UnADM
Universidad Abierta y a Distancia de México

Programa de la asignatura:

Cálculo diferencial

U1 | Funciones, límites y continuidad

División de Ciencias de la Salud, Biológicas y Ambientales

Índice

Presentación de la unidad

Se pretende que, en esta unidad, se revisen las propiedades de los números reales desde una vista intuitiva, estas a su vez son útiles al momento de operar con diferentes números. Estas propiedades establecen reglas que deberás aplicar durante todo el desarrollo del curso.

Revisarás los axiomas de la suma, producto o multiplicación, de distribución que involucra a la suma, multiplicación y división. También veremos los axiomas de orden y completes, donde a todo conjunto de números reales le corresponde un antecesor y sucesor.

El valor absoluto de un número real y los intervalos que puede tomar en un conjunto de número y su representación gráfica del valor absoluto de un número real. Para terminar, revisarás el concepto de función, su dominio y contradominio, su representación gráfica tomando valores que lleguen al límite y sus diferentes operaciones.

En esta unidad revisamos el concepto de límite de una función, donde cuyo dominio y el recorrido son elementos llamados subconjuntos de conjunto de los números reales.

Lo que se pretende en esta unidad, es que conozcas las propiedades del límite, aplicados a una función, su continuidad y las propiedades de una continuidad de los límites. Al transcurso de la unidad, podrás constatar que una función, tiene ciertos elementos que permiten su continuidad de acuerdo, a los valores que tome, la variable dependiente e independiente.

A partir de estos conceptos, te permitirán demostrar el concepto de límite, su aplicación en diversos contextos, para que relaciones los contenidos teóricos con los prácticos.

Competencia específica

Unidad 1 **Aplica** el concepto de límite para analizar la continuidad y la derivada de una función, utilizando las propiedades de los números reales, de los límites y su representación gráfica.

Propósitos

- Identificar los axiomas de estructura algebraica de los números reales.
- Resolver problemas utilizando los axiomas de orden.
- Identificar los conceptos de valor absoluto y los intervalos.
- Determinar el dominio, el contradominio (o codominio), y la imagen de una función.
- Operar con funciones y determinar su gráfica.
- Identificar que el límite es único.
- Relacionar el límite con las operaciones de funciones y determinar los límites unilaterales.
- Identificar el concepto de continuidad de funciones y su relación con el límite.
- Aplicar las propiedades de la continuidad de funciones.

Axiomas de los números reales

En esta unidad se presenta al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ desde un punto de vista axiomático, iniciando con su estructura algebraica, su relación de orden y la condición de completés. Además, se estudian los distintos tipos de intervalos que existen, para finalizar con el estudio del concepto de función y de su representación gráfica.

El campo de los números complejos

El primer contacto que tiene un estudiante con los números es por medio de los **números naturales** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$, en este conjunto existe la operación de suma, ésta a su vez induce a la operación de resta, el problema resulta al observar que no siempre se puede realizar esta operación. Este desafortunado hecho motiva la existencia de los **números enteros** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, en este conjunto se pueden sumar, restar y multiplicar; de manera similar a la suma, la multiplicación induce la operación de división, al igual que para la resta en $\mathbb{N}$, la división no siempre se pude llevar a cabo en $\mathbb{Z}$, lo que motiva la existencia de los **números racionales** $\mathbb{Q}\left\{\frac{a}{b}\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$, en este conjunto se pueden realizar las operaciones básicas de la aritmética: sumar, restar, multiplicar y dividir. Lo anterior presenta la existencia de la siguiente cadena de contención de sistemas numéricos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, se construye a partir de los números racionales, en consecuencia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y ambos conjuntos poseen una estructura algebraica similar. Un conjunto que permite realizar las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética toma el nombre de **campo**, por tal motivo se comienza enunciando las propiedades del campo de $\mathbb{R}$.

Axiomas de la suma: Para la operación de **suma** o **adición** se tiene que para cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se le asigna un elemento único $x + y$ llamado la **suma de** x **con** y que satisface las siguientes condiciones:

(i). **Asociatividad**: $x + (y + z) = (x + y) + z$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(ii). **Conmutatividad**: $x + y = y + x$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.
(iii). **Elemento neutro:** Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.
(iv). **Elemento inverso:** Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.

La propiedad (i) permite operar más de dos elementos y además permite eliminar los paréntesis de la suma, es decir $x+(y+z)=(x+y)+z=x+y+z$. Como consecuencia inmediata de los axiomas de la suma anterior se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.1.1. Los elementos 0 y $-x$ son únicos.
Demostración: Se procede por contradicción, supóngase que existe otro elemento neutro para la suma $0'$, entonces $x+0'=x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, en particular cuando $x=0$ se tiene que $0+0'=0$, pero por definición de 0 se tiene que $0+0'=0'$ en consecuencia $0=0'$. Por otra parte, supóngase que x tiene otro elemento inverso x' para la suma, es decir $x+x'=0$, en consecuencia se tienen las siguientes igualdades:

$$x'=x'+0=x'+(x+(-x))=(x'+x)+(-x)=0+(-x)=-x$$

Por lo tanto $-x=x'$.

Otra propiedad importante es la que se conoce como **ley de cancelación**, la cual se enuncia del siguiente modo:

Proposición 1.1.2. Dados $x,y,z \in \mathbb{R}$. tales que $x+y=x+z$ entonces $y=z$.
Demostración: Este resultado se obtiene de aplicar los axiomas de la suma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x+y &= x+z && \\ (-x)+[x+y] &= (-x)+[x+z] && \text{Unicidad de la suma} \\ [(-x)+x]+y &= [(-x)+x]+z && \text{Asociatividad} \\ 0+y &= 0+z && \text{Inverso aditivo} \\ y &= z && \text{Elemento neutro} \end{aligned}$$

Por lo tanto $x+y=x+z$ implica que $y=z$.

La propiedad anterior permite definir la operación de **resta** a partir de la propiedad (iv) por medio de la siguiente relación: dados $x,y \in \mathbb{R}$ el elemento x **menos** y se define por $x-y=x+(-y)$.

Axiomas de la multiplicación: Para la operación de **multiplicación** o **producto** se tiene que para cada pareja de elemento $x,y \in \mathbb{R}$ se le asigna un elemento único $x\times y$ llamado **el producto de** x **con** y que satisface las siguientes condiciones:

(v). **Asociatividad**: $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$ para cualesquiera $x,y,z \in \mathbb{R}$.
(vi). **Conmutatividad**: $x\times y=y\times x$ para cualesquiera $x,y \in \mathbb{R}$.

(vii). **Elemento neutro:** Existe $\mathbb{R}$ con $1 \neq 0$, tal que $x \times 1 = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

(viii). **Elemento inverso:** Dado $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \times x^{-1} = 1$.

El producto también se denota por $x \cdot y$ ó xy. Al igual que la suma, la propiedad (v) permite multiplicar más de tres elementos y también se puede eliminar el paréntesis, es decir $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z$. Como consecuencia inmediata de los axiomas del producto se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.1.3. Los elementos 1 y x^{-1} son únicos.

Demostración: Se procede por contradicción, supóngase que existe otro elemento neutro $1'$, entonces $x \times 1' = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, en particular cuando $x = 1$ se tiene que $1 \times 1' = 1$, pero por definición de 1 se tiene que $1 \times 1' = 1'$ en consecuencia $1 = 1'$. Por otra parte, supóngase que x tiene otro elemento inverso x' para la multiplicación, es decir $x \times x' = 1$, en consecuencia se tienen las siguientes igualdades:

$$x' = x' \times 1 = x' \times (x \times x^{-1}) = (x' \times x) \times x^{-1} = 1 \times x^{-1} = x^{-1}$$

Por lo tanto $x^{-1} = x'$.

□

En producto también existe la propiedad de cancelación la cual es indispensable para la definición de división de números reales:

Proposición 1.1.4. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, tales que $x \cdot y = x \cdot z$ entonces $y = z$.

Demostración: Este resultado se obtiene de aplicar los axiomas de la suma de la siguiente manera:

$x \cdot y = x \cdot z$	
$x^{-1} \cdot [x \cdot y] = x^{-1} \cdot [x \cdot z]$	Unicidad dela producto
$[x^{-1} \cdot x] \cdot y = [x^{-1} \cdot x] \cdot z$	Asociatividad
$1 \cdot y = 1 \cdot z$	Elemento recíproco
$y = z$	Elemento neutro

Por lo tanto $x.y = x.z$ implica que $y = z$.

□

Axioma de distribución: Las operaciones de suma y multiplicación quedan relacionadas a través de la propiedad distributiva:

(ix). Para cualquier par $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Hay que observar que las propiedades de conmutativas de la suma y el producto respectivamente garantizan que $(x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z)$.

Estos nueve axiomas son los que determinan la estructura aritmética de los números reales, las propiedades siguientes se obtienen de aplicar los axiomas anteriores.

Lema 1.1.5. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $0\cdot x=0$.
Demostración: Dado $x \in \mathbb{R}$ se tiene las siguientes relaciones:

$$
\begin{array}{ll}
0\cdot x=(0+0)\cdot x & \text{Elemento neutro} \\
0\cdot x=(0\cdot x)+(0\cdot x) & \text{Propiedad distributiva} \\
\cancel{0\cdot x}=\cancel{(0\cdot x)}+(0\cdot x) & \text{ley de cancelación} \\
0=0\cdot x &
\end{array}
$$

Por lo tanto $0\cdot x=x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Corolario: El elemento 0^{-1} no existe.
Demostración: Se procede por contradicción, supóngase que 0^{-1} existe, entonces $0=0\times 0^{-1}=1$, lo cual es una contradicción ya que $0\neq 1$. Esto implica que la hipótesis de la existencia de 0^{-1} es insostenible. Por lo tanto 0^{-1} no existe.

□

La operación de **división** se define a partir de la propiedad (viii) a través de la siguiente relación: dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $y\neq 0$, el elemento x **entre** y se define por $x\div y=x\times y^{-1}$.
En algunas ocasiones la división $x\div y$ también se denota por x/y ó $\frac{x}{y}$.

Otro resultado importante es el siguiente:

Lema 1.1.6. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:

(a) $-(-x)=x$.
(b) $x(-y)=(-x)y=-xy$.
(c) $(-x)(-y)=xy$.

Demostración: Para (a) hay que observar que $(-x)+[-(-x)]=0$ además $(-x)+x=0$ por consiguiente $(-x)+[-(-x)]=(-x)+x$, por la ley de cancelación $-(-x)=x$. Para (b) hay que observar las siguientes relaciones:

$$y+(-y)=0 \qquad \text{Inverso aditivo}$$
$$x\cdot[y+(-y)]=x\cdot 0 \qquad \text{Unicidad del producto}$$
$$xy+x(-y)=0 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

Además $xy+(-xy)=0$, en consecuencia se tiene que $xy+x(-y)=xy+(-xy)$, por la ley de cancelación $x(-y)=-xy$, el resultado $(-x)y=-xy$ es similar. Finalmente, para (c) se obtiene de lo siguiente:

$$y+(-y)=0 \qquad \text{Inverso aditivo}$$
$$(-x)\cdot[y+(-y)]=(-x)\cdot 0 \qquad \text{Unicidad del producto}$$
$$(-x)y+(-x)(-y)=0 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

Además $(-x)y=-xy$ por consiguiente $-xy+(-x)(-y)=0$, es decir, $-(-xy)=(-x)(-y)$ de donde se sigue $(-x)(-y)=xy$.

