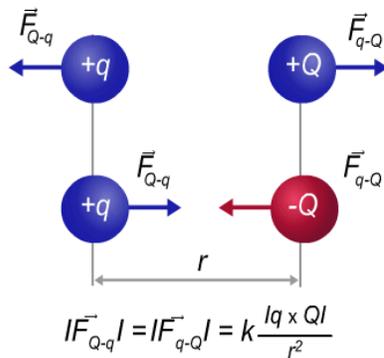
En esta unidad se inicia el estudio de los fenómenos electromagnéticos presentes en los dispositivos eléctricos. Las leyes que rigen estos fenómenos juegan un rol importante en la operación de una gran cantidad de dispositivos electrónicos y eléctricos, radios, televisores, motores eléctricos, computadoras, aceleradores de partículas, y muchos más. La materia, en sí misma, se rige de manera fundamental por fuerzas electrostáticas y magnéticas para conformar sólidos y líquidos.

La electrostática ya era conocida por los griegos, ya que se dieron cuenta que al frotar ámbar se electrificaba y tenía la capacidad de atraer algunos materiales. También observaron que fuerzas magnéticas, producidas por la magnetita, atraían partículas de hierro.



600 a. C

En 1785, Charles Coulomb formuló la ley que lleva su nombre al proponer una fuerza de atracción entre partículas cargadas que varía de manera inversa al cuadrado de la distancia que las separa.



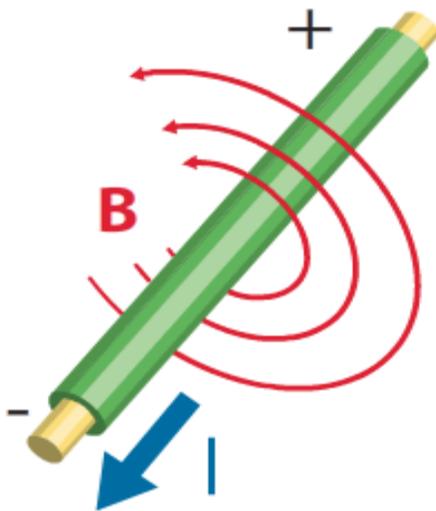
Ley de Coulomb expresando los signos de cargas de diferente signo, y de carga del mismo signo.

En el siglo XIX, diversos descubrimientos y experimentos demostraron que los fenómenos eléctricos y magnéticos estaban relacionados. Los trabajos de Oersted, Faraday, y Henry ayudaron a consolidar dicha idea y es James Clark Maxwell, en 1873, que usa toda esta evidencia experimental para formular las leyes del electromagnetismo. Las predicciones que se derivan de estas leyes fueron corroboradas por Henry Hertz al producir y detectar ondas electromagnéticas.



Hans Christian Oersted, Michael Faraday, Joseph Henry y Heinrich Rudolf Hertz.

Las Leyes de Maxwell son básicas para estudiar y comprender todos los fenómenos electromagnéticos. La teoría que las sustenta es considerada como parte de la física clásica y un gran aporte al conocimiento humano.



Las Leyes de Maxwell describen todos los fenómenos electromagnéticos, aquí se muestra la inducción magnética por medio de una corriente eléctrica.

## Propósitos



En esta unidad:

- Revisarás los modelos usados para explicar los fenómenos electromagnéticos, cada una de las leyes de Maxwell y algunas de sus aplicaciones.
- Modelarás tres aspectos fundamentales que te ayudarán a comprender y manejar los conceptos que se estudian:
  - Fuerza de Lorentz
  - Circuito LRC
  - Onda electromagnética

## Competencia específica



Modelar el funcionamiento de dispositivos eléctricos mediante el uso de los fundamentos de la teoría electromagnética.



### Avisos importantes

Es un espacio diseñado para que tu *docente en línea* establezca su planificación de actividades, es decir, el diseño de cada una de las actividades que debes realizar.

Recuerda estar atento a dicho espacio para revisar las indicaciones precisas, por ejemplo, fechas de entrega, formatos, materiales de consulta, actividades o ejercicios que te aportarán en tu aprendizaje.

También en este espacio tu *docente en línea* te indicará al finalizar el curso la actividad que deberás entregar en la *Actividad complementaria*, así que mantente atento a lo largo del curso, y revisa constantemente esta herramienta, porque será la comunicación directa con tu *docente en línea* sobre cada una de las actividades a entregar.

Por lo tanto, este espacio solo es de consulta y no es necesario que participes en él.



### Foro de dudas

Este es un espacio de consulta y comunicación, recuerda que fue delimitado para resolver inquietudes y compartir ideas sobre los aspectos que abordarás durante el semestre.

El objetivo del foro es generar una mejor comunicación con tus compañeros(as) y *docente en línea*.

Para desarrollar algún planteamiento sobre la asignatura, deberás **realizar** lo siguiente:

1. **Revisa** los comentarios desarrollados por tus compañeros(as) para saber si ya existen aportes similares a tu planteamiento.
2. Si no es así, **describe** tu planteamiento de forma clara para que todos(as) puedan comprenderlo y te ayuden a resolverlo.

\*Se recomienda que en caso de que ya exista un planteamiento hecho por alguien más y que sea similar al tuyo, puedes describir

tu respuesta a este planteamiento en esa misma línea de discusión para evitar temas duplicados.

3. **Espera** a que tu *docente en línea* u otro(a) compañero(a) te responda.

Además de exponer tus dudas, puedes apoyar en contestar las que generan tus compañeros(as), si es el caso, puedes **realizar** lo siguiente:

- **Consulta** los comentarios de tus compañeros(as) y si tienes la respuesta, **ayúdalos** para que resuelvan sus inquietudes. \*Recuerda que al **hacerlo** lo deberás realizar de forma respetuosa y clara, siempre enfocándote en las cuestiones académicas.

\*Para dar solidez a los comentarios que hagas relacionados con el contenido de la asignatura, **respalda** tus aportes con fuentes de referencia confiables. (Artículos científicos, libros, páginas web de universidades, etc.)

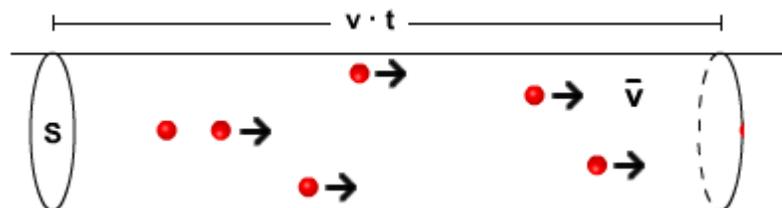
\*No olvides que tu *docente en línea* estará al pendiente de todos los comentarios que se emitan en el foro, ya que él es el (la) encargado(a) de mediar y cerrar este espacio.

## Modelos electrostáticos

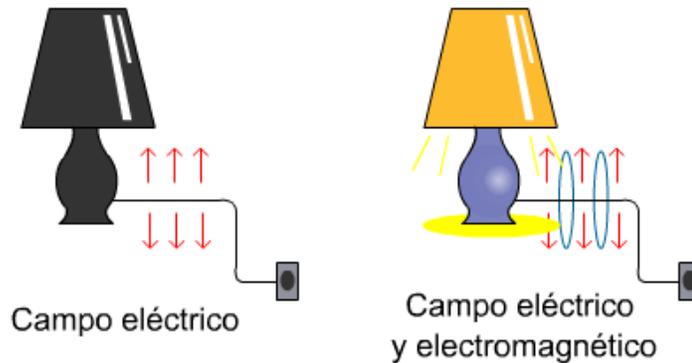
En este tema se revisa uno de los conceptos que dan forma a la teoría electromagnética, el campo electromagnético.

### Campo

El concepto de campo, como una acción a distancia, y que se produce alrededor de una partícula cargada, en movimiento rectilíneo uniforme o acelerado, se asocia a una magnitud medible, en este caso la fuerza que se ejerce sobre una partícula cargada de prueba.



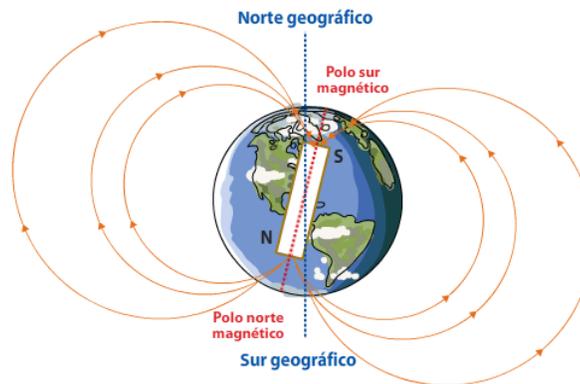
El campo eléctrico puede dividirse en campo eléctrico y magnético. En este estudio se caracterizarán ambos campos de manera separada y se estudiarán los modelos que explican fenómenos eléctricos y magnéticos.



Los campos electromagnéticos son una combinación de campos de fuerza eléctricos y magnéticos invisibles. Tienen lugar tanto de forma natural como debido a la actividad humana.

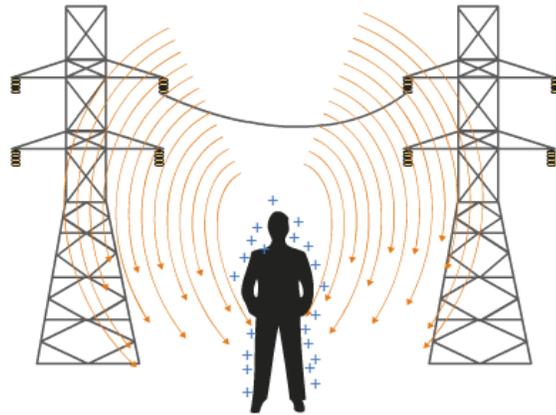
### Campos electromagnéticos naturales

Son, por ejemplo, el campo magnético estático de la tierra al que se está continuamente expuestos, los campos eléctricos causados por cargas eléctricas presentes en las nubes, la electricidad estática que se produce cuando dos objetos se frotan entre sí o los campos eléctricos y magnéticos súbitos resultantes de los rayos.



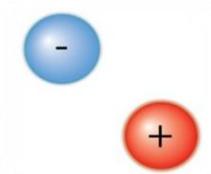
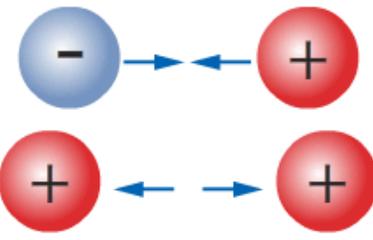
### Campos electromagnéticos de origen humano

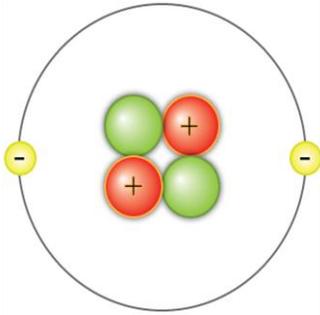
Son, por ejemplo, generados por fuentes de frecuencia extremadamente baja (FEB) tales como las líneas eléctricas, el cableado y los electrodomésticos, así como por fuentes de frecuencia más elevada, como las ondas de radio y de televisión o, más recientemente, de teléfonos móviles y de sus antenas.