□

Para finalizar esta sección se definen las potencias y las raíces de un número real. Dado $x\in\mathbb{R}/\{0\}$ y $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ la potencia o exponente n de x se define de forma recursiva por la siguiente relación:

$$x^n=\begin{cases}1, & \text{si } n=0\\ x\cdot x^{n-1} & \text{si } n\neq 0\end{cases}$$

La forma explícita de la relación anterior es $x^n=\underbrace{x\times\cdots\times x}_{n \text{ veces}}$, es decir, n cuentas las veces que se multiplica x por sí mismo. Cuando $x=0$, se tiene que 0^n es igual a 0, para $n\neq 0$; el caso 0^0 no está definido.

Como consecuencia de la definición anterior se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.1.8. Para cuales quiera $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y $x\in\mathbb{R}/\{0\}$ se cumple:

(a) $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$.

(b) $\left(x^m\right)^n=x^{nm}$.

Demostración: Lo anterior se muestra contando adecuadamente los exponentes de x, para (a) se tiene que:

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{m \text{ veces}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ veces}} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{(m+n) \text{ veces}} = x^{m+n}$$

Por otro lado, para (b) se tiene

$$\left(x^m\right)^n = \underbrace{x^m \times \cdots \times x^m}_{n \text{ veces}} = \underbrace{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{m \text{ veces}} \times \cdots \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{m \text{ veces}}}_{n \text{ veces}} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{nm \text{ veces}} = x^{nm}.$$

Lo que muestra el resultado.

La parte (a) justifica el uso de la notación x^{-1} para el inverso multiplicativo. Utilizando esto y la propiedad (b) se extiende el concepto de potencial a un exponente negativo bajo las relaciones $\left(x^{-1}\right)^n = \left(x^n\right)^{-1} = \frac{1}{x^n}$.

Como proceso inverso de una potencia se define la raíz de un número real. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ se dice que x **es raíz n-ésima de** y y se denota por $\sqrt[n]{x} = y$ sí y solo sí $x^n = y$.

La propiedad (b) presenta la relación existente entre las potencias y la multiplicación, dado que la potencia es lo inverso de las raíces, entonces las raíces se relacionan con la división por medio de la siguiente igualdad $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Por último, cabe mencionar que a pesar de que la definición de la raíz n -ésima de un número real es de naturaleza algebraica su existencia no se puede garantizar solamente con las propiedades antes mencionadas.

Axiomas de orden y completes

En el conjunto de los números naturales hay una relación de orden, dado un número natural distinto de cero, este tiene un antecesor y un sucesor, esta idea se hereda al conjunto de los números enteros y este orden a su vez es heredado al conjunto de los números racionales. En el caso de los números reales, el concepto de orden se obtiene por medio de la siguiente definición, esta engloba el orden en los sistemas numéricos antes mencionados.

Axiomas de orden: Existe un subconjunto P de $\mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

(i). Dado $x \in \mathbb{R}$ se tiene una y solo una de las siguientes condiciones:

$$x \in \mathrm{P} \quad \text{ó} \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad -x \in \mathrm{P}$$

(ii). Dados $x, y \in \mathrm{P}$ se tiene que $x + y, xy \in \mathrm{P}$

El axioma (i) indica que el conjunto $\mathbb{R}$ es la unión disjunto de tres conjuntos $\mathbb{R} = \mathrm{P} \cup \{0\} \cup \mathrm{P}'$ donde P' es el conjunto de los inversos aditivos de P, esta propiedad se conoce como la **tricotomía**. La propiedad (ii) dice que P es **cerrado** bajo suma y productos. Los elementos del conjunto P son llamados **positivos,** lo que se denotará como $x > 0$ y los elementos de P' son llamados **negativos**, los cuales se denotan por $x < 0$.

Los axiomas de orden permiten comparar números reales del siguiente modo: para cada par $x, y \in \mathbb{R}$ se dice que x **es mayor que** y ó que y **es menor que** x sí y sólo si $x - y \in \mathrm{P}$ o equivalentemente $x - y > 0$, lo anterior se denota por $x > y$ ó $y < x$ respectivamente. Como consecuencia la ley de tricotomía se enuncia de la siguiente forma: para cada par $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene una y sólo una de las siguientes condiciones:

$$x > y \quad \text{ó} \quad x = y \quad \text{ó} \quad x < y.$$

El **Lema 1.1.6.** Afirma que **el producto de un positivo con un negativo y viceversa es negativo** y **el producto de dos números negativos es positivo**, lo anterior se le conoce como la **regla de los signos**. Aplicando esto hay que observar que $1 = 1 \times 1 = (-1) \times (-1)$ lo que implica que $1 > 0$.

El siguiente paso es presentar cómo interactúa la estructura algebraica de $\mathbb{R}$ con la estructura de orden de $\mathbb{R}$, lo cual se presenta en el siguiente resultado:

Lema 1.1.9. Para cuales quiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:

(a) Si $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$.
(b) Si $x < y$ y $z > 0$ entonces $xz < zy$.
(c) Si $x < y$ entonces $x \pm z < y \pm z$.

(d) Si $x<y$ y $x,y>0$ entonces $\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$.

Demostración: Para (a) se tiene que como $x<y$ y $y<z$ implican que $y-x, z-y\in P$. Además P es cerrado bajo la suma se tiene que $(y-x)+(z-y)\in P$, es decir $z-x\in P$ por consiguiente $x<z$. Para (b) se tiene que $y-x, z\in P$, dado que P es cerrado bajo el producto se tiene que $(y-x)z\in P$ lo que implica que $yz-xz>0$, es decir $xz<yz$. Para (c) $y-x\in P$ lo que implica que $(y+z)-(x+z)\in P$ y $(y-z)-(x-z)\in P$, es decir $x\pm z<y\pm z$. Finalmente, hay que observar que cuando $x>0$ entonces $x^{-1}>0$ ya que si $x^{-1}<0$ entonces $1=x\cdot x^{-1}<0$, lo que es una contradicción; tomando $x,y\in P$ implica que $x^{-1}, y^{-1}\in P$, por la parte (b) se tiene que:

$x<y$	
$x^{-1}\cdot x<x^{-1}\cdot y$	por (ii)
$1<x^{-1}\cdot y$	inverso multiplicativo
$1\cdot y^{-1}<x^{-1}\cdot y\cdot y^{-1}$	por (ii)
$y^{-1}<x^{-1}$	Asociatividad e inverso multiplicativo

Lo que muestra el resultado.

□

En cuestiones algebraicas y en términos de orden, los números reales y los números racionales no muestran diferencias, la diferencia se presenta en el siguiente axioma.

Axioma de completitud

Antes de enunciar el axioma de completitud se requieren los siguientes conceptos, los cuales se obtienen a partir del orden presentado en $\mathbb{R}$: Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$, se dice que α **es una cota inferior de** S si y sólo si $\alpha<x$ para todo $x\in S$, de manera similar se dice que β **es una cota superior de** S si y solo si $x<\beta$ para todo $x\in S$.

A partir de las definiciones anteriores se tiene que para $S\subset\mathbb{R}$ el **supremo** de S, denotado por $\sup(S)$, es la cota superior más pequeña, es decir, para cualquier cota superior β de S se tiene que $\sup(S)\le\beta$. De manera análoga, para $S\subset\mathbb{R}$ el **ínfimo** de S, denotado por $\inf(S)$, es la cota inferior más grande, es decir, para cualquier cota inferior α de S se tiene que $\alpha\le\inf(S)$. Cuando se tiene que $\sup(S)\in S$ el supremo de S toma el nombre de **máximo de** S**,** de forma similar cuando $\inf(S)\in S$ el ínfimo de S toma el nombre de **mínimo** de S.

Ejemplo: El conjunto de los números naturales no es acotado.

Ejemplo: El conjunto de los números positivos es acotado inferiormente por cualquier número negativo y su ínfimo es cero.

Una de las grandes diferencias entre los números reales y los números naturales es la existencia del supremo y del ínfimo para un subconjunto dado acotado. Esto se resuelve por medio del siguiente axioma.

Axioma de completitud: Todo subconjunto no vacío de números reales que es acotado superiormente tiene supremo. Equivalentemente, todo subconjunto no vacío de números reales que es acotado inferiormente tiene ínfimo.

Teorema 1.1.10. El conjunto $\mathbb{N}$ no es acotado, es decir**,** para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $\mathbb{N}$, donde n depende de x, tal que $x < n$.

Demostración: Se procede por contradicción, supóngase que no se cumple la condición, esto quiere decir que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por consiguiente $\mathbb{N}$ es un conjunto acotado superiormente, por el axioma de completés existe $\beta = \sup(\mathbb{N})$. Observando que $\beta - 1 < \beta$ entonces $\beta - 1$ no es cota superior de $\mathbb{N}$ ya que β es la más pequeña de las cotas superiores, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta - 1 < m$, equivalentemente, $\beta < m + 1$ es decir β no es cota superior de $\mathbb{N}$ ya que $m + 1 \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción. En consecuencia la hipótesis de la existencia de $\beta = \sup(\mathbb{N})$. es insostenible, por lo tanto, se sigue el resultado.

□

Como una aplicación del axioma de completés y el teorema anterior se presenta el siguiente resultado, el cual recibe el nombre de **propiedad arquimediana**, y en esencia dice que dado un número siempre se puede construir un número más grande.

Corolario: Dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$.

Demostración: Tomando $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{y}{x} < n$ por consiguiente $y < nx$.

□

El axioma de completes se utiliza para mostrar propiedades como la densidad de los números reales, la existencia de las raíces de números reales positivos, entre otras cosas, sin embargo, las técnicas empleadas para tales demostraciones son parte de un curso de análisis matemático y se escapan de los objetivos de este curso.

La regla de los signos dice que el producto de números reales del mismo signo es positivo y el producto de números reales con signos distintos es negativo, esto implica que **la potencia de un positivo siempre es positivo** y que **la potencia de un negativo es positivo cuando la potencia es par y que es negativo si la potencia es impar**.

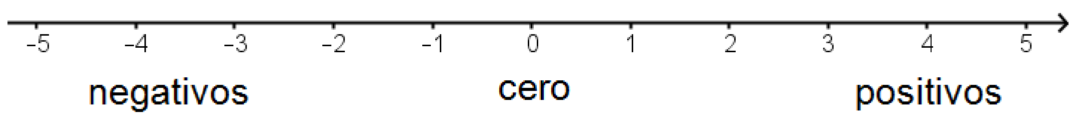
La última observación impone una condición muy importante para la extracción de raíces: **no existen en el conjunto de los números reales las raíces pares de un número negativo**, por ejemplo $\sqrt{-4}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no tienen sentido en $\mathbb{R}$. Además, en caso de existir, las raíces pares siempre son dos, una positiva y otra negativa, por convención, sólo se toma el valor positivo, por ejemplo $\sqrt{9}$ tiene dos valores 3 y -3 ya que $(3)^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$, por el convenio se tiene que $\sqrt{9} = 3$.