## Campo eléctrico

Ahora conocerás los fenómenos físicos que originan el campo eléctrico, así como la interacción eléctrica entre dos cargas puntuales que se explica con la Ley de Coulomb.

|   |   |
|---|---|
|  <p><b>Fig. 1.</b> Electrón y protón.</p>                     | <p>Experimentalmente se determinó que existen dos tipos de carga eléctrica, se les llamo positiva y negativa. Los electrones tienen carga negativa y los protones tienen carga positiva.</p>  |
|  <p><b>Fig. 2.</b> Cargas positivas y negativas.</p>         | <p>Las cargas de un mismo signo se repelen, cargas de signo contrario, se atraen.</p>   |
|  <p><b>Fig. 3.</b> Varilla de vidrio y un trozo de seda.</p> | <p>En un sistema aislado, la carga eléctrica se conserva. La materia es neutra, tiene la misma cantidad de cargas negativas como positivas.</p> <p>Al frotar una varilla de vidrio sobre un trozo de seda, se transfieren cargas negativas a la seda, pero la misma cantidad de cargas positivas quedan en la varilla debido a la conservación de la carga.</p> |
|   | <p>La carga eléctrica <math>q</math> está cuantizada, es decir, se presenta en la naturaleza en paquetes discretos y siempre es un múltiplo entero de <math>e</math>,</p>   |



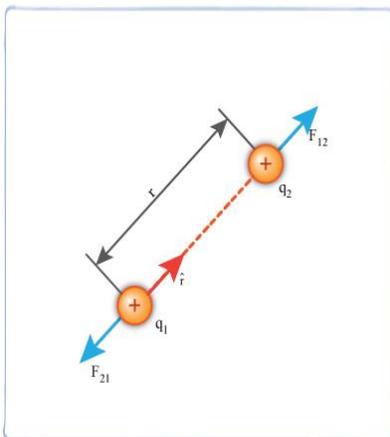
**Fig. 4.** Se muestra el electrón cuya carga eléctrica es  $-e$ , representado por un círculo con signo menos.

$$q = \pm Ne$$

El valor de la unidad de carga es :

$$e = 1.60219 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Donde  $C$  es la unidad de carga llamada **Coulomb**. El electrón, con masa  $m = 9.1094 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , tiene carga  $-e$  y el protón, con masa  $m = 1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , tiene carga  $+e$ . El neutrón no tiene carga alguna.



**Fig. 5.** La fuerza que se ejerce sobre una de las cargas depende de la distancia que la separa de la otra carga y del producto de sus cargas.

A la magnitud de la fuerza de interacción eléctrica entre dos *cargas puntuales*<sup>1</sup>,  $q_1$  y  $q_2$ , se le conoce como Ley de Coulomb y se representa como:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

Donde  $r$  es la separación entre las dos cargas y  $k$  es la constante de proporcionalidad llamada constante de coulomb con un valor de

$$k = 8.9876 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

que también puede representarse como

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

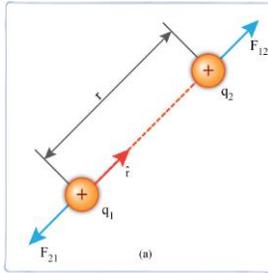
donde

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

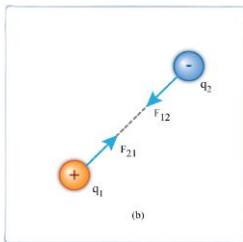
es llamada **permitividad del vacío**.

<sup>1</sup> partículas cargadas de tamaño cero

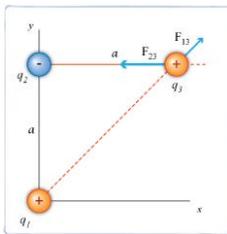
## Ley de Coulomb



**Fig. 6.** Se ilustra la fuerza que se ejerce sobre una carga positiva por otra carga del mismo signo.



**Fig. 7.** Se ilustra la fuerza que se ejerce sobre una carga negativa por otra carga del mismo signo.



**Fig. 8.** Se muestra la fuerza que se ejerce sobre una partícula cargada positivamente debido a dos partículas cargadas.

### La forma vectorial de la Ley de Coulomb

En muchas ocasiones es más sencillo trabajar con la representación vectorial de fuerza, principalmente cuando las cargas no se encuentran sobre una línea recta. La forma vectorial de la Ley de Coulomb de una fuerza eléctrica ejercida por una carga puntual  $q_1$  sobre una carga puntual  $q_2$ , separadas una distancia  $r$ , sería:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Donde  $\hat{r}_{12}$  es el vector unitario dirigido de la carga  $q_1$  a la carga  $q_2$ , y por la tercera ley de Newton, la carga  $q_2$  ejerce sobre  $q_1$  una fuerza igual en magnitud pero de sentido contrario

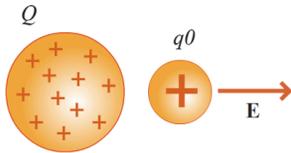
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Si las cargas son iguales, el signo del producto será positivo y la fuerza será de repulsión, si las cargas son negativa y positiva la fuerza será de atracción.

### Principio de superposición

Cuando se necesita calcular la fuerza que se ejerce sobre una partícula cargada por más de dos partículas, es muy útil realizar las operaciones de par en par y posteriormente sumar los resultados, este es un principio básico llamado principio de superposición. El principio de superposición indica que la fuerza que se ejerce sobre una partícula debido a varias cargas puede calcularse por separado en cada par de cargas y luego sumar vectorialmente para obtener la fuerza resultante que se ejerce sobre ella:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \dots$$



**Fig. 9.** Carga de prueba en el campo eléctrico de una distribución de cargas.

### El campo eléctrico

Ya que se sabe la forma de calcular la fuerza entre dos cargas, es posible, definir el campo eléctrico en un punto en el espacio como la fuerza eléctrica que actúa sobre una carga positiva de prueba colocada en ese punto, dividido por la magnitud  $q_0$  de la carga de prueba.

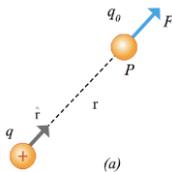
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Las unidades del vector  $\vec{E}$  en el sistema internacional de unidades son

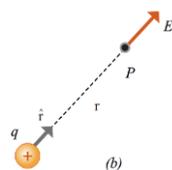
$$\left[ \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} \right]$$

Por consiguiente, la fuerza eléctrica sobre una carga  $q$  colocada en un campo eléctrico  $\vec{E}$  sería:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$



**Fig. 10.** Partícula cargada de prueba a una distancia  $r$  de la carga  $q$ .



**Fig. 11.** Campo eléctrico en el punto p.

### Campo eléctrico de una carga puntual

Si se sabe la magnitud y la dirección del campo eléctrico en un punto del espacio generado por una carga eléctrica puntual, se sabrá la fuerza que se ejercería sobre cualquier partícula cargada en ese lugar.

Considerando la carga  $q$ . Esta carga crea un campo eléctrico en todos los puntos que le rodea. Si se coloca una partícula cargada de prueba  $q_0$ , a una distancia  $r$  de la carga  $q$ , la fuerza que se ejerce sobre la carga  $q_0$ , sería

$$\vec{F} = k \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

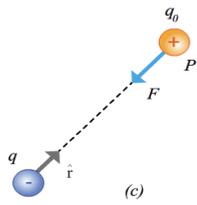
Donde  $\hat{r}$  es el vector unitario que va desde la carga  $q$  hacia la carga  $q_0$ .

Como el campo eléctrico de la carga  $q$  es

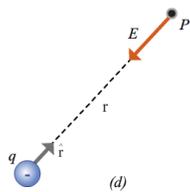
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Se tiene

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

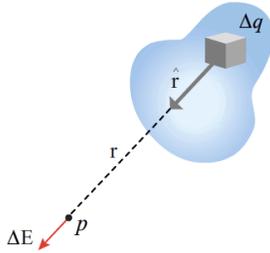


**Fig. 12.** Si la carga  $q$  es negativa la fuerza sobre la partícula de prueba apunta hacia la carga  $q$ .



**Fig. 13.** Si la carga  $q$  es negativa el campo eléctrico apunta hacia la carga  $q$ .

Si la carga  $q$  es positiva la dirección del campo eléctrico apunta hacia afuera de la carga, si la carga  $q$  es negativa, el campo eléctrico apunta hacia la carga  $q$ .



**Fig. 14.** Elemento infinitesimal de carga  $\Delta q$  a una distancia  $r$  del punto.

### Campo eléctrico de una distribución de cargas

En este caso se supone que las cargas se encuentran distribuidas de forma continua, para calcular el campo eléctrico en un punto P, se divide la distribución de carga en elementos infinitesimales de carga  $\Delta q$ , el campo eléctrico debido a uno de esos elementos infinitesimales, que se encuentra a una distancia  $r$  del punto P, sería:

$$\Delta \vec{E} = k \frac{\Delta q}{r^2} \hat{r}$$

Donde  $\hat{r}$  es el vector unitario dirigido desde el elemento de carga  $\Delta q$  al punto P.

El campo eléctrico debido a todos los elementos infinitesimales de carga sería:

$$\vec{E} = k \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Donde  $i$  es el  $i$ -ésimo elemento de la distribución continua.

El campo total en el límite cuando  $\Delta q_i \rightarrow 0$

Lo que es igual  $\vec{E} = k \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$  la distribución de carga:

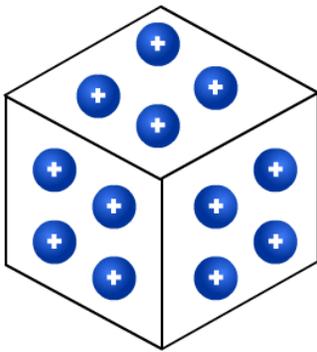
$$\vec{E} = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

La carga eléctrica distribuida sobre una línea, una superficie o un volumen. Para estos casos se usa el concepto de **densidad de carga**. Observa a continuación los tipos que existen:

Densidad de carga lineal:



Cuando la carga  $Q$  se encuentra distribuida a lo largo de una línea de longitud  $l$ , se define la densidad de carga lineal como:



$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

Donde  $\lambda$  tiene unidades de Coulombs por metro (C/m):

**Densidad de carga superficial:**

Cuando la carga  $Q$  se encuentra distribuida en una superficie de área  $A$ , se define la densidad de carga superficial como:

**Densidad de carga volumétrica:**

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Donde  $\sigma$  tiene unidades de Coulombs por metro cuadrado (C/m<sup>2</sup>)

Cuando la carga  $Q$  se encuentra distribuida en un volumen  $V$ , se define la densidad de carga volumétrica como:

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

Donde  $\rho$  tiene unidades de Coulombs por metro cúbico (C/m<sup>3</sup>).

Si la carga no se encuentra uniformemente distribuida, la carga para un elemento infinitesimal sería:

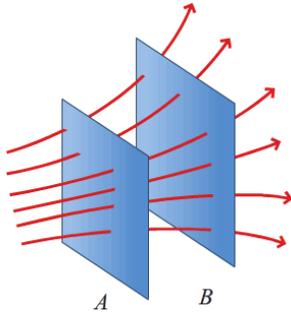
$$dq = \lambda dl \text{ para una línea}$$

$$dq = \sigma dA \text{ para una superficie}$$

$$dq = \rho dV \text{ para un volumen}$$

### Líneas de campo eléctrico

Una forma de representar el campo eléctrico es dibujando líneas que sean paralelas al vector campo



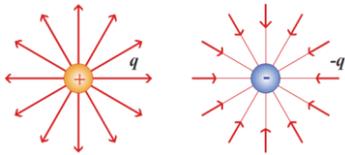
**Fig.15.** El campo eléctrico en la superficie A1 es mayor que en la superficie A2. Esto se muestra en la densidad de líneas por unidad de área.

eléctrico en cualquier punto en el espacio. A estas líneas se les llama líneas de campo eléctrico.

El vector campo eléctrico  $\vec{E}$  es siempre tangente a las líneas de campo eléctrico en cada punto.

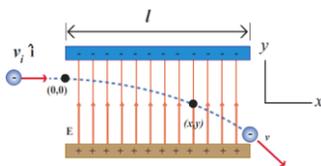
La densidad de campo eléctrico, el número de líneas por unidad de área, en una superficie perpendicular a las líneas de campo eléctrico es proporcional a la magnitud del campo eléctrico en esa región.

Para dibujar líneas de campo eléctrico se siguen las siguientes reglas:



**Fig. 16.** Líneas de campo eléctrico de una carga positiva y de una carga negativa.

| Regla 1  | Regla 2  | Regla 3   |
|--|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Las líneas deben iniciar en la carga positiva y terminar en la negativa.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>El número de líneas que se alejan de una carga positiva o se dirige hacia una carga negativa deben ser proporcionales a la magnitud de la carga.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Ninguna línea del campo eléctrico se cruza.</li> </ul> |



**Fig. 17.** Una partícula cargada moviéndose en un campo eléctrico uniforme.

### Movimiento de partículas en un campo eléctrico uniforme.

Si una partícula con carga  $q$  y masa  $m$  se mueve en un campo eléctrico  $\vec{E}$ , la fuerza que se ejerce sobre la partícula es  $q\vec{E}$ ,

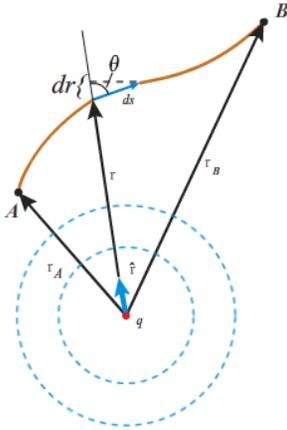
$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Y de acuerdo a la segunda Ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E}$$

La aceleración de la partícula cargada se encuentra al despejar  $\vec{a}$ ,

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$



**Fig. 18.** El potencial eléctrico entre los puntos A y B depende sólo de la distancia radial  $r_A$  y  $r_B$  a la carga  $q$ .

### Potencial eléctrico

Cuando una partícula se mueve en un campo eléctrico, el campo ejerce una fuerza que puede hacer trabajo sobre la partícula. Este trabajo puede expresarse en términos de la energía potencial eléctrica. La energía potencial eléctrica depende de la posición de la partícula cargada en el campo eléctrico. Se describe a la energía potencial eléctrica usando el concepto de potencial eléctrico o simplemente potencial. En un circuito, una diferencia de potencial de un punto a otro se le llama voltaje. Los conceptos de potencial y voltaje son básicos para entender el funcionamiento de circuitos y sus aplicaciones en radioterapias para el cáncer, aceleradores de partículas y muchos otros dispositivos.

Para un desplazamiento infinitesimal  $d\vec{s}$ , el trabajo realizado por un campo eléctrico  $\vec{E}_0$  sobre una carga de prueba  $q_0$  es:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Como esta cantidad de trabajo se realiza por el campo, la energía potencial del sistema campo-carga cambia por una cantidad:

$$dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Para un desplazamiento de la carga desde el punto A al punto B, el cambio en la energía potencial del sistema,  $\Delta U = U_B - U_A$ , es:

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Como la fuerza  $q_0 \vec{E}$  es conservativa, la integral de línea no depende de la trayectoria recorrida por la carga desde el punto A al punto B.

Para una posición dada de la carga de prueba en el campo, el sistema campo-carga tiene una energía potencial  $U$  relativa a la configuración del sistema que se define como  $U = 0$ . Si se divide la energía potencial por la carga de prueba, se obtiene una cantidad física que

depende exclusivamente de la distribución de carga. La energía potencial por unidad de carga  $U/q_0$  es independiente del valor de  $q_0$  y tiene un valor determinado en cada punto del campo eléctrico. A la cantidad  $U/q_0$  se le llama potencial eléctrico o simplemente potencial  $V$ . El potencial eléctrico, en cualquier punto en un campo eléctrico, es:

$$V = \frac{U}{q_0}$$

El potencial eléctrico es una cantidad escalar. Si la carga se mueve de la posición  $A$  a la posición  $B$  en un campo eléctrico, el sistema campo-carga tiene un cambio en la energía potencial.

Se define la diferencia de potencial,  $\Delta V = V_B - V_A$ , entre los puntos  $A$  y  $B$  en un campo eléctrico como el cambio en la energía potencial del sistema, cuando una carga de prueba se mueve entre los dos puntos, dividido entre la carga de prueba  $q_0$ ,

$$\Delta V = \Delta U/q_0$$

Que se puede escribir como:

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Al igual que la energía potencial, lo importante con el potencial eléctrico son las diferencias.

Se puede tomar un punto del campo eléctrico, por ejemplo  $A$ , de tal manera que el potencial eléctrico sea convenientemente cero. Al hacer la diferencia,  $\Delta V = V_B - V_A = V_B$ , se facilita el trabajo.

Todos los puntos en un plano perpendicular a un campo eléctrico uniforme se encuentran al mismo potencial eléctrico. A la superficie formada por esta distribución continua de puntos que tienen el mismo potencial eléctrico se le llama **superficie equipotencial**.

Si se mueve una carga  $q$  desde el punto  $A$  al punto  $B$  sin cambiar la energía cinética de la carga, el trabajo

realizado sobre la carga cambia la energía potencial del sistema

Y como :

$$\Delta V = \Delta U / q$$

Entonces:

$$W = q\Delta V$$

La unidad del potencial eléctrico en el Sistema Internacional de medidas es el volt (V)

$$1V = 1 \frac{J}{C}$$

El electrón-volt (eV)

El electrón volt se define como la energía que un sistema carga-campo gana o pierde cuando una carga de magnitud  $e$ , un electrón o un protón, se mueve a través de una diferencia de potencial de 1 V. Como  $1 V = 1 J/C$  y debido a que la carga fundamental es  $+1.60 \times 10^{-19} C$ , un electrón-volt sería:

$$1 eV = 1.60 \times 10^{-19} C \cdot V$$

### Campo eléctrico del potencial eléctrico

El campo eléctrico  $\vec{E}$  y el potencial eléctrico  $V$  están relacionados de acuerdo a la expresión

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Para una diferencia de potencial  $dV$  entre dos puntos separados una distancia  $ds$  se tiene que

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Si el campo eléctrico tiene una sola componente, por ejemplo  $E_x$ , entonces  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx$ , por lo tanto

$$dV = -E_x dx$$

De donde se obtiene

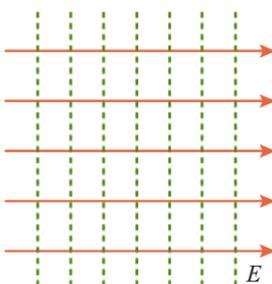
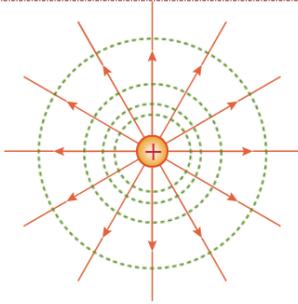


Fig. 19. Superficies equipotenciales.



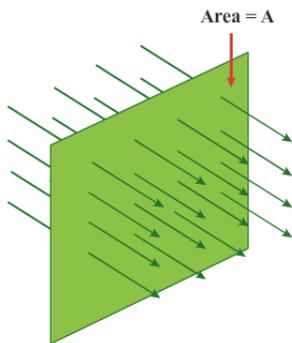
**Fig.20.** Líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales mostradas con líneas punteadas.

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Lo mismo puede hacerse con las componentes  $y$  y  $z$ . Cuando una carga se mueve a lo largo de una superficie equipotencial una distancia  $d\vec{s}$  entonces  $dV = 0$  porque el potencial es constante a lo largo de una superficie equipotencial, y como

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Entonces el campo eléctrico debe ser perpendicular al desplazamiento a lo largo de la superficie equipotencial. Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico que pasan a través de ellas.



**Fig. 21.** Se ilustra el flujo eléctrico a través de una superficie de área  $A$ .

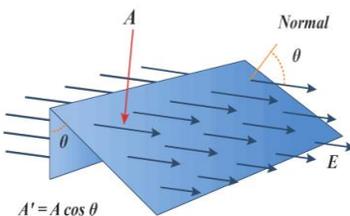
**Flujo eléctrico**

Otra forma para calcular campos eléctricos es usando el concepto de flujo eléctrico. Se llama flujo eléctrico  $\Phi_E$  al producto de la magnitud de campo eléctrico  $E$  y el área de la superficie perpendicular al campo

$$\Phi_E = EA$$

Las unidades del flujo eléctrico en el Sistema Internacional de unidades son Newton por metros cuadrados por coulombs

$$[Nm^2/C]$$

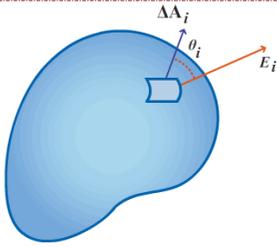


**Fig. 22.** Flujo eléctrico a través de una superficie de área  $A$  no perpendicular al flujo.

Si la superficie no es perpendicular al campo eléctrico, la superficie a considerar sería la proyección de la superficie a un plano orientado perpendicularmente al campo eléctrico.

$$\Phi_E = EA \cos \theta$$

Si el campo eléctrico es variable sobre una superficie, entonces, para evitar cambios en la variación del campo,



**Fig. 23.** Flujo eléctrico a través de un elemento de área infinitesimal.

se considera un elemento de área infinitesimal, en ese caso, el flujo es

$$\Delta\Phi_i = E_i \Delta A_i \cos\theta_i$$

De acuerdo a la definición del producto punto o producto escalar, la expresión anterior puede escribirse como:

$$\Delta\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Al sumar la contribución de todos los componentes se obtiene el flujo a través de la superficie:

$$\Delta\Phi_i = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

El flujo total lo obtienes al aproximar cada elemento de área a cero:

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Con lo que se obtiene la definición general de flujo eléctrico:

$$\Phi_E = \int_{\text{Superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



## Actividades

Ahora realiza la **Actividad 1. Foro socioformativo: dispositivos eléctricos**, solo espera que tu *docente en línea* te proporcione las indicaciones para realizar la actividad a través del espacio de *Planificación de actividades del docente en línea*.

## Modelos básicos de magnetismo

En este tema se iniciará con el estudio de las Leyes que integran todo el conocimiento sobre el fenómeno electromagnético, las Leyes de Maxwell. Se componen de la:

- Ley de Gauss para la electricidad y el magnetismo
- La Ley de Faraday
- La Ley de Ampere agrupadas en torno a lo que se llaman las Ecuaciones de Maxwell.