Para finalizar esta sección se introduce el concepto de infinito, el cual se define de la siguiente forma: Existe un elemento $\infty \notin \mathbb{R}$ tal que:

(i). $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(ii). $x + \infty = \infty$ y $x - \infty = -\infty$.
(iii). $x \div \infty = 0$ y $x \div (-\infty) = 0$.
(iv). Si $x > 0$ entonces $x \cdot \infty = \infty$ y $x \cdot (-\infty) = -\infty$.
(v). Si $x < 0$ entonces $x \cdot \infty = -\infty$ y $x \cdot (-\infty) = \infty$.

La propiedad (i) sirve para ver al conjunto $\mathbb{R}$ como un conjunto acotado inferior y superiormente. La propiedad (ii) muestra cómo interactúa ∞ con la suma y la resta, las propiedades (iv) y (v) muestran la interacción de ∞ con el producto. Finalmente, la propiedad (iii) se justificará con el concepto de límite.

Gracias a la existencia de los axiomas de orden y completés, el conjunto de los números reales tiene una representación gráfica como una recta horizontal, donde se ubica al cero en el centro de la misma, la recta se divide en segmentos de la misma longitud representando 1 cada segmento. Por convención, del lado derecho se ubican los números positivos y en el lado izquierdo están los números negativos, además dados dos números sobre la recta es más grande el que esté más a la derecha.



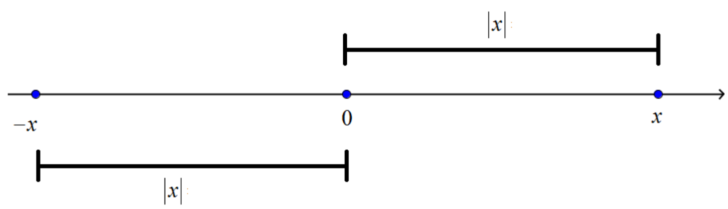
Valor absoluto e intervalos

El valor absoluto de un número real es uno de los conceptos de suma importancia en el desarrollo del cálculo, el cual se define de la siguiente manera: Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de x se denota y se define por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, $|3| = 3$ y $|-5| = 5$. De manera equivalente, por la convención para las raíces pares de un número positivo, el valor absoluto es $|x| = \sqrt{x^2}$. Como consecuencia inmediata de la definición anterior se tiene que $x \leq |x|$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Como una **advertencia importante**, por la manera en cómo se define el valor absoluto de un número real, cuándo se trabaja con este concepto siempre hay que trabajar en casos: el primero cuando se tienen valores positivos y el segundo cuando se tienen valores negativos.

En forma gráfica, el valor absoluto de un número real es la distancia que hay de este número al cero.



La primera propiedad que se presenta es la relación que existe entre el valor absoluto y la suma de números reales, dicha relación toma el nombre de la **desigualdad del triángulo**.

Lema: Para cualquier par $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $|x+y| \leq |x| + |y|$.
Demostración: Se procede por casos.

- Caso I: cuando $x \geq 0$ y $y \geq 0$, entonces $|x| = x$ y $|y| = y$, luego se tiene que $|x+y| = x+y = |x| + |y|$.
- Caso II: cuando $x \geq 0$ y $y < 0$, entonces $|x| = x$ y $|y| = -y$, como no se sabe si $x+y$ es positivo o es negativo. Se procede por subcasos, cuando $x+y \geq 0$, entonces $|x+y| = x+y < x-y$; cuando $x+y<0$ se tiene que $|x+y| = -(x+y) = -x-y < x-y$, en ambos caso se tiene que $|x+y| < x-y = x+(-y) = |x| + |y|$.
- Caso III: cuando $x < 0$ y $y \geq 0$ se obtiene de manera similar al Caso II.

- Caso IV: cuando $x<0$ y $y<0$, entonces $|x|=-x$ y $|y|=-y$, luego se tiene que $|x+y|=-(x+y)=-x-y=|x|+|y|$.

Por lo tanto, se tiene que $|x+y|\leq|x|+|y|$ para cuales quiera $x,y\in\mathbb{R}$.

□

Ahora se presenta la compatibilidad que hay entre el producto de dos números reales y el valor absoluto de los mismos.

Teorema: Para cualquier par $x,y\in\mathbb{R}$ se tiene que $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.
Demostración: Se procede por casos.

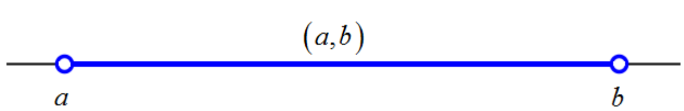
- Caso I: cuando $x\geq 0$ y $y\geq 0$, entonces $|x|=x$ y $|y|=y$, luego se tiene que $|x\cdot y|=x\cdot y=|x|\cdot|y|$.
- Caso II: cuando $x\geq 0$ y $y<0$, entonces $|x|=x$ y $|y|=-y$, además $xy<0$; de lo cual se implica que $|xy|=-xy=x(-y)=|x|\cdot|y|$.
- Caso III: cuando $x<0$ y $y\geq 0$ se obtiene de manera similar al Caso II.
- Caso IV: cuando $x<0$ y $y<0$, entonces $|x|=-x$ y $|y|=-y$, además $xy>0$, luego se tiene que $|x\cdot y|=x\cdot y=(-x)(-y)=|x|\cdot|y|$.

Por lo tanto, se tiene que $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$ para cuales quiera $x,y\in\mathbb{R}$.

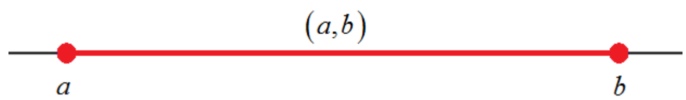
□

En muchas ocasiones, cuando se desea presentar un conjunto de números reales que cumplan algunas condiciones, se presentan como segmentos de recta que toman el nombre de intervalos, los cuales se definen de la siguiente manera: Dados $a,b\in\mathbb{R}$, con $a<b$, se tiene que:

(i). El **intervalo abierto de** a **a** b es el conjunto $(a,\,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$. De forma gráfica el intervalo abierto (a,b) se presenta en la siguiente figura:

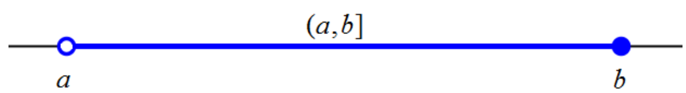


(ii). El **intervalo cerrado de** a **a** b es el conjunto $[a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. De forma gráfica el intervalo abierto $[a,b]$ se presenta en la siguiente figura:

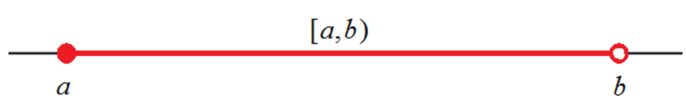


La diferencia entre un intervalo abierto y un intervalo cerrado es que el intervalo cerrado contiene a sus extremos y el abierto no. De las definiciones anteriores se pueden definir otro tipo de intervalos como combinación de abierto y cerrado, a dichos intervalos se les conoce como **semiabiertos** o **semicerrados**, los cuales se definen del siguiente modo:

(iii). El **intervalo abierto en** a **y cerrado en** b es el conjunto $(a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$. De forma gráfica el intervalo abierto $(a,b]$ se presenta en la siguiente figura:



(iv). El **intervalo cerrado de** a **y abierto en** b es el conjunto $[a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. De forma gráfica el intervalo abierto $[a,b)$ se presenta en la siguiente figura:



Las cuatro definiciones anteriores se pueden aplicar cuando alguno o ambos extremos son infinitos, de los cuales se definen los siguientes conjuntos:

(v). $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<a\}$.

(vi). $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le a\}$.

(vii). $(b,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,b<x\}$.

(viii). $[b,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,b\le x\}$.

(ix). $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

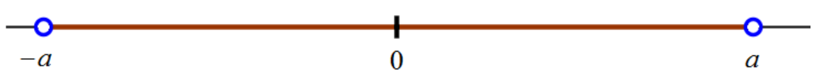
Ahora se presenta el siguiente resultado:

Lema: Dado $a\in\mathbb{R}$ con $a>0$, entonces $|x|<a$ si y sólo si $-a<x<a$, en otras palabras, el intervalo $(-a,a)$ satisface la condición $|x|<a$.

Demostración: Supóngase que $|x|<a$, entonces se tiene que cuando $x\ge 0$, se tiene que $x=|x|<a$ y cuando $x<0$ se tiene que $-x=|x|<a$ es decir $-a<x$, por consiguiente $-a<x<a$. Por otro lado, supóngase que $-a<x<a$, entonces cuando $x\ge 0$ se tiene que $|x|=x<a$ y cuando $x<0$ se tiene que $-a<x=-|x|$ lo que implica que $|x|<a$, por consiguiente $|x|<a$.

$\square$

De manera gráfica la condición $|x|<a$ se presenta del siguiente modo:



Ejercicio: Resolver la siguiente desigualdad $3x+2<14$.
Solución: Sólo basta seguir las propiedades de orden del siguiente modo:

$$\begin{gathered}3x+2<14\\ 3x+2-2<14-2\\ 3x<12\\ \frac{3x}{3}<\frac{12}{3}\\ x<4\end{gathered}$$

Gráficamente se tiene lo siguiente:

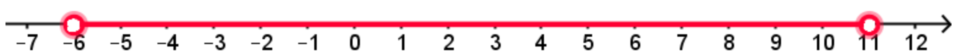
Es decir, el conjunto que satisface la desigualdad es el intervalo $(-\infty, 4)$.

Ejercicio: Resolver la desigualdad $|2x-5|<17$.

Solución: De las propiedades del orden y del valor absoluto se tiene lo siguiente:

$$\begin{gathered}
-17<2x-5<17 \\
-17+5<2x-5+5<17+5 \\
-12<2x<22 \\
-\frac{12}{2}<\frac{2x}{2}<\frac{22}{2} \\
-6<x<11
\end{gathered}$$

Gráficamente se tiene lo siguiente:

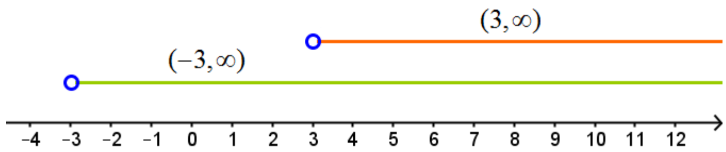


Por lo tanto, la solución es el intervalo $(-6, 11)$.

Ejercicio: Resolver la desigualdad $x^2>9$.

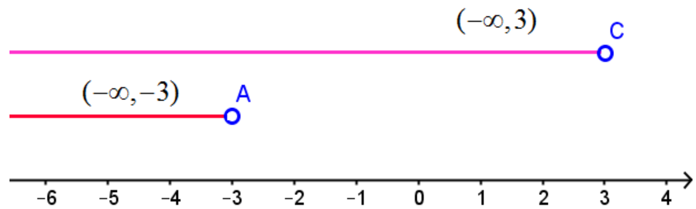
Solución: Se tiene que la relación $x^2>9$ es equivalente a $x^2-9>0$, es decir $(x-3)(x+3)>0$. Recordando la regla para que el producto de dos cantidades sea positivo es porque ambas son positivas o ambas son negativas, por consiguiente, se tienen los siguientes casos:

- Caso 1: Cuando $x-3>0$ y $x+3>0$. Luego $x>3$ y $x>-3$, por lo que la solución a este caso es la intersección de los conjuntos $(3,\infty)$ y $(-3,\infty)$. Gráficamente se tiene lo siguiente:

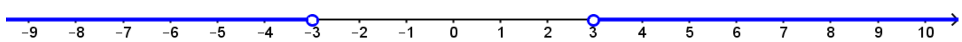


En consecuencia se tiene que el conjunto buscado es $(3,\infty)$.

- Caso 2: Cuando $x-3<0$ y $x+3<0$. Luego $x<3$ y $x<-3$, por lo que la solución a este caso es la intersección de los conjuntos $(-\infty,3)$ y $(-\infty,-3)$. Gráficamente se tiene lo siguiente:



En consecuencia se tiene que el conjunto buscado es $(-\infty,-3)$.
Por consiguiente, la solución es la unión de cada uno de los conjuntos obtenidos en cada caso. Gráficamente se tiene lo siguiente:



Por lo tanto, la solución buscada es $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$.

$\square$

Ejercicio: Resolver la desigualdad $x^2+4x-5<0$.

Solución: Como en el ejemplo anterior, hay que factorizar el polinomio x^2+4x-5, en caso de no verse claro cómo factorizar se recomienda hacer lo siguiente:

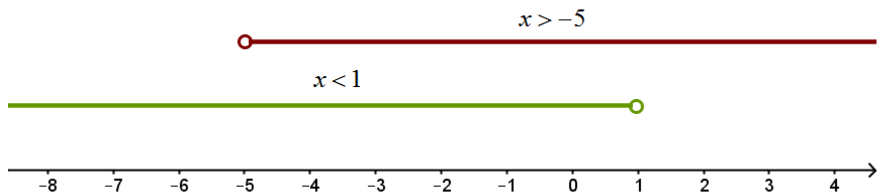
$$x^2+4x-5=\left(x^2+4x\right)-5=\left(x^2+4x+4\right)-5-4=\left(x+2\right)^2-9$$

La técnica anterior se le conoce comúnmente como “completar el cuadrado”, luego se tiene lo siguiente:

$$\left(x+2\right)^2-9=\left[(x+2)-3\right]\left[(x+2)+3\right]=(x-1)(x+5)$$

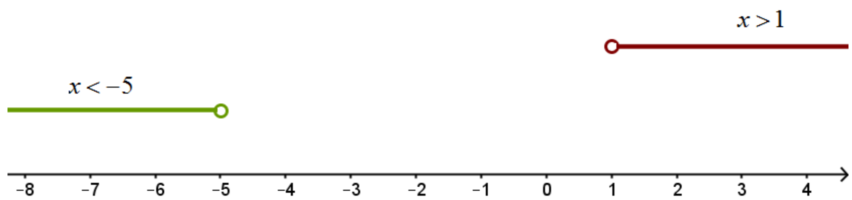
En consecuencia $(x-1)(x+5)<0$. Por la ley de los signos para que el producto de dos números reales sea un número negativo éstos tienen que diferir de signo, por lo cual tenemos los siguientes casos:

- Caso 1: Cuando $x-1<0$ y $x+5>0$, es decir $x<1$ y $x>-5$, gráficamente se tiene lo siguiente:



  Por consiguiente, la solución a este caso es el intervalo $(-5,1)$.

- Caso 2: Cuando $x-1>0$ y $x+5<0$, es decir $x>1$ y $x<-5$, gráficamente se tiene lo siguiente:



  Por consiguiente, no intersectan estos intervalos y así la solución es el conjunto vacío $\varnothing$.

Por lo tanto, la solución buscada es $(-5,1)\cup\varnothing=(-5,1)$.

$\square$

Ejercicio: Resolver la desigualdad $x^2+2x+5\le 0$.
Solución: Se procede completando el cuadrado en el polinomio x^2+2x+5 lo que permite obtener las siguientes relaciones:

$$x^2+2x+5=(x^2+2x)+5=(x^2+2x+1)+5-1=(x+1)^2+4$$

Hay que observar que para cada $x\in\mathbb{R}$ se tiene que $(x+1)^2\ge 0$ y además $4>0$ lo que implica que $(x+1)^2+4>0$ entonces $x^2+2x+5>0$, por consiguiente no existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $x^2+2x+5\le 0$. Por lo tanto, el conjunto solución es $\varnothing$.

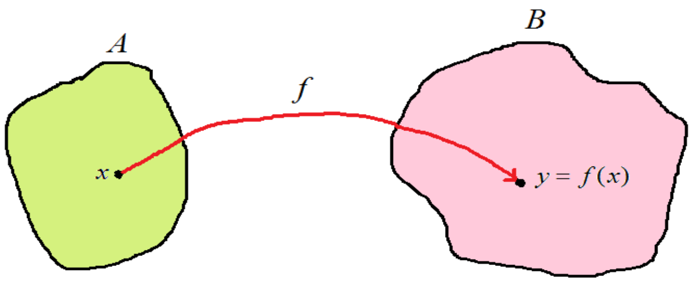
Funciones

El concepto de función es uno de los más importantes que se presentan en matemáticas, gran parte de la atención de los resultados que se presentan en matemáticas son sobre alguna propiedad que cumplen un conjunto determinado de funciones.

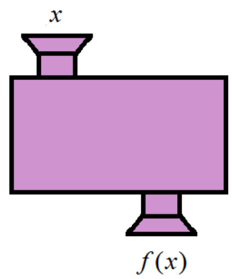
Dominio y contradonimio

En general, una **función** se define como una terna de objetos (f, A, B) donde A y B son dos conjunto no vacíos y f es una regla de correspondencia de tal manera que para cada $x \in A$ se le asocia uno y solo un elemento $y \in B$.

El conjunto A toma el nombre de **dominio** de la función, el conjunto B es el **contradominio**, en muchas ocasiones se denota por $y = f(x)$ al elemento asignado a $x \in A$ por medio de la regla f, este toma el nombre de **imagen de** x bajo f. Hay que resaltar que **todos** los elementos del dominio tienen que estar asignados y que **no todo** elemento del contradominio tiene por qué ser asignado, por lo que nace el concepto de **imagen de una función**, que es el conjunto de todos elementos en el contradominio que son asignados bajo la función y se denota por $f(A)$, luego se tiene que $f(A) \subset B$.



En general una función con dominio A, contradonimio B y regla de correspondencia se denota por $f : A \to B$ dónde $x \mapsto f(x)$. Haciendo un abuso de lenguaje, muchas funciones se denotan solo por su regla de correspondencia $f(x)$ dejando implícito que x pertenece al conjunto donde esté definido $f(x)$, como si f fuera una máquina para procesar y x son solo lo objetos que esa máquina puede procesar.



Todo lo anterior permite decir que **dos funciones son iguales** sí y solo sí coinciden en su dominio, contradominio y regla de correspondencia.

Ejemplo: Considera el conjunto de estudiantes dentro de un salón y el conjunto de bancas que hay en dicho salón, y la regla de correspondencia es que a cada estudiante se le asigna la banca donde está sentado.

Ejemplo: Dado un conjunto $A \neq \varnothing$ se define la función identidad $\mathrm{Id}_A : A \to A$ con regla de correspondencia $\mathrm{Id}_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

En el ejemplo anterior, se supone de manera implícita que no hay estudiantes de pie, con un estudiante que este de píe, la asignación anterior ya no es una función porque hay un elemento que no tiene asignación. Por otra parte, el hecho de que todos los estudiantes estén sentados no quiere decir que no existan bancas vacías.

Sin considerar características en el dominio y el contradominio, las funciones toman los siguientes nombres: Dada una función $f : A \to B$ se dice que:

(i). Es **inyectiva** si y solo si elementos distintos tienen imágenes distintas, es decir, para $x, y \in A$ implica que $f(x) \neq f(y)$, equivalentemente, cuando $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$.

(ii). Es **sobreyectiva** si y solo si $f(A) = B$, es decir, dado $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

En cálculo, se estudian funciones donde su dominio y su contradominio son subconjunto de números reales.

Ejemplo: Sea $f : \{0, -2, 0.5, \sqrt{2}, \pi, -5\} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = 3x$, entonces se tiene lo siguiente:

- $f(0) = 3(0) = 0$
- $f(0.5) = 3(0.5) = 1.5$
- $f(\pi) = 3(\pi) = 3\pi$
- $f(-2) = 3(-2) = -6$
- $f\left(\sqrt{2}\right) = 3\left(\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$
- $f\left(-\frac{2}{5}\right) = 3\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{6}{5}$

La imagen de f es el conjunto $\left\{0, 1.5, 3\pi, -6, 3\sqrt{2}, -\frac{6}{5}\right\}$.

Cuando se presente solo la regla de correspondencia $f(x)$, se entiende que el dominio y su imagen, los cuales se denotarán por $\operatorname{dom}(f)$ y $\operatorname{img}(f)$, son implícitos, es decir, todos aquellos valores con los que la regla de correspondencia f permite trabajar.

Ejemplo: La función $f(x) = 2x$ tiene dominio en todo $\mathbb{R}$, ya que cualquier número puede multiplicarse por 2 y su contradonimio es $\mathbb{R}$, ya que cualquier número es igual 2 por su mitad.

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene dominio $\mathbb{R}/\{0\}$, ya que el único impedimento para dividir es que el denominador sea cero, el contradominio es $\mathbb{R}/\{0\}$, ya que el cero no tiene inverso multiplicativo.

Ejemplo: Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se define la función $f(x) = x^n$ la cual tiene dominio en $\mathbb{R}$, ya que nada me impide calcular la potencia de un número real, el contradominio como se verá en la Unidad 3 depende de n, cuando la n es par el contradominio es $[0, \infty)$ y cuando n es impar el contradominio es $\mathbb{R}$.

Ejemplo: Para cualquier $n \in \mathbb{N}/\{0, 1\}$ y $x \in \mathbb{R}$ se define la función $f(x) = \sqrt[2n]{x}$, el dominio es el conjunto $[0, \infty)$ ya que no existen las raíces pares de números negativos y su contradominio es $[0, \infty)$.

Ejercicio: Hallar el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$.

Solución: Hay que observar que la regla $f(x)$ es un cociente y para que él es bien definido, el denominador tiene que ser distinto, en consecuencia hay que excluir los valores donde el denominador es idénticamente a cero, los cuales en este ejercicio son más fáciles de calcular, en efecto $x^2 - 9 = 0$ es equivalente a $(x-3)(x+3) = 0$, es decir, se tiene que $x = 3$ ó $x = -3$. Por lo tanto, se tiene que $dom(f) = \mathbb{R}/\{-3, 3\}$.

Ejercicio: Hallar el dominio de la función $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.