Juntas forman las bases del **electromagnetismo**.

En su forma más simple, en el espacio vacío, las cuatro ecuaciones serían:

|   |   |
|---|---|
| $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$ | <p>La <b>Ley de Gauss</b> dice que el campo eléctrico se relaciona con la carga eléctrica que lo produce:</p> <p>El flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total encerrada por la superficie dividida entre <math>\epsilon_0</math>.</p>  |
| $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$                    | <p>La <b>Ley de Gauss</b> para el magnetismo indica que no existen los monopolos magnéticos: El flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero.</p>   |
| $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$    | <p>La <b>Ley de inducción de Faraday</b> dice que es posible crear un campo eléctrico al cambiar el flujo magnético:</p> <p>La fuerza electromotriz, la integral de línea del campo eléctrico alrededor de cualquier trayectoria cerrada, es igual al cambio en el tiempo del flujo magnético a través del área limitada por esa trayectoria.</p> |

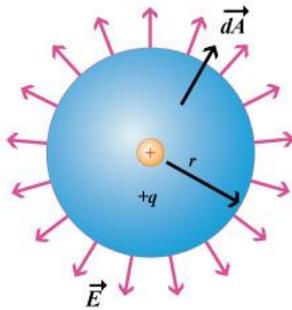
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

La **Ley de Ampere-Maxwell** dice que un campo magnético puede ser creado por corrientes eléctricas y por el cambio en el flujo eléctrico:

La integral de línea de un campo magnético a través de cualquier trayectoria cerrada es la suma de la corriente eléctrica más el cambio en el flujo eléctrico en el tiempo.

Una de las predicciones de estas leyes es que la luz es una onda electromagnética que se propaga a velocidad constante igual a  $c$ . James Clerk Maxwell unificó los conceptos de luz y electromagnetismo al considerar que la luz es un forma de radiación electromagnética. Se revisarán cada uno de ellos y algunas de sus aplicaciones tecnológicas.

## Ley de Gauss para el campo eléctrico



**Fig. 24.** Superficie Gaussiana esférica alrededor de una carga puntual positiva. El flujo se dirige hacia afuera de la superficie.

### Ley de Gauss

La Ley de Gauss es una alternativa a la Ley de Coulomb, expresa de forma completamente equivalente y diferente la relación entre la carga eléctrica y el campo el eléctrico.

La Ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total encerrada por la superficie dividida por  $\epsilon_0$ .

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La ley de Gauss es válida para cualquier distribución de cargas y para cualquier superficie cerrada. Puede ser usada de dos formas: si conoce la distribución de cargas y si tiene suficiente simetría para evaluar la integral, se puede encontrar el campo. Si se conoce el campo, se puede usar la Ley de Gauss para encontrar la distribución de cargas.

## Campo magnético

Una carga en movimiento genera a su alrededor además del campo eléctrico, un campo magnético. Usa el símbolo  $\vec{B}$  para representar al campo magnético y en el sistema internacional de unidades la unidad derivada es el Tesla (T) para el campo magnético.

$$1 T = 1 \text{ N s/C}$$

Una unidad comunmente usada para el campo eléctrico es el Gauss (G). Está unidad, que no pertenece al sistema internacional de unidades, se relaciona con el Tesla de la siguiente manera:

$$1 G = 10^{-4} T$$

Lo único que se puede medir en un campo magnético es la fuerza que se ejerce sobre una partícula cargada de prueba en movimiento. De forma experimental se encuentra que la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre la partícula es proporcional al campo magnético, a la carga y a la velocidad de la partícula, la dirección de la fuerza depende de la dirección del campo magnético de acuerdo a la siguiente expresión, que se conoce, por razones históricas, como Fuerza de Lorentz:

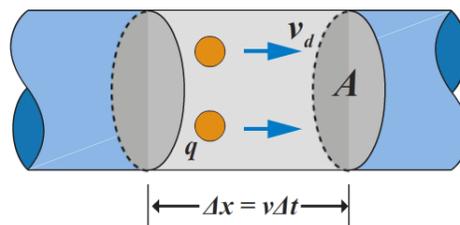
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Donde  $v$  es la velocidad de la partícula.

### Cargas en movimiento

Modelos para describir la corriente eléctrica en materiales.

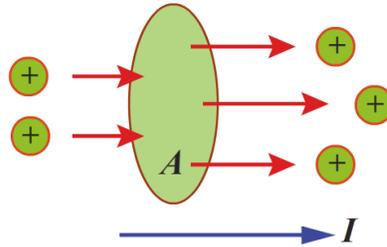
En el tema anterior se explicó la forma en que se visualiza la estructura electrónica de la materia y la forma cualitativa y cuantitativa de medirla. Las cargas se mantenían en reposo o sufrían cambios infinitesimales que no afectaban su velocidad. En este tema se describen los modelos necesarios para explicar la corriente eléctrica, es decir, cargas en movimiento, y se usa un modelo para explicar la conducción eléctrica en metales.



Sección de un conductor con cargas en movimiento.

**Corriente eléctrica**

Se dice que existe una corriente eléctrica si un flujo de cargas eléctricas pasa a través de una superficie de material de área  $A$  en cierto intervalo de tiempo. Se puede observar una ilustración de esto en la imagen.



**Fig. 25.** La corriente eléctrica es el flujo de portadores de carga a través de una superficie de área  $A$ .

Con más precisión, se define la corriente eléctrica como la relación de cambio entre la carga que fluye por una superficie  $A$  en un intervalo de tiempo dado. El sentido de la corriente lo indicará el movimiento de las cargas positivas.

La corriente promedio será la relación de la cantidad de carga  $\Delta Q$  que pasa a través de la superficie en una unidad de tiempo  $\Delta t$ ,

$$I_{prom} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Si la cantidad de carga cambia con el tiempo, entonces la corriente también cambiará. Para este caso es necesario definir la corriente instantánea como el límite de la corriente promedio cuando el intervalo de tiempo tiende a cero,

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

En el sistema internacional, la unidad de corriente es el Ampere (A),

$$1 A = 1 \frac{C}{s}$$

**La ley de Ohm**

Una de las relaciones que más se usa para relacionar la corriente eléctrica, la resistencia y el voltaje es la Ley de ohm.

Se considera un conductor de área seccional  $A$  por el que circula una corriente  $I$ , se define la densidad de corriente como

$$\vec{J} = \frac{I}{A} = nq\vec{v}_d$$

Las unidades de  $J$  en el sistema internacional de medidas tiene las unidades  $A/m^2$ . La dirección de la densidad de corriente es la de portadores de carga positiva.

En el momento que se mantiene una diferencia de potencial en un conductor se establece una densidad de corriente y un campo eléctrico que en algunos materiales son proporcionales entre sí, la constante de proporcionalidad,  $\sigma$ , se le llama conductividad <sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Capacidad de un cuerpo o medio para conducir la corriente eléctrica.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

A esta relación se le llama Ley de Ohm y a los materiales que siguen este comportamiento se les conocen como óhmicos.

Otra forma de expresar la ley de Ohm es definiendo el término de resistencia de un conductor. La resistencia es la relación de la diferencia de voltaje en el conductor entre la corriente

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

La unidad de la resistencia en el sistema internacional es el Ohm ( $\Omega$ ).

Un concepto importante es el de la resistividad<sup>3</sup> que se definió como el inverso de la conductividad.

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

Con estos conceptos, se puede expresar la resistencia de un material que tenga longitud  $l$ , y área de sección transversal  $A$  como

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

### Modelo microscópico de la corriente eléctrica

Observa uno de los modelos que describe el paso de la corriente eléctrica en materiales conductores. Se toma una sección de un conductor de largo  $\Delta x$  y de área transversal  $A$ , el volumen de esta sección del conductor sería  $A\Delta x$ .

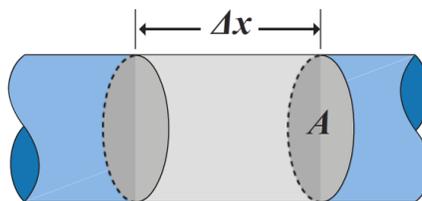


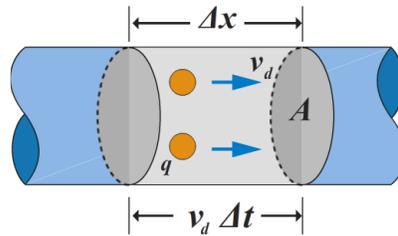
Fig. 26. Se muestra una sección de un conductor.

Ahora, sea  $n$  el número de portadores de carga por unidad de volumen, entonces, el número total de portadores de carga en ese volumen es  $nA\Delta x$ . La carga total,  $\Delta Q$ , sería la carga de cada portador,  $q$ , por el número total de portadores.

$$\Delta Q = q(nA\Delta x)$$

<sup>3</sup> Grado de dificultad que encuentran los electrones a su desplazamiento.

Se puede observar en la figura que los portadores de carga entran a esta sección del conductor con una rapidez  $v_d$ , el desplazamiento que experimentan sería igual a la longitud de la sección del conductor,  $\Delta x$ .



**Fig. 27.** Se muestra el paso de los portadores de carga en una sección del conductor.

Suponiendo que toma a los portadores de carga hacer tal recorrido en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , entonces, la carga total se puede reescribir como  $\Delta Q = q(nAv_d\Delta t)$  y la corriente promedio sería la carga total que se desplaza a través de la sección del conductor en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ ,

$$I_{prom} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{q(nAv_d\Delta t)}{\Delta t} = q(nAv_d)$$

A la rapidez  $v_d$ , se le llama rapidez de arrastre e indica la rapidez promedio con que se desplaza el portador de carga en el conductor.

La conducción eléctrica en materiales conductores fue modelada en 1900 por el físico alemán Paul Drude. Debido a simplicidad y su uso hoy en día se siguen usando los resultados de ese modelo. Ejemplo de esos resultados es la explicación de la ley de Ohm, la conductividad térmica y eléctrica en un metal, la resistividad de un conductor. Una de las suposiciones importantes es que en un conductor existen electrones libres que son los responsables de la conducción, las colisiones entre ellos son independientes de del movimiento de los electrones antes de la colisión y que la energía que ganan los electrones se pierde al chocar contra los átomos del conductor. Estos choques contra los átomos del conductor se observan por el calentamiento que sufre este durante el paso de la corriente.

De este modelo se obtiene el siguiente valor para la velocidad de arrastre de los electrones

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m_e} \tau$$

Donde  $\tau$  es el tiempo entre colisiones sucesivas de electrones,  $m_e$  es la masa del electrón,  $q$  la carga y  $\vec{E}$  el campo eléctrico al que se encuentra sujeto el electrón.