Solución: Hay que observar que la regla $f(x)$ es una raíz cuadrada y para que ésta esté bien definida el radicando siempre tiene que ser positivo o cero, en consecuencia $x^2-3x+2\geq 0$, la desigualdad anterior es equivalente a $(x-1)(x-2)\geq 0$, como se vio en la sección anterior se resuelve por casos: cuando $x-1\geq 0$ y $x-2\geq 0$, es decir, $x\geq 1$ y $x\geq 2$ así el conjunto buscado es $[2,\infty)$; cuando $x-1\leq 0$ y $x-2\leq 0$, es decir, $x\leq 1$ y $x\leq 2$ así el conjunto buscado es $(-\infty,1]$. Por lo tanto $\mathrm{dom}(f)=(-\infty,1]\cup[2,\infty)$.

Hasta este momento solo se han presentado funciones con una sola regla de correspondencia, ahora toca el turno de presentar una **función definida por secciones:** el dominio de esta función es la unión disjunta de conjuntos y en cada conjunto hay una regla de correspondencia, estas funciones se presentan en la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{si } x\in I_1 \\ f_2(x) & \text{si } x\in I_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & \text{si } x\in I_n \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Donde $I_1,\ldots,I_n,\ldots$ son conjuntos tales que $I_i\cap I_j=\varnothing$ para $i\neq j$.

Ejemplo: Para cada número real x se le puede asignar su valor absoluto $|x|$, esta función puede verse como una función por secciones en la siguiente forma:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Ejemplo: En la función por secciones definida por:

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Se conoce como la **función signo**.

Gráfica de una función

Para comenzar esta sección se comienza con la definición de producto cartesiano de dos conjuntos: Dados dos conjuntos $A, B \neq \varnothing$, el producto cartesiano de A con B es el conjunto $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$. El símbolo se conoce (x, y) como pareja ordena, ya que queda claro que los elementos de A siempre van en la primera entrada de la pareja y los elementos de B en la segunda.

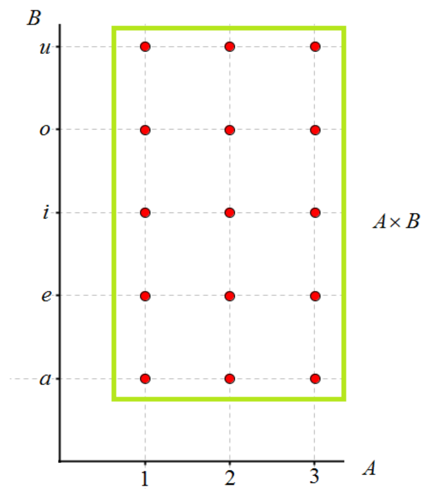
Aquí hay un abuso de notación ya que se está utilizado el símbolo (x, y) en otro contexto distinto al presentado en la sección anterior. En algunos casos el símbolo (x, y) representa un intervalo abierto y en otros casos un elemento de algún producto cartesiano de conjuntos, por lo que se recomienda no ver el símbolo como un objeto aislado, si no, que hay que observar bajo qué condiciones se está introduciendo tal notación.

Ejemplo: Dado $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$ el producto cartesiano de A con B es el conjunto:

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (1,a) & (1,e) & (1,i) & (1,o) & (1,u) \\ (2,a) & (1,e) & (2,i) & (2,o) & (2,u) \\ (3,a) & (1,e) & (3,i) & (3,o) & (3,u) \end{Bmatrix}$$

El producto cartesiano se representa gráficamente como un rectángulo, donde el primer conjunto se ubica horizontalmente y el segundo conjunto de forma vertical.

Ejemplo: Dado $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$ el producto cartesiano $A \times B$ se representan por la siguiente figura:



Para una función $f: A \to B$, su **gráfica** se define como el conjunto:

$$\text{gra}(f): \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

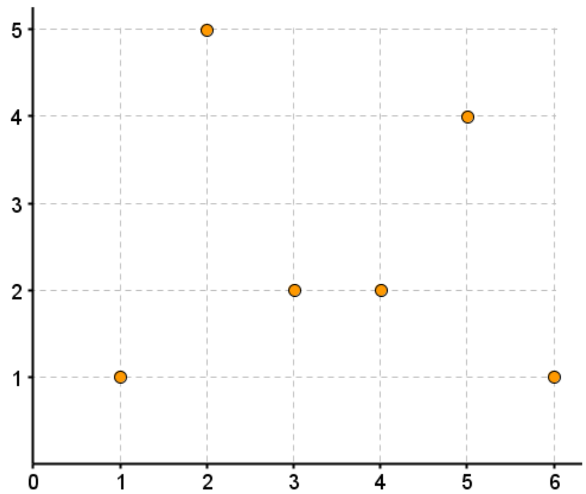
Se tiene que $\text{gra}(f) \subset A \times B$, sin embargo, no todo subconjunto de $A \times B$ es la gráfica de una función. Para que un subconjunto D de $A \times B$ sea la gráfica de una función, primero todos los elementos de A tienen que estar como primeras entradas de los elementos de D y segundo cuando $(x, y), (x, z) \in D$, definición de función implica que $y = z$. Esto permite definir una función como un conjunto de parejas que satisfacen la condición anterior, al representarse de manera gráfica, una recta vertical no debe de contener más de un elemento de la gráfica de una función.

Ejemplo: Sea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $B = \{1,2,3,4,5\}$. Considere los siguientes conjuntos:

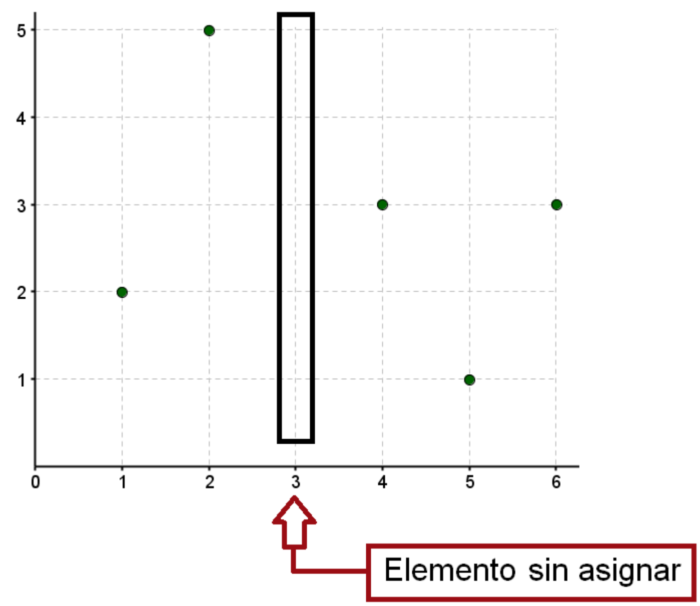
$$D_1 = \{(1,1),(2,5),(3,2),(4,2),(5,4),(6,1)\}$$
$$D_2 = \{(1,2),(2,5),(4,3),(5,1),(6,2)\}$$
$$D_3 = \{(1,1),(2,5),(3,2),(3,3),(4,2),(5,4),(4,5),(6,1)\}$$

De los cuales se tiene lo siguiente:

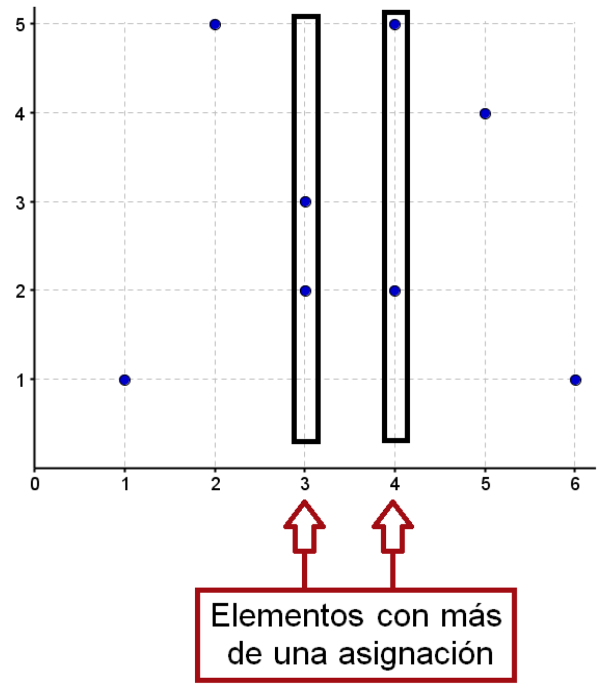
- El conjunto D_1 es la gráfica de una función, ya que todos los valores de A forman parte de las primeras componentes de D_1 y no hay dos parejas que tengan la misma primeras entradas. De manera gráfica se ve que no hay línea vertical que contengan dos puntos.



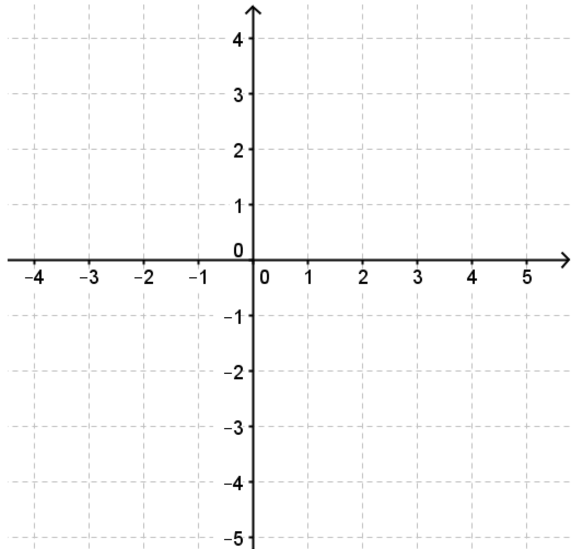
- El conjunto D_2 no es la gráfica de una función, ya que el elemento $3 \in A$ forman no es la primera componente de los elementos de D_2. De manera gráfica se ve que la línea vertical que pasa por 3 no contiene puntos.



- El conjunto D_3 no es la gráfica de una función, ya que hay parejas que tienen una misma primera entrada pero las segundas son distintas. De manera gráfica se ve que la líneas verticales que pasan por 3 y 4 respectivamente tienen dos puntos cada una. Elementos con más de una asignación



Ahora toca el turno de presentar la gráfica de funciones con dominio y contradominio en el conjunto de los números reales. Por definición, la gráfica de esta función es un subconjunto del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La representación gráfica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son dos rectas perpendiculares, la recta horizontal tiene sentido de izquierda a derecha y la recta vertical de abajo hacia arriba, como lo muestra la siguiente figura:

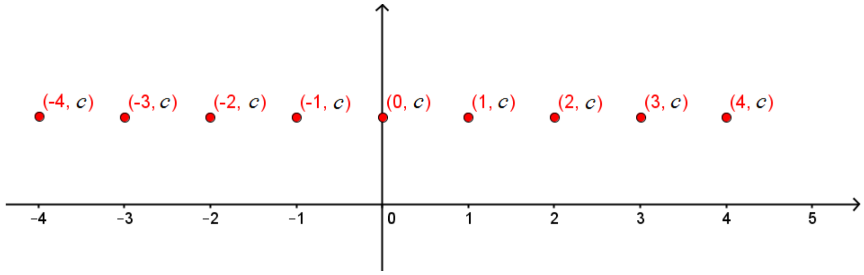


Como el dominio de la función es un subconjunto de los números reales, es casi imposible localizar todos los puntos que corresponde la gráfica de una función. Una manera de resolver esto es dar un subconjunto representativo del dominio, los cuales son evaluados bajo a regla de correspondencia para formar las parejas que forman parte de la gráfica y esto presenta un comportamiento de la función, cabe mencionar que esto puede ser engañoso. En la Unidad 3 se presenta una técnica para graficar algunas funciones a partir de las propiedades de las mismas.

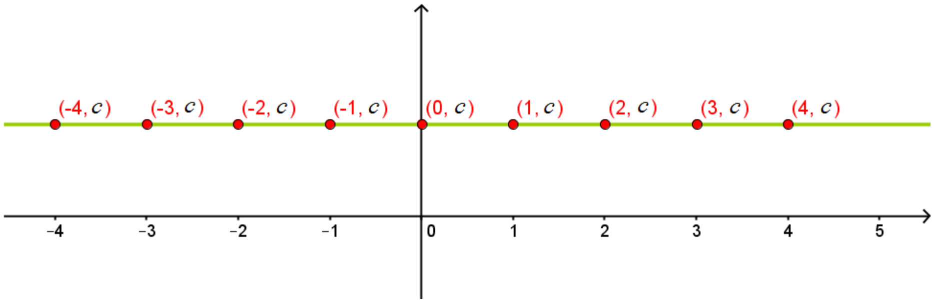
Ejemplo: Para $c \in \mathbb{R}$ se define la función $f(x)=c$ para cada, esta función toma el nombre de **función constante**, tomando $D=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ se tiene la siguiente tabulación:

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-4	c	$(-4,c)$
-3	c	$(-3,c)$
-2	c	$(-2,c)$
-1	c	$(-1,c)$
0	c	$(0,c)$
1	c	$(1,c)$
2	c	$(2,c)$
3	c	$(3,c)$
4	c	$(4,c)$

Localizando los puntos $(x, f(x))$ se tiene la siguiente figura:



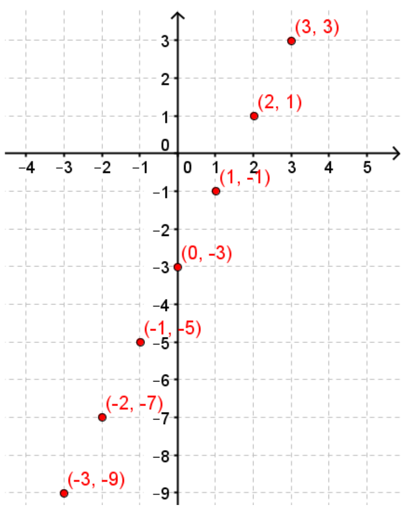
Por la ubicación de los puntos, lo natural es pensar que la gráfica de la función es la siguiente:



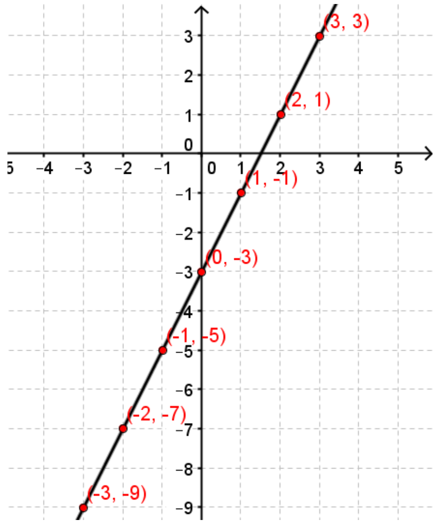
Ejemplo: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=2x-3$, tomando el conjunto $D=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ se tiene la siguiente tabla.

x	$f(x)=2x-3$	$(x, f(x))$
-3	$2(-3)-3=(-6)-3=-9$	$(-3,-9)$
-2	$2(-2)-3=(-4)-3=-7$	$(-2,-7)$
-1	$2(-1)-3=(-2)-3=-5$	$(-1,-5)$
0	$2(0)-3=(0)-3=-3$	$(0,-3)$
1	$2(1)-3=(2)-3=-1$	$(1,-1)$
2	$2(2)-3=(4)-3=1$	$(2,1)$
3	$2(3)-3=(6)-3=3$	$(3,3)$

Localizando los puntos $(x, f(x))$ se tiene la siguiente figura:



Por la ubicación de los puntos, lo natural es pensar que la gráfica de la función es la siguiente:



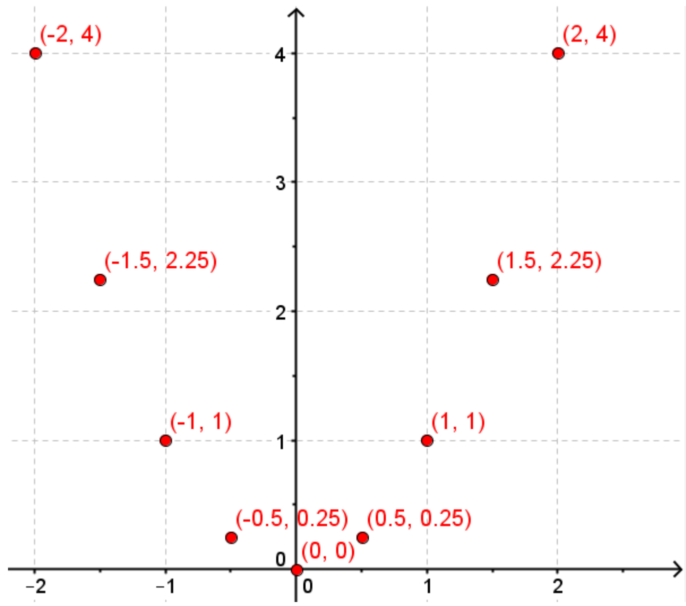
Ejemplo: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$ tomando el conjunto:

$$D=\{-2,-1.5,-1,-0.5,0,0.5,1,1.5,2\}$$

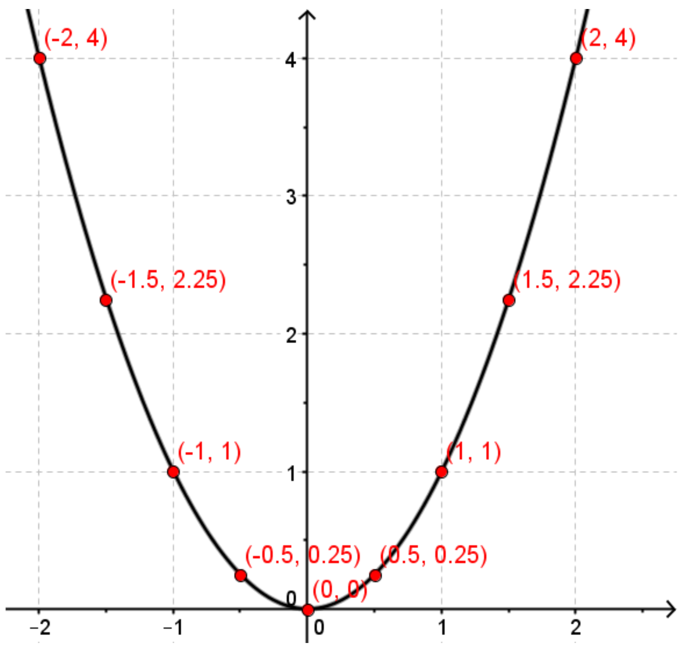
Se tiene la siguiente tabla:

x	$f(x)=x^2$	$(x,f(x))$
-2	$(-2)^2=4$	$(-2,4)$
-1.5	$(-1.5)^2=2.25$	$(-1.5,2.25)$
-1	$(-1)^2=1$	$(-1,1)$
-0.5	$(-0.5)^2=0.25$	$(-0.5,0.25)$
0	$(0)^2=0$	$(0,0)$
0.5	$(0.5)^2=0.25$	$(0.5,0.25)$
1	$(1)^2=1$	$(1,1)$
1.5	$(1.5)^2=2.25$	$(1.5,2.25)$
2	$(2)^2=4$	$(2,4)$

Localizando los puntos $(x,f(x))$ se tiene la siguiente figura:



Por la ubicación de los puntos, lo natural es pensar que la gráfica de la función es la siguiente:



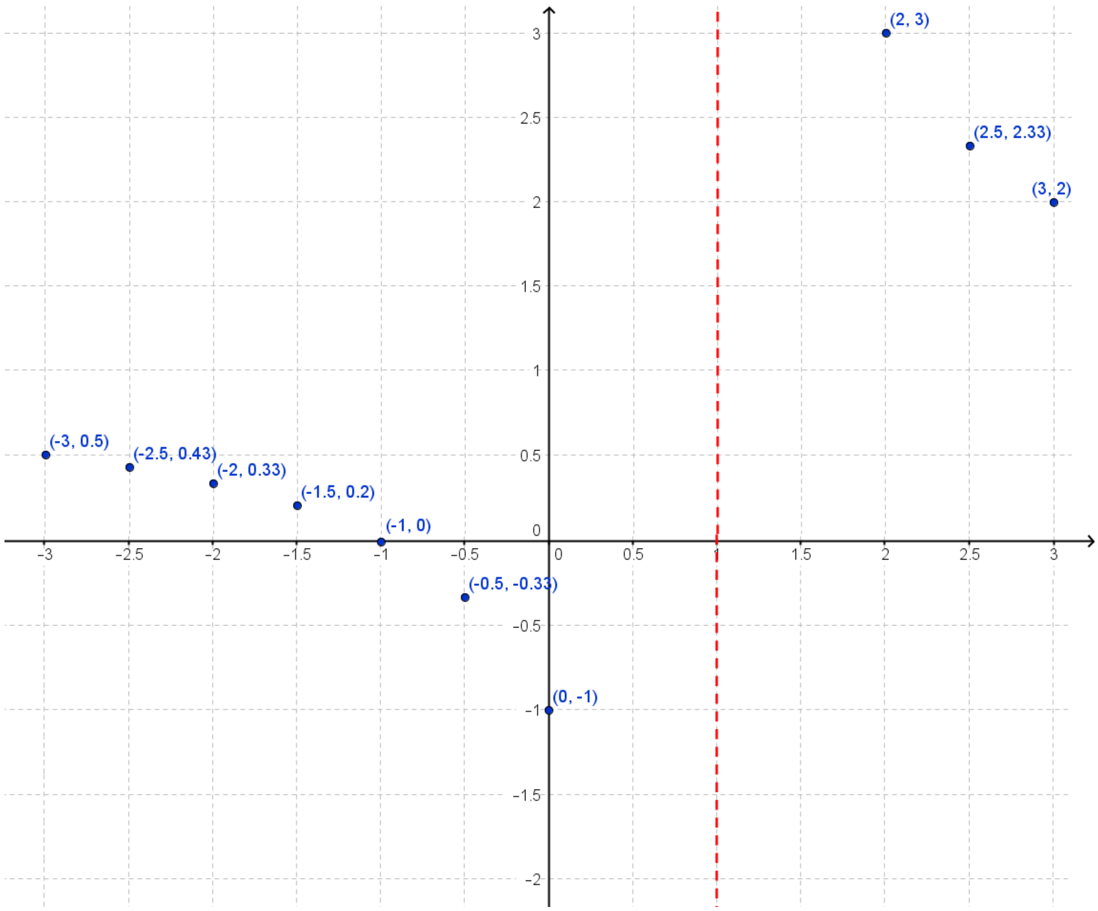
Ahora se presenta la gráfica de una función por secciones, aquí se sugiere que el conjunto representativo este formado por elementos representativos de cada conjunto que divide el dominio de la función.