La magnitud de la corriente eléctrica sería

$$J = \frac{q^2 E}{m_e} \tau$$

La ley de Ohm indica que la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico, cuya constante de proporcionalidad es la conductividad  $\sigma$  del conductor.

$$J = \sigma E$$

De acuerdo con esto, el modelo indica que la conductividad, que es el recíproco de la resistividad, es

$$\sigma = \frac{q^2 \tau}{m_e}$$

Y la resistividad

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{q^2 \tau}$$

Se puede observar que, **de acuerdo al modelo, la conductividad y la resistividad son independientes del campo eléctrico.**

Para los materiales Óhmicos, los que cumplen la ley de Ohm, la resistencia y la temperatura tienen una relación lineal, es decir, dentro de un intervalo de temperatura la resistencia es casi proporcional a la temperatura, de acuerdo a la relación

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Donde  $R_0$  es la resistencia a temperatura  $T_0$ , y  $\alpha$  es el coeficiente de temperatura de resistividad

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta \rho}{\Delta T}$$

Donde  $\Delta \rho$  es el cambio en la resistividad en el intervalo de temperatura  $\Delta T$ .

Y como la resistencia es proporcional a la resistividad, está varía con la temperatura, también en intervalos limitados, de acuerdo a la relación

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

### Potencia

Para cuantificar la forma en que se disipa la energía al paso de la corriente, es necesario definir un concepto similar al que se usa en mecánica clásica, el concepto de potencia. Observa el siguiente circuito

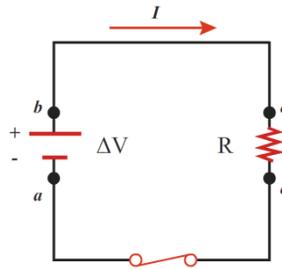


Fig.28. Circuito con una resistencia y una batería.

Este circuito se compone de una batería que aplica una diferencia de potencial  $\Delta V$  al circuito, una resistencia  $R$ , por donde circula una corriente  $I$ . Esta resistencia en la práctica puede ser una lámpara, un calentador o un aparato eléctrico.

Si se considera que los alambres que forman el circuito no presentan ninguna resistencia al movimiento de los portadores de carga, la energía que la batería entrega al circuito la entrega directamente a la resistencia, la rapidez con que se entrega energía al elemento se llama potencia  $P$ ,

$$P = I\Delta V$$

Como la diferencia de potencial  $\Delta V = IR$  entonces la potencia se puede expresar como

$$P = I^2 R = \frac{\Delta V^2}{I}$$

### Partícula en un campo magnético constante

La fuerza magnética sobre una partícula cargada  $q$  moviéndose con velocidad  $v$  es

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Donde  $\vec{B}$  es el campo magnético. De acuerdo con esta expresión, la fuerza magnética  $\vec{F}$  es perpendicular a la velocidad  $\vec{v}$  de la partícula y al campo magnético  $\vec{B}$ . Debido a esto, ningún trabajo se realiza sobre la partícula por el campo magnético. Entonces, por sí mismo, un campo magnético no puede cambiar la magnitud de la velocidad de la partícula, pero sí puede cambiar su dirección. Si la magnitud del campo eléctrico es constante la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre la partícula es también constante y tiene el valor de

$$F = qv \text{sen}(\theta)$$

Donde  $v = |\vec{v}|$ ,  $B = |\vec{B}|$  y  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ . Si la velocidad inicial de la partícula es perpendicular a la partícula, entonces

$$\text{sen}(\theta) = 1$$

Y la fuerza es

$$F = qvB$$

La partícula se mueve en un círculo con la fuerza magnética dirigida hacia el centro del círculo. Esta fuerza dividida por la masa de la partícula debe ser igual a la aceleración centrípeta de la partícula

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{F}{m}$$

Donde  $R$  es el radio del círculo. Si se despeja  $R$  y se sustituye el valor de  $F$ , se tiene

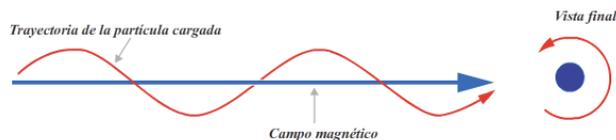
$$R = \frac{mv}{qB}$$

La frecuencia angular sería:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

En esta frecuencia es una constante independiente del radio de la órbita de la partícula o de su velocidad. Se le llama frecuencia de ciclotrón.

Si la velocidad inicial no es perpendicular al campo magnético, entonces la partícula aún tiene una componente circular del movimiento en el plano normal al campo, que también se dirige a velocidad constante en la dirección del campo. El resultado neto es un movimiento en espiral en la dirección del campo magnético.



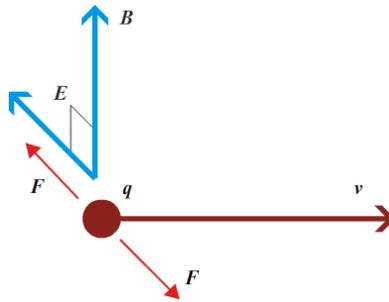
**Fig.29.** Movimiento en espiral de una partícula cargada en la dirección del campo magnético. El movimiento se compone de un movimiento circular alrededor del vector del campo más un movimiento de traslación a lo largo del campo.

El radio del círculo es:

$$R = \frac{mv_p}{qB}$$

Donde  $v_p$  es la componente del vector  $\vec{v}$  perpendicular al campo magnético.

Si se tiene un campo magnético y eléctrico perpendiculares, entonces es posible que una partícula cargada se mueva de tal forma que las fuerzas eléctricas y magnéticas se cancelen mutuamente.



**Fig.27** En un campo eléctrico y magnético mutuamente perpendiculares una partícula cargada puede moverse a velocidad constante  $\vec{v}$  con magnitud igual a  $v = \frac{E}{B}$ , y dirección perpendicular a ambos campos.

Para que esto suceda, de acuerdo a la ecuación de la fuerza de Lorentz, la condición sería:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \mathbf{0}$$

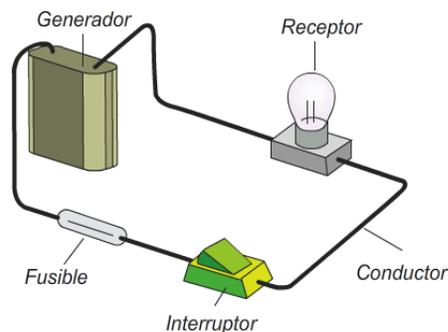
Lo que implica que  $\vec{v}$  **tendría que ser perpendicular** al campo magnético y eléctrico, y tener una magnitud igual a :

$$v = \frac{E}{B}$$

Este movimiento es el más simple bajo estas circunstancias, pero no el único posible.

### Fuerzas sobre corrientes en conductores

Ahora se verá la forma de medir la fuerza que se ejerce sobre un conductor por el que pasan cargas en movimiento y se encuentra en un campo magnético. En muchas aplicaciones prácticas del electromagnetismo, las cargas en movimiento pasan a través de un conductor como el cobre. Recuerda que un conductor es un material en el cual las partículas cargadas ¿se pueden mover libremente. En un aislante, las partículas cargadas se encuentran fijas en un lugar. Los conductores prácticos normalmente tienen un aislante que rodea para confinar el movimiento de las partículas en trayectoria particulares.



Si el conductor es de la forma de un alambre, se puede calcular la fuerza magnética sobre el alambre si se sabe el número de partículas móviles ( $N$ ) por unidad de longitud del alambre, la carga de cada partícula  $q$ , y la velocidad de las partículas que se mueven a través del alambre  $v$ . La fuerza total sobre un segmento de alambre de longitud  $L$  es

$$\vec{F} = qNl\vec{v} \times \vec{B}$$

Si  $\hat{n}$  es el vector unitario en la dirección de  $v$ , entonces

$$\vec{F} = qNlv\hat{n} \times \vec{B}$$

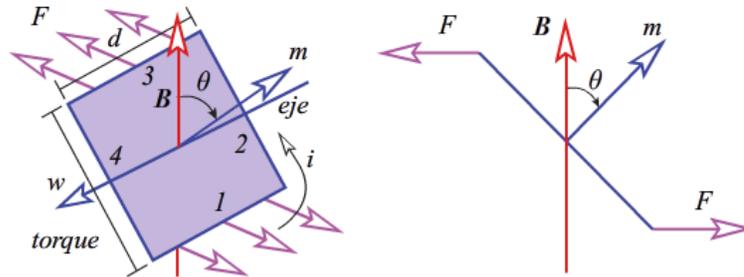
Como la cantidad  $qNv$  es la corriente en el alambre, entonces

$$\vec{F} = iL\hat{n} \times \vec{B}$$

Expresión que indica el valor de la fuerza sobre un alambre por el que pasa una corriente eléctrica  $i$  en un campo magnético  $\vec{B}$ .

### Torque en un dipolo magnético y motores eléctricos

Se revisa ahora el torque que se ejerce sobre una espira por el que circula una corriente eléctrica y se encuentra dentro de un campo magnético. En la siguiente figura se muestra una espira montada sobre un eje dentro de un campo magnético. Por la espira circula una corriente eléctrica  $i$ .



**Fig.28.** Se muestra una espira montada sobre un eje dentro de un campo magnético. Las fuerzas sobre las corrientes en los segmentos 1 y 3 de la espira generan una torca alrededor del eje.

La corriente en los segmentos de la espira 2 y 4 experimentan una fuerza paralela al eje. Estas fuerzas no generan un torque neto. Sin embargo, las fuerzas magnéticas sobre los segmentos de la espira 1 y 3 tiene cada una una magnitud de  $F = idB$ , donde  $B$  es la magnitud del campo magnético. Estas fuerzas generan un torque en el sentido contrario a las manecillas del reloj igual a

$$\tau = 2F \left(\frac{w}{2}\right) \text{sen}(\theta) = iwdB\text{sen}(\theta)$$

Que se puede representar en forma vectorial de la siguiente manera

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Donde  $\vec{m}$  es un vector normal a la espira con magnitud igual a  $iwd$ . A este vector se le llama **momento dipolar magnético**.

La espira puede ser de cualquier forma no solamente rectangular. En el caso general, la magnitud del momento magnético es igual a la corriente  $i$  por el área  $S$  de la espira,

$$m = iS$$

En el ejemplo que se muestra en la figura el área es

$$S = wd$$

La dirección de  $m$  está determinada por la regla de la mano derecha, dobla tus dedos de la mano derecha alrededor de la espira en la dirección de la corriente y tu dedo pulgar apuntará en la dirección del momento magnético.

En analogía con el dipolo eléctrico en un campo eléctrico, la energía potencial del dipolo magnético en un campo magnético es

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

## Ley de Gauss para el magnetismo

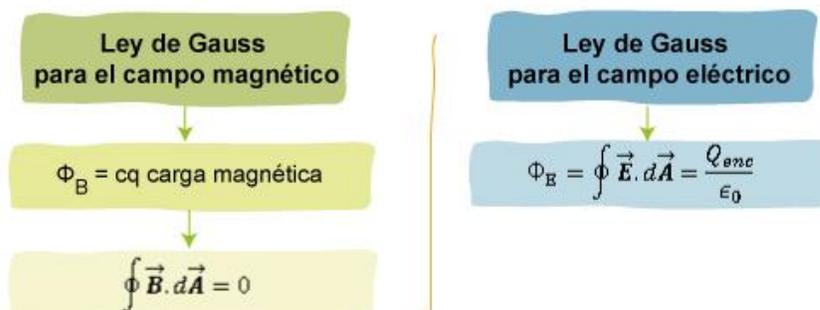
En analogía con la Ley de Gauss para el campo eléctrico, se puede escribir la Ley de Gauss para el campo magnético de la siguiente manera

$$\Phi_B = c q_{\text{carga magnética}}$$

En donde  $\Phi_B$  es el flujo magnético que sale a través de una superficie cerrada,  $c$  es una constante y  $q_{\text{cargamagnética}}$  es la "carga magnética" dentro de la superficie cerrada. Investigaciones extensivas se han realizado para la búsqueda de la "carga magnética" a la que llaman **monopolo magnético**, sin embargo, no se ha encontrado. Por consiguiente, la Ley de Gauss para el magnetismo sería

$$\Phi_B = 0$$

Que también se puede expresar como:



## Ley de Ampere

La Ley de Ampere menciona que cualquier configuración de corrientes continuas crea campos magnéticos. Se expresa de la siguiente manera

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

Esta expresión es válida sólo si los campos eléctricos son constantes. Para el caso de campos eléctricos que varían en el tiempo, Maxwell generalizó la Ley de Ampere incluyendo un término que llamo corriente de desplazamiento,  $I_d$ ,

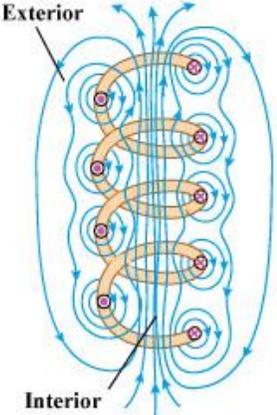
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 I_d$$

En donde  $I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ , por lo tanto,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Esta relación describe el hecho que los campos magnéticos son producidos por corrientes eléctricas y por cambios en los campos eléctricos.

Observa un ejemplo de aplicación de la ley al encontrar el campo magnético de un solenoide.



**Campo magnético en un solenoide**

Un solenoide es una espira en forma de hélice. Con esa configuración es posible mantener un campo magnético uniforme en la parte interior de la espira cuando pasa una corriente eléctrica a través del alambre. Cuando las espiras están muy unidas, cada una de ellas puede ser tratada como una espira circular y el campo magnético total sería la suma vectorial de cada uno de los campos debido a cada espira.

**Fig. 29.** Se muestra el campo magnético en un solenoide a través del cual pasa una corriente eléctrica.

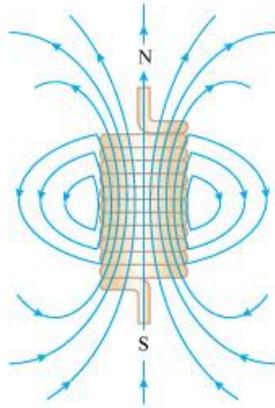


Fig. 30. Se muestran las líneas de campo de un solenoide ideal.

Las líneas de campo en el interior son casi paralelas y muy cercanas una de otra lo que indica que el campo magnético es fuerte. Uno de los extremos se comporta como si fuera el polo norte magnético y el otro como si fuera el polo sur. El solenoide ideal se caracteriza por tener las espiras muy juntas con una longitud mucho mayor al radio de las espiras.

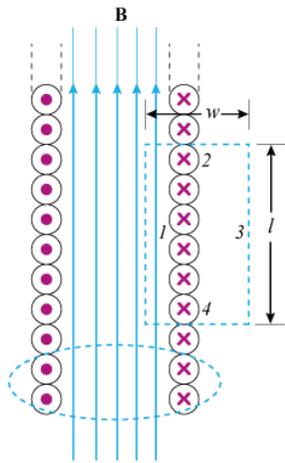


Fig. 31. Trayectoria que se evalúa para calcular el campo magnético de un solenoide ideal.

Se usa la expresión de la Ley de Ampere para obtener una expresión cuantitativa del campo magnético en el interior del solenoide. El campo magnético  $\vec{B}$  en el interior es uniforme y paralelo al eje y las líneas de campo magnético en el exterior forma círculos alrededor del solenoide. Se considera la trayectoria de longitud  $l$  y ancho  $w$ . Al aplicar la Ley de Ampere a esta trayectoria, se evalúa :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Sobre cada lado de la trayectoria

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{Trayectoria 1}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{Trayectoria 2}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{Trayectoria 3}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{Trayectoria 4}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

La contribución en la trayectoria 1, 2 y 3 son cero porque el campo magnético es perpendicular a la trayectoria. Entonces, la única contribución es del lado 1, porque el campo magnético es uniforme y paralelo a la trayectoria. Por consiguiente

$$\int_{\text{Trayectoria 1}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = Bl$$

Considerando el número de espiras circulares  $N$ , presentes en la longitud  $l$  del solenoide, la corriente total a través del rectángulo sería  $NI$ . Entonces, se tiene

$$\oint B ds = BL = \mu_0 NI$$

Despejando, se obtiene el campo magnético en esa trayectoria

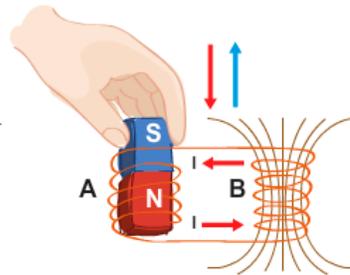
$$\oint B ds = BL = \mu_0 NI$$

Si se define el número de vueltas por unidad de longitud como  $n = \frac{N}{l}$ , se reescribe el campo magnético dentro de un solenoide ideal como  $B = \mu_0 nI$

## Ley de Faraday

En este tema se revisa el efecto por campos magnéticos que varían con el tiempo. Michael Faraday, al mismo tiempo y de forma independiente que Joseph Henry, mostró que se puede inducir una fuerza electromotriz en un circuito variando el campo magnético.

Se puede inducir una corriente eléctrica cuando el flujo magnético a través del circuito cambia con el tiempo.



|  |  |
|--|--|
|  | <p><b>Inducción electromotriz</b></p> <p>Cuando un imán se mueve hacia la espira, el amperímetro indica que una corriente se induce sobre ella. Si el imán se acerca, la corriente inducida sobre la espira tiene una dirección, que se muestra con la deflexión de la aguja hacia la derecha, cuando el imán se aleja, la corriente inducida tiene una dirección contraria. ¡Lo sorprendente de este fenómeno es que no se necesita una batería para generar corriente en el conductor!</p> |
|--|--|

**Fig. 32.** La mano mueve un imán hacia la espira y el amperímetro muestra la aguja moviéndose hacia la derecha cuando el imán se acerca a la espira, y se muestra un movimiento de la aguja hacia la izquierda cuando el imán se aleja de la espira.

La forma de expresar esta observación empírica hecha por Michael Faraday en 1831, es:

*La fuerza electromotriz inducida a través del circuito es directamente proporcional al cambio del flujo magnético en el tiempo.*

Esta expresión se conoce como Ley de Inducción de Faraday, y matemáticamente se expresa como

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Donde  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$  es el flujo magnético a través del circuito.

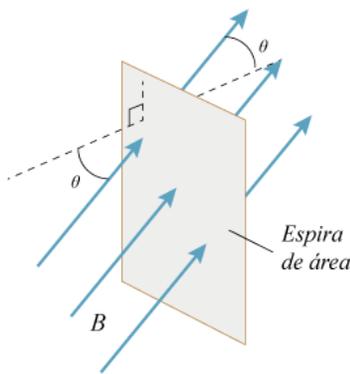
Si el circuito consiste de N espiras con área A y el flujo magnético es  $\Phi_B$ , la fuerza electromotriz inducida sería igual a

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

El signo en la expresión de la Ley de inducción de Faraday tiene un significado físico importante, indica que:

*La corriente inducida en la espira está en la dirección que crea un campo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético a través del área encerrada por la espira.*

Expresión conocida como la Ley de Lenz



**Fig. 33.** Se muestran la línea de flujo del campo magnético que pasan a través de una superficie de área A.

### Espira de área A

Se calcula la fuerza electromotriz inducida sobre una espira de área A que se encuentra en un campo magnético  $\vec{B}$ . Las líneas del flujo magnético forman un ángulo  $\theta$  con la superficie de la espira. Por lo que se tiene que la fuerza electromotriz inducida sería

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}BA\cos\theta$$



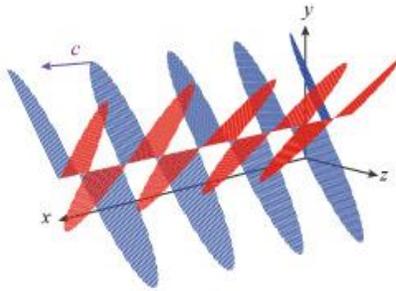
### Actividades

Ahora realiza la **Actividad 2. Laboratorio sobre dispositivos eléctricos**, solo espera que tu *docente en línea* te proporcione las indicaciones para realizar la actividad a través del espacio de *Planificación de actividades del docente en línea*.

## Modelos electromagnéticos

Los resultados que se derivan de las Leyes de Maxwell son sorprendentes, por un lado, predicen que campos eléctricos que varían con el tiempo producen un campo magnético, campos magnéticos que varían con el tiempo producen un campo eléctrico, también predicen la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan en el espacio vacío a una velocidad constante de  $c$  ( $c \approx 300\,000 \frac{km}{s}$ ).

Henry Hertz en 1887, confirmó la predicción de Maxwell generando y detectando ondas electromagnéticas. Usando un circuito bastante ingenioso para generar ondas electromagnética y para detectarlas.



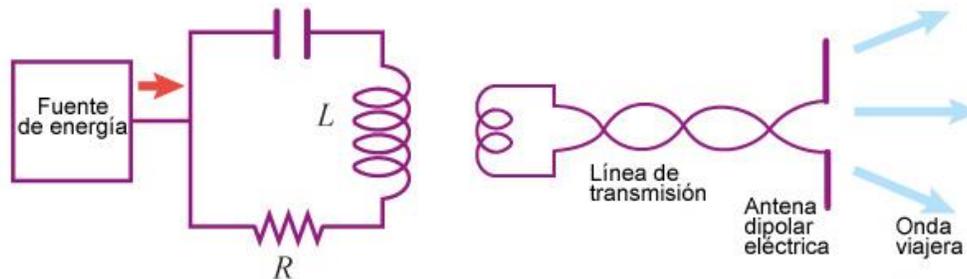
**Fig. 34.** Onda electromagnética.

Una forma sencilla de generar ondas es usando un circuito RLC, que produzca una variación senoidal con el tiempo. Dicho circuito consta de una fuente externa que restaura la energía disipada en el circuito o por radiación. La corriente varía senoidalmente con la frecuencia angular resonante

$$W \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

El oscilador se acopla a una línea de transmisión, que sirve para transportar la corriente a una antena. Suponiendo una antena dipolar, constituido por dos conductores rectos. Las cargas al ser excitadas por el oscilador fluctúan hacia delante y hacia atrás en los dos conductores con frecuencia  $W$ .

Pensando que la antena es un dipolo eléctrico oscilatorio donde una rama lleva una carga instantánea  $q$ , y la otra una carga  $-q$ . La carga  $q$  varía senoidalmente con el tiempo y cambia de signo cada mitad de ciclo. Estas cargas se aceleran en la antena de modo que dicha antena es una fuente de radiación eléctrica dipolar. En cualquier punto del espacio hay campos eléctricos y magnéticos que varían con el tiempo.