Ejemplo: La función $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}/\{1\}$. Tomando el conjunto

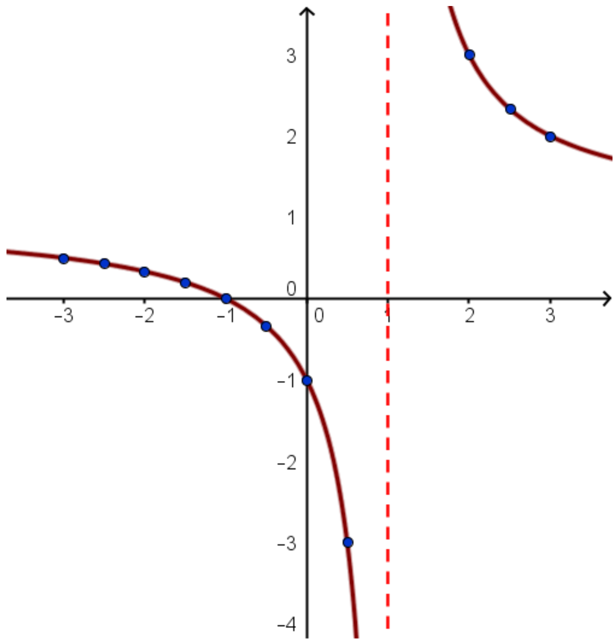
$D=\{-3,-2.5,-2,-1.5,-1,-0.5,0,0.5,1.5,2,2.5,3\}$ Se tiene la siguiente tabulación:

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-3	0.5	$(-3,0.5)$
-2.5	0.43	$(-2.5,0.43)$
-2	0.33	$(-2,0.33)$
-1.5	0.2	$(-1.5,0.2)$
-1	0	$(-1,0)$
0.5	-0.33	$(0.5,-0.33)$
0	-1	$(0,-1)$
0.5	-3	$(0.5,-0.3)$
1.5	5	$(1.5,5)$
2	3	$(2,3)$
2.5	2.33	$(2.5,2.33)$
3	2	$(3,2)$

Localizando los puntos $(x, f(x))$ se tiene la siguiente figura:



Por la ubicación de los puntos, lo natural es pensar que la gráfica de la función es la siguiente:



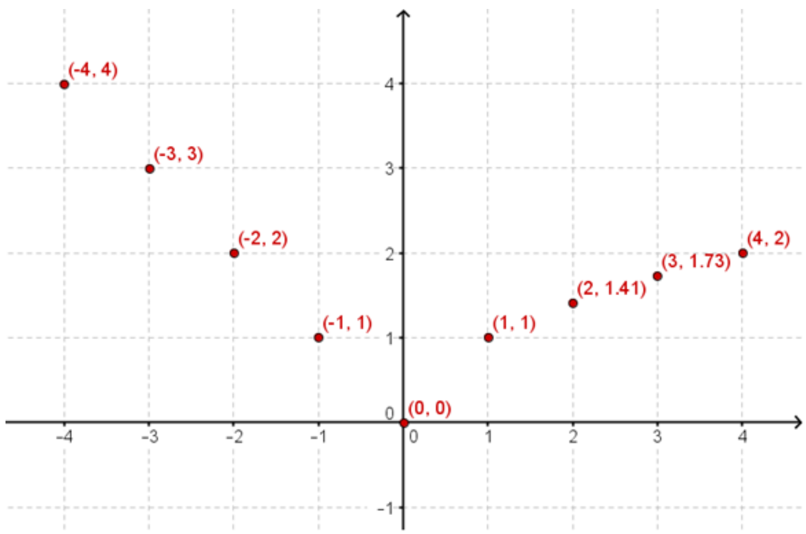
Ejemplo: La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

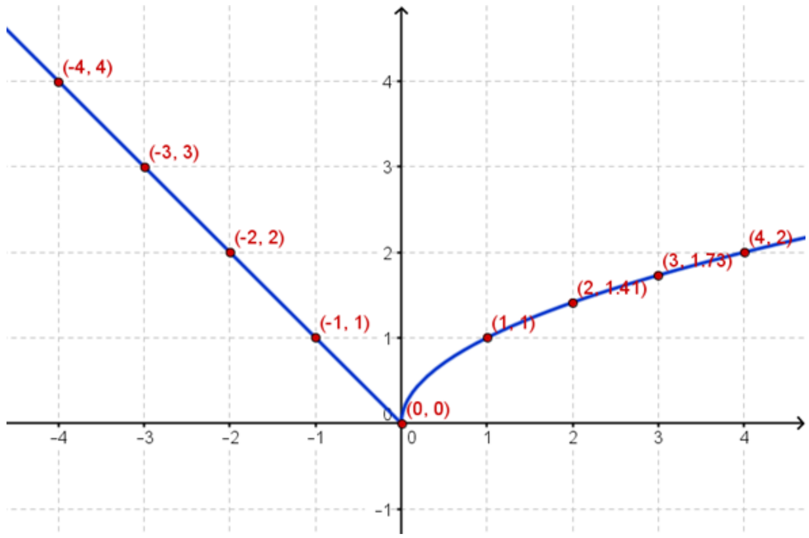
Tomando los conjuntos $D=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$. De donde se obtiene la siguiente tabla:

x	$f(x)$	(x,y)
-4	4	$(-4,4)$
-3	3	$(-3,3)$
-2	4	$(-4,4)$
-1	1	$(-1,1)$
0	0	$(0,0)$
1	1	$(1,1)$
2	$\sqrt{2}$	$(2,\sqrt{2})$
3	$\sqrt{3}$	$(3,\sqrt{3})$
4	2	$(4,2)$

Localizando los puntos $(x,f(x))$ se tiene la siguiente figura:



Por la ubicación de los puntos, lo natural es pensar que la gráfica de la función es la siguiente:

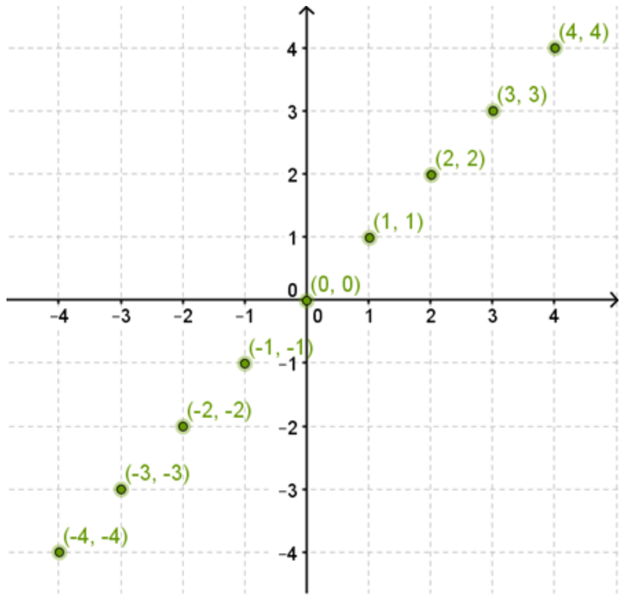


Finalmente, se presenta el ejemplo de una función donde la ubicación de un conjunto de punto proporciona una idea engañosa de la gráfica de la función:

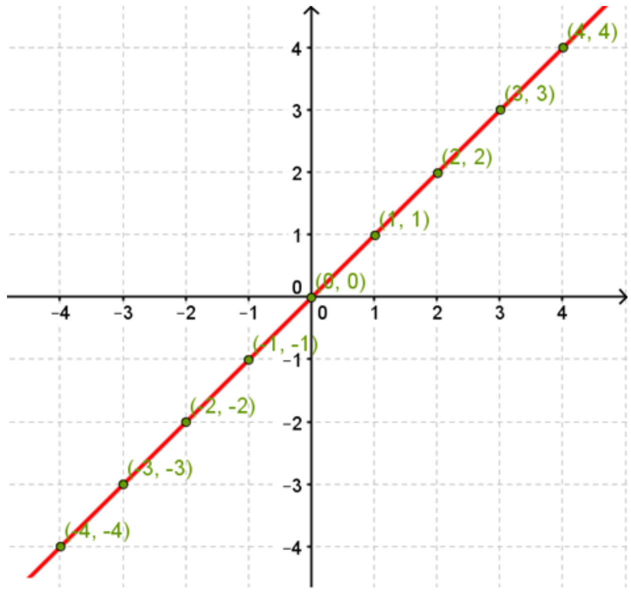
Ejemplo: Dada la función $f(x)=x-\operatorname{sen}(\pi x)$ y el conjunto $D=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ se tiene la siguiente tabulación:

x	$f(x)$	$(x,f(x))$
-4	$-4-\operatorname{sen}(-4\pi)=-4$	$(-4,-4)$
-3	$-3-\operatorname{sen}(-3\pi)=-3$	$(-3,-3)$
-2	$-2-\operatorname{sen}(-2\pi)=-2$	$(-2,-2)$
-1	$-1-\operatorname{sen}(-\pi)=-1$	$(-1,-1)$
0	$0-\operatorname{sen}(0)=0$	$(0,0)$
1	$1-\operatorname{sen}(\pi)=1$	$(1,1)$
2	$2-\operatorname{sen}(2\pi)=2$	$(2,2)$
3	$3-\operatorname{sen}(3\pi)=3$	$(3,3)$
4	$4-\operatorname{sen}(4\pi)=4$	$(4,4)$

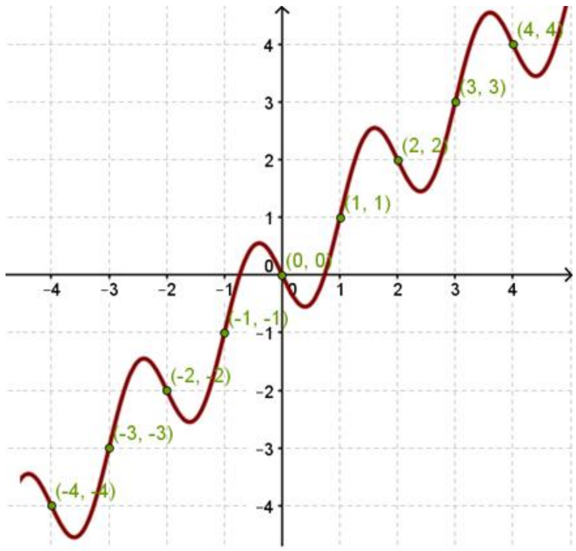
Localizando los puntos $(x,f(x))$ se tiene la siguiente figura:



Por la ubicación de los puntos se puede cometer la equivocación de pensar que la gráfica de la función $f(x) = x - \text{sen}(\pi x)$ es la siguiente:



Sin embargo, la gráfica de la función es la siguiente:



Como se mencionó anteriormente, en la Unidad 3 se presenta un método para construir la gráfica anterior.