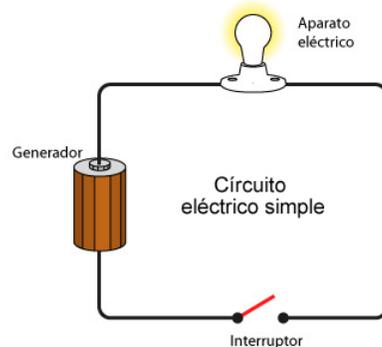


**Fig. 35.** Circuito que permite generar ondas electromagnéticas viajeras.

## Circuitos

En este tema se analizan los circuitos eléctricos simples. Estos circuitos contienen uno, dos o tres elementos básicos:

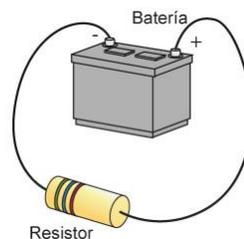
- Resistencias
- Capacitores
- Inductores.



Las resistencias (o resistores), pueden ser elementos internos que integran los circuitos de objetos comunes como: baterías, alambres o aparatos eléctricos. Las combinaciones más complejas de estos elementos pueden ser analizadas usando las **Leyes de Kirchhoff** (consecuencia de la ley de la conservación de la energía y la ley de conservación de la carga eléctrica). Las corrientes que pasan por los circuitos analizados son constantes en magnitud y dirección, a esto se le llama **corriente directa**, que es una corriente con dirección constante.

## Resistores

Un circuito simple está constituido de una batería y un resistor, la batería aplica una diferencia de potencial, lo cual produce que las cargas se muevan. La diferencia de potencial es constante lo que produce una **corriente constante** en magnitud y dirección, a esto se le llama **corriente directa**. A la fuente se le conoce como fuente de fuerza electromotriz, fem. La fem es el voltaje máximo que puede producirse entre las terminales del circuito. Se asume que los alambres que unen al circuito no tienen resistencia.



**Fig. 36.** Circuito compuesto de una batería y una resistencia.

La terminal positiva de la batería se encuentra a un potencial más alto que la terminal negativa. Dentro de la batería existe cierta resistencia al flujo de la corriente, a esta resistencia se le conoce como resistencia interna de la batería,  $r$ .

Se puede considerar este circuito como se muestra en la siguiente figura

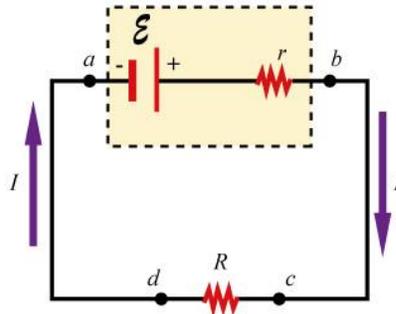
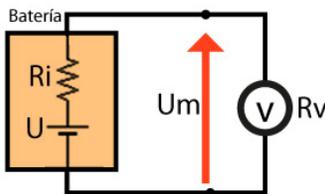


Fig. 37. Se muestra la resistencia interna de la batería.



- U:** fem de la batería.
- Ri:** resistencia interna de la batería.
- Rv:** resistencia interna del voltímetro.
- El voltímetro mide la tensión  $U_m$ .

La batería tiene una resistencia interna, por lo cual, el voltaje en las terminales no es el mismo que la fem. El voltaje en las terminales de la batería sería:

$$\Delta V = V_b - V_a = \varepsilon - Ir$$

En donde  $I$  es la corriente que pasa por el circuito y  $\varepsilon$  es la fem de la batería.

Entonces, en una batería o pila de 1.5 V, el valor corresponde a la fem y la diferencia de potencial real depende de la corriente que pasa por la batería. Al revisar la figura anterior, el voltaje en las terminales de la batería debe ser igual al voltaje en la resistencia  $R$ , también llamada resistencia de carga. El voltaje en la resistencia sería

$$\Delta V = IR$$

y como la fem de la batería es

$$\varepsilon = \Delta V + Ir$$

Entonces se tiene

$$\varepsilon = IR + Ir$$

Despejando la corriente  $I$ :

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}$$

La corriente depende de la resistencia interna de la batería y de la resistencia externa. Si la resistencia de carga es mucho mayor que la resistencia interna, se puede despreciar el valor de  $r$ . Al escribir la relación anterior en términos de la potencia, se tiene

$$I\varepsilon = I^2R + I^2r$$

Como  $\mathcal{E} = I\Delta V = I^2 R$ , se obtiene

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_i$$

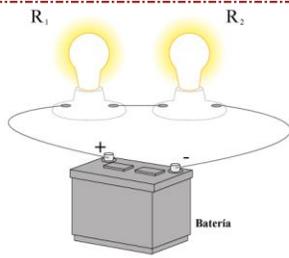


Fig. 38. Circuito con resistencias en serie con una batería.

**Resistencia en serie**

Cuando dos resistencias  $R_1$  o más se conectan como se muestra en la figura, se dice que las resistencias están en serie.

Si la carga  $Q$  sale de la resistencia  $R_1$  la misma cantidad de carga debe llegar a la resistencia  $R_2$ .

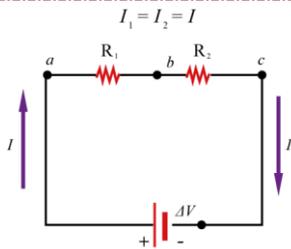


Fig. 39. Circuito mostrando el sentido de la corriente y el voltaje aplicado.

La diferencia de potencial que se aplica a la combinación en serie de las resistencias se divide entre los resistores.

$$\Delta V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

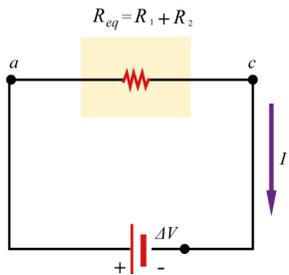


Fig. 40. Resistencia equivalente de dos resistencias en serie.

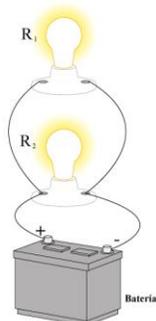
La diferencia de potencial, también se aplica de la misma forma a una resistencia equivalente formada por la suma de las dos resistencias

$$\Delta V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) = I R_{eq}$$

Entonces, en un circuito en serie, la resistencia equivalente es la suma de las resistencias

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \dots$$

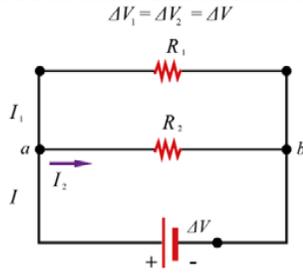
La resistencia equivalente siempre es mayor que la mayor de las resistencias individuales.



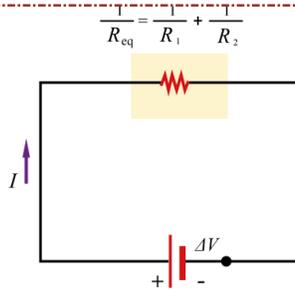
**Resistencia en paralelo**

Se dice que dos resistencias están conectadas en paralelo cuando se encuentran unidas como se muestra en la figura.

**Fig. 41.** Circuito con resistencias en paralelo con una batería.



**Fig. 42.** Resistencias en paralelo y el sentido de la corriente.



**Fig. 43.** Resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo.

Cuando las cargas llegan al punto a, al que se llama nodo, la corriente se divide de tal manera que llega menos corriente en cada uno de los resistores, como la carga eléctrica se conserva, la corriente que llega al punto a tiene que ser igual a la corriente que abandona el punto

$$I = I_1 + I_2$$

Cuando las resistencias se conectan en paralelo, las diferencias de potencial en cada resistencia es la misma

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

La resistencia equivalente sería

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

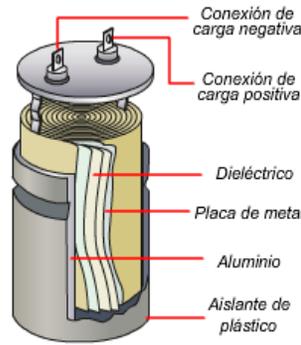
Para más de dos resistencias, se tendría

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

La resistencia equivalente de dos o más resistencias conectadas en paralelo es igual a la suma del inverso de cada una de las resistencias. La resistencia equivalente siempre es menor que la menor resistencia en el grupo.

## Capacitores

El capacitor **es un dispositivo electrónico que sirve para almacenar energía**. Se encuentra presente en la mayoría de los circuitos eléctricos, además de los resistores ya estudiados.



### Capacitor de placas paralelas

El más sencillo de todos es el **capacitor de placas paralelas**. Consiste de dos placas conductoras de área  $S$  separadas por una distancia  $d$ .

La carga positiva  $q$  se encuentra en una de las placas, mientras la carga negativa  $-q$  se encuentra en otra de las placas.

El campo eléctrico entre las placas es  $E = \sigma / \epsilon_0$ , donde la carga por unidad de área dentro de la placa izquierda es  $\sigma = q/S$ .

La densidad en la placa derecha es  $-\sigma$ . Toda la carga se encuentra dentro de las superficies, de esta manera contribuye al campo eléctrico que cruza el espacio entre ambas placas.

Capacitor de placas paralelas.

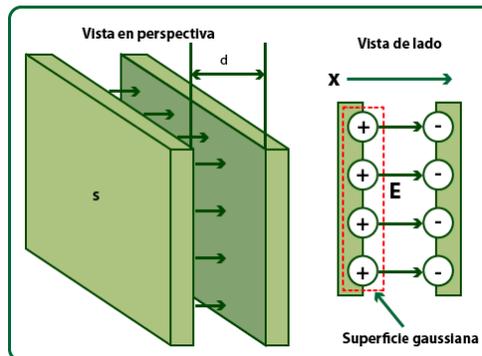
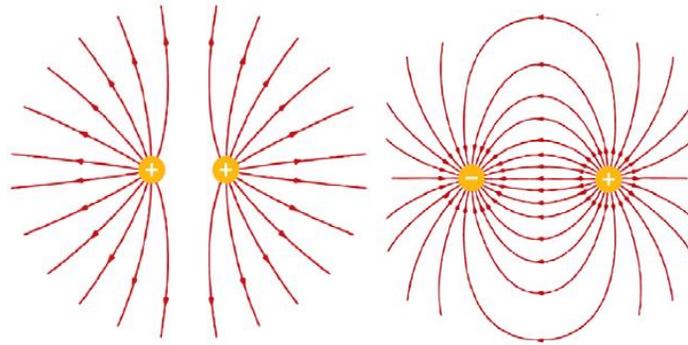


Fig. 44. Capacitor de placas paralelas.