Operaciones entre funciones

Hasta este momento solo se ha presentado la definición de función y su representación gráfica, ahora toca el turno de definir operaciones entre funciones. La estructura algebraica de los números reales permite definir las primeras cuatro operaciones aritméticas sobre funciones del siguiente modo.

Definición: Dadas dos funciones $f, g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tienen los siguientes conceptos:

(i). La **suma** $f + g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ se define por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

(ii). La **diferencia** $f - g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ se define por $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.

(iii). El **producto** $f \cdot g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ se define por $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

(iv). El **cociente** $\frac{f}{g}: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ se define por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, cuando $g(x) \neq 0$.

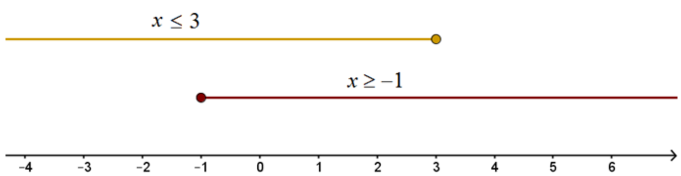
Hay que observar que la definición requiere que **las funciones** f **y** g **tengan el mismo dominio**, en la práctica esto no siempre se cumple, en tal caso **la definición anterior se aplica a la intersección de los dominios de las funciones**, cuando la intersección de los dominio es vacío las operaciones de funciones no están definidas.

Ejemplo: Sean $f(x) = 3x$ y $g(x) = 2x^2$, en consecuencia ambas funciones tienen el mismo dominio que es $\mathbb{R}$. Aplicando la definición anterior se tiene que:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 2x^2$.
- ..
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x)(2x^2) = 6x^3$.
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x}{2x^2} = \dfrac{3}{2x}$, además $x \neq 0$.

Ejemplo: Las funciones $f(x) = \sqrt{3-x}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$ no tienen los mismo dominios, en efecto, la función $f(x) = \sqrt{3-x}$ está definida cuando $3 - x \geq 0$, es decir $3 \geq x$; para la función $g(x) = \sqrt{x+1}$ este definida se requiere que $x + 1 \geq 0$, es decir $x \geq -1$.

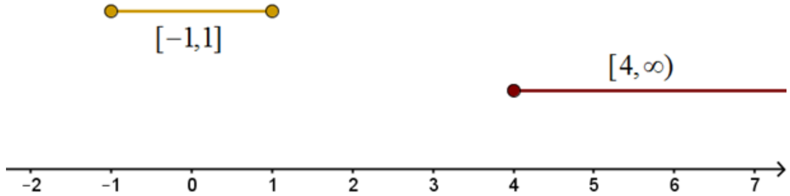
Gráficamente se tiene:



El conjunto donde simultáneamente están definidas las funciones $f(x)$ y $g(x)$ es el intervalo cerrado $[-1,3]$. En este conjunto se tiene que:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+1}$.
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}$.
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{3 + 2x - x^2}$.
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$, cuando $x \neq -1$.

Ejemplo: Los dominios de las funciones $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x-4}$ no se intersectan, ya que $f(x)$ solo está definida cuando $1 - x^2 \geq 0$, es decir, en el conjunto $[-1,1]$ y la función $g(x)$ solo está definida en el conjunto $[4,\infty)$. Gráficamente se tiene lo siguiente:

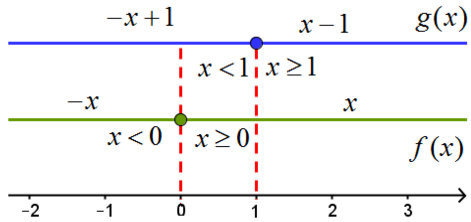


Por consiguiente, las funciones $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ no están definidas.

Ejemplo: El dominio de las funciones por secciones $f(x)=|x|$ y $g(x)=|x-1|$ es $\mathbb{R}$. Para poder realizar las operaciones aritméticas de estas funciones hay que identificar los conjuntos donde las reglas de correspondencia cambian. Se tiene que:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\geq 1 \\ -x+1 & \text{si } x<1 \end{cases}$$

La siguiente gráfica es muy útil para observar cómo se secciona el dominio para operar las funciones anteriores:



En consecuencia, se tiene lo siguiente:

- $$(f+g)(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 2x-1 & \text{si } 1\leq x \end{cases}.$$
- $$(f-g)(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 2x-1 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } 1\leq x \end{cases}$$
- $$(f\cdot g)(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{si } x<0 \\ -x^2+x & \text{si } 0\leq x<1 \\ x^2-x & \text{si } 1\leq x \end{cases}$$

- $$(f \div g)(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{-x+1} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x}{-x+1} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

A partir de la función identidad $\mathrm{Id}(x) = x$ y multiplicando sucesivamente n-veces por si misma dicha función se tiene:

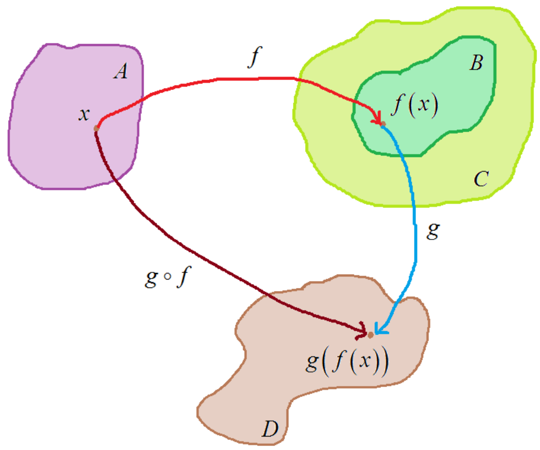
$$f(x) = \Big(\underbrace{\mathrm{Id}\times \cdots \times \mathrm{Id}}_{n-\text{veces}}\Big)(x) = \underbrace{(\mathrm{Id}(x))\times \cdots \times (\mathrm{Id}(x))}_{n-\text{veces}} = \underbrace{x\times \cdots \times x}_{n-\text{veces}} = x^n$$

Tomando $a \in \mathbb{R}/\{0\}$ y la función $f(x) = x^n$ se tiene la **función monomial** $f(x) = ax^n$. Tomando una suma de funciones monomiales se construye una función **polinomial**, es decir, dados $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, donde $a_n \neq 0$, la función tiene la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n .$$

El número n toma el nombre de grado del polinomio $p(x)$. A partir de dos funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ se construye una **función racional** tomando $h(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, definida cuando $q(x) \neq 0$.

Otra operación entre funciones es la composición, la cual se define de la siguiente manera: Dadas dos funciones $f: A \to B$ y $g: C \to D$ con $B \subset C$, **la composición** f **seguida de** g es la función $g \circ f$ que tiene dominio A y contradominio D y su regla de correspondencia es $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. De manera gráfica, la composición de funciones se ve de la siguiente manera:



Al igual que en el caso de las operaciones aritméticas, la condición $B \subset C$ no siempre se puede garantizar, en tal caso se trabaja con la parte del dominio de f cuya imagen este contenido en C. Además, la operación $\circ$ no es conmutativa, es decir, **la relación** $f \circ g = g \circ f$ **no necesariamente se cumple**.

En cuestiones operativas, la relación $g\left(f(x)\right)$ significa que la correspondencia que determina a $g(x)$ se obtiene tomando la asignación $x \mapsto f(x)$, es decir, el valor x se sustituye por $f(x)$. Por ejemplo, si $g(x) = x^2$ la expresión $g(3x+1)$ significa que $x \mapsto 3x+1$ de donde se obtiene que $g(3x+1) = (3x+1)^2 = 9x^2 + 3x + 1$.

Ejemplo: Para las funciones $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = 3x^2$ se tienen las siguientes composiciones:

- $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(3x^2\right) = 2\left(3x^2\right) + 1 = 6x^2 + 1$.
- $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(2x+1) = 3(2x+1)^2 = 3\left(4x^2 + 4x + 1\right) = 12x^2 + 12x + 3$.

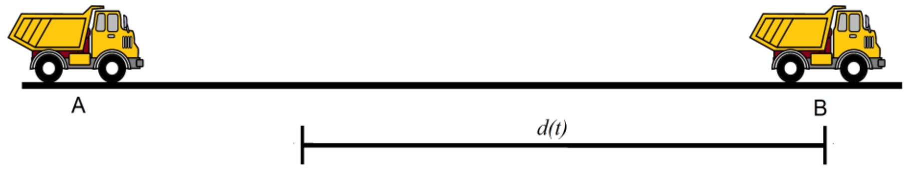
Límites

El límite de una función es uno de los conceptos más importantes que hay en el cálculo, a través de este de definen otros conceptos importantes, como lo son la continuidad, la derivada, la integral, entre otros.

Concepto de límite de una función

Casi en todos los lenguajes, la palabra límite tiene virtualmente el mismo contexto que la palabra frontera. Sin embargo, en cálculo tiene un sentido diferente. El límite de una función, en un cierto punto, es el comportamiento que tiene dicha función cerca de este punto.

Ejemplo: Considera un vehículo que viaja del punto A al punto B, dicho recorrido lo realiza en una hora exacta. Partiendo de lo anterior, se tiene la función que a cada instante de tiempo t en minutos se le asigna la distancia $d(t)$ que es distancia que le falta para concluir su recorrido, como lo muestra la siguiente figura:



Como el recorrido se lleva a cabo en una hora exacta, a medida que el tiempo t se va acercando a 60 min, la distancias $d(t)$ está cada vez es más cercana a 0. Hay que observar que para concluir que $d(t)$ se acerca a cero, no depende de la distancia que se tenga cuando hayan transcurrido 60 min.

Intuitivamente, el concepto de límite es el siguiente: **la función f tiende a L cerca de x_0 si se puede hacer que $f(x)$ este tan cerca como se quiera de L tomando a x suficientemente cercano a x_0.**

Ejemplo: Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ y el valor $x_0=-1$, tomando valores cercanos menores y mayores a $x_0=-1$ se tiene lo siguiente:

$x<-1$	$f(x)$	$x>-1$	$f(x)$
-1.5	$\frac{(-1.5)^2-1}{(-1.5)-1}=-2.5$	-0.5	$\frac{(-0.5)^2-1}{(-0.5)-1}=-1.5$
-1.4	$\frac{(-1.4)^2-1}{(-1.4)-1}=-2.4$	-0.6	$\frac{(-0.6)^2-1}{(-0.6)-1}=-1.6$
-1.3	$\frac{(-1.3)^2-1}{(-1.3)-1}=-2.3$	-0.7	$\frac{(-0.7)^2-1}{(-0.7)-1}=-1.7$
-1.2	$\frac{(-1.2)^2-1}{(-1.2)-1}=-2.2$	-0.8	$\frac{(-0.8)^2-1}{(-0.8)-1}=-1.8$
-1.1	$\frac{(-1.1)^2-1}{(-1.1)-1}=-2.1$	-0.9	$\frac{(-0.9)^2-1}{(-0.9)-1}=-1.9$

Tabla 1

En apariencia la función se aproxima a 2 cuando x se aproxima a -1. El valor menor más cercano a $x_0=-1$ es -1.1 y el valor mayor más cercano a $x_0=-1$, una pregunta natural que puedes plantearte: ¿es suficiente este acercamiento? o ¿tengo que tomar