### Campo eléctrico

La expresión para el campo eléctrico se obtiene al aplicar la Ley de Gauss a la hoja cargada en la placa positiva. El factor  $\frac{1}{2}$  presente en la ecuación para una hoja cargada aislada está ausente aquí debido a que todo el flujo eléctrico sale de la superficie gaussiana en el lado derecho, el lado izquierdo de la superficie gaussiana está dentro del conductor donde el campo eléctrico es cero, al menos en una situación estática. En este caso el campo eléctrico se relaciona con el potencial eléctrico escalar. De la expresión

$$E = -\frac{dV}{dx}$$



### Diferencia de potencial y capacitancia

Se integra a través del espacio de las placas conductoras para encontrar la diferencia de potencial entre las placas, y como  $E$  es constante, se tiene:

$$\Delta V = Ed = qd/(\epsilon_0 S)$$

Observa que la relación indica que el potencial eléctrico es proporcional a la carga, y la constante de proporcionalidad en este caso es  $d/(\epsilon_0 S)$ ; el inverso de esta constante se le llama **capacitancia**, y se expresa por medio de la ecuación:

$$C = (\epsilon_0 S)/d$$

### Diferencia de potencial y capacitancia

Los circuitos pueden ser analizados con la relación conocida como la **Ley de Ohm** ( $\Delta V = IR$ ) y la relación de resistencia equivalente en serie o en paralelo. Sin embargo, circuitos más complicados no pueden ser tan fácilmente reducidos a una simple espira. Para estos casos es necesario usar dos principios conocidos como **Reglas de Kirchhoff**:

1. Regla de las corrientes: Las corrientes se conservan. La suma de las corrientes que entran un nodo deben ser las mismas que abandonen dicho nodo, es decir, las cargas no se almacenan en ningún punto del circuito, la carga se conserva:

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen}$$

2. Regla de la malla: La suma de las diferencias de potencial a lo largo de todos los elementos de una malla en circuito cerrado debe ser cero.

$$\sum_{\text{mallacerrada}} \Delta V = 0$$

### Circuitos RC

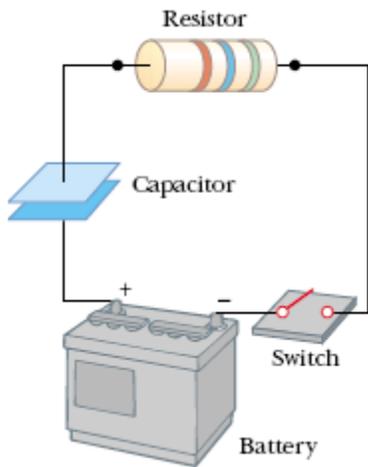


Fig. 45. Circuito con una resistencia y un capacitor.

**Circuito RC**

Un circuito con una resistencia y un capacitor se le conoce como circuito RC. En un circuito de corriente directa la corriente siempre va en la misma dirección.

No existe corriente si el switch está abierto. Si el switch se cierra, inicia una corriente en el circuito y el capacitor comienza a cargarse.

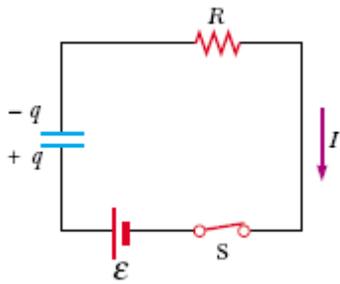


Fig. 46. Circuito que muestra la carga del capacitor.

Mientras el capacitor se carga, existe una corriente en el circuito debido al campo eléctrico que se establece entre los alambres por la batería, hasta que el capacitor se carga completamente, en ese momento deja de circular carga y la corriente es cero.

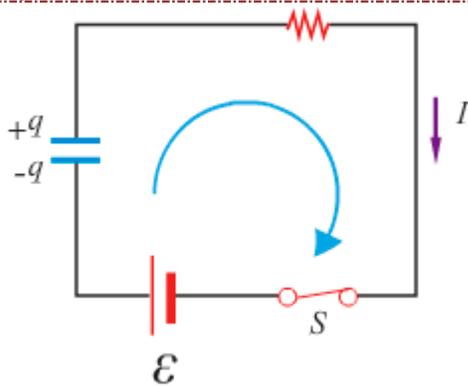


Fig. 47. Análisis del circuito usando la regla de las mallas de Kirchhoff.

**Reglas de las mallas de Kirchhoff**

De manera cuantitativa, se analiza el circuito de acuerdo con la regla de las mallas de Kirchhoff:

Se considera el análisis siguiendo la malla en el sentido contrario a las manecillas del reloj, se obtiene:

$$\epsilon - \frac{q}{c} - IR = 0$$

Donde  $\frac{q}{c}$  es la diferencia de potencial a través del capacitor y  $IR$  es la diferencia de potencial a través de la resistencia. Los signos son positivos si existe un aumento en la diferencia de potencial y negativo cuando hay una caída de potencial.

La corriente inicial en el circuito es cuando el switch se cierra y la carga en el capacitor es cero, entonces:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

Cuando el capacitor está a su máxima carga, las cargas dejan de fluir, la corriente en el circuito es cero y la diferencia de potencial de la batería está aparece en el capacitor. Entonces se tiene para  $I = 0$ , la carga en el capacitor:

$$Q = C\varepsilon$$

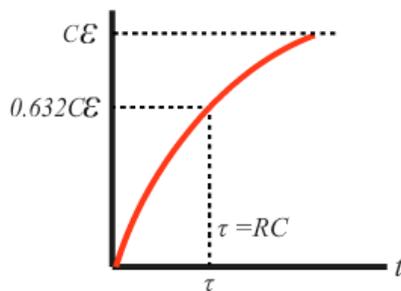


Fig. 48. Carga del condensador.

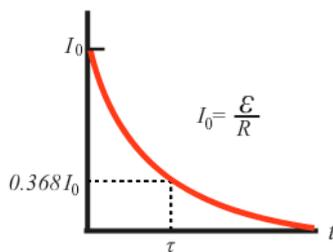


Fig. 49. Variación de la corriente durante la carga del condensador.

La dependencia de la carga y la corriente se obtiene al resolver la ecuación

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - IR = 0$$

En este caso, como,

$$I = \frac{dq}{dt}, \frac{dq}{dt} = \frac{C\varepsilon}{RC} - \frac{q}{RC}$$

Por la tanto,

$$\frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC} dt$$

Al integrar la expresión para  $q$   $q=0$  y  $t=0$  se obtiene:

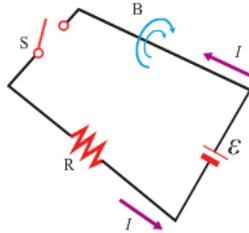
$$q(t) = C\varepsilon (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = Q (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Donde  $e$  es la base de los logaritmos naturales.

Si se diferencia la ecuación anterior, se tiene una expresión para la corriente

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

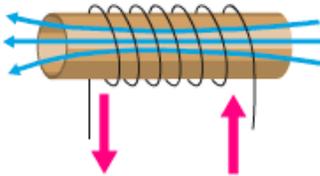
Inductores



**Fig. 50.** La corriente que pasa por el circuito genera un campo magnético alrededor del alambre.

Al considerar el circuito que se encuentra en la imagen, cuando el switch se cierra, la corriente no pasa de cero a su máximo valor  $\epsilon/R$ . De acuerdo con la Ley de Faraday, conforme se incrementa la corriente, el flujo magnético también aumenta, este **incremento en el flujo** crea una fem en el circuito.

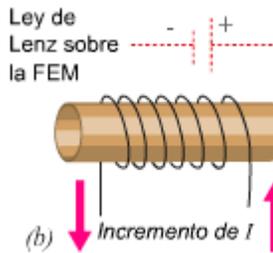
La dirección de la *fem inducida* es opuesta al cambio del campo magnético original. La *fem* inducida es opuesta a la *fem* de la batería. A este efecto se le llama autoinducción  $\epsilon_L$ .



**Fig. 51.** FEM inducida en un alambre.

La fem autoinducida siempre es proporcional al cambio en el tiempo de la corriente, para cualquier espira,

$$\epsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$



**Fig. 52.** La FEM autoinducida es contraria al cambio cuando la corriente aumenta.

Donde  $L$  es una constante de proporcionalidad llamada inductancia de la espira. Usando la Ley de Faraday,

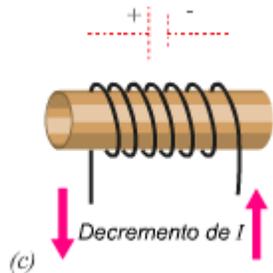
$\epsilon_L = - \frac{Nd\Phi_B}{dt}$ , la inductancia de una espira de  $N$  vueltas que lleva una corriente  $I$ , es

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}$$

Que también se puede escribir como

$$L = - \frac{\epsilon_L}{dI/dt}$$

La resistencia es una medida de la oposición de la corriente, la inductancia es una medida de la oposición al cambio en la corriente.



**Fig. 53.** La FEM autinducida también es contraria al cambio si la corriente disminuye.

En el sistema internacional de medidas la unidad de la inductancia es el Henrio (H),

$$1H = 1 \frac{V \cdot s}{A}$$

## Evidencia de aprendizaje. Problemas prototípicos sobre dispositivos eléctricos

Para culminar el estudio de la unidad, realiza la **Evidencia de aprendizaje. Problemas prototípicos sobre dispositivos eléctricos**, solo espera las indicaciones de tu *docente en línea* a través del espacio de *Planificación de actividades del docente en línea*.

### Autorreflexiones

Como parte de cada unidad, es importante que ingreses a la actividad de *Autorreflexiones* que se encuentra en el módulo de Actividades, para entregar lo solicitado por tu *docente en línea*, quien realizará cuestionamientos de reflexión y te los indicará en el espacio de *Planificación de actividades del docente en línea*.

No olvides que también se toman en cuenta para la calificación final.

\* Recuerda que deberás realizar un archivo por unidad.

### Cierre

En esta unidad se revisaron los conceptos y leyes del electromagnetismo, algunas de las aplicaciones y los modelos que te ayudan a describir y explicar dispositivos eléctricos de la vida diaria.

Se realizaron actividades para comprender y utilizar los conceptos estudiados, a través del modelado de fenómenos electromagnéticos presentes en problemas prototípicos. La última práctica te dio la oportunidad de visualizar la importancia de los fenómenos ondulatorios; así como del modelo ondulatorio, para comprender muchos fenómenos naturales. El estudio de la luz como fenómeno ondulatorio y corpuscular lo revisarás en la siguiente unidad.

## Para saber más



Para reforzar tus conocimientos sobre la unidad, se te sugieren los siguientes sitios web:

- Rapidez de arrastre. Corriente eléctrica  
<http://www.esi2.us.es/DFA/FFII/Apuntes/Curso0607/tema5fatima.pdf>
- Ondas electromagnéticas. Hertz.  
[http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/112/htm/sec\\_17.htm](http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/112/htm/sec_17.htm)
- Dipolo eléctrico  
<http://www.uv.es/cantarer/ffi/dipolo.pdf>

## Fuentes de consulta



- Gettys, W. E., Keller, F. J. & Skove, M. J. (2005). *Física para Ciencias e Ingeniería*. Madrid: McGraw-Hill.
- Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J. (2001). *Fundamentos de Física*. México: CECSA.
- Hewitt, P. G. (2009). *Física conceptual*. México: Pearson Educación Addison Wesley Longman.
- M. Alonso & E. J. Finn (2008). *Física*. España: Pearson.

- Morse, Robert A. (2005). *Conceptualizing ideal circuit elements in the AP Physics C syllabus*, *The Physics Teacher*.43 (8), pages 540-543.
- Yaakov Kraftmakher (2011). *Demonstrations with an LCR Circuit*," *The Physics Teacher*, 49(3), pages 168-170.
- Resnick, R., Halliday, D. & Krane, K. S. (2002). *Física*. México: CECSA.
- Sears, F. W., et al. (2004). *Física universitaria*. México: Pearson Addison-Wesley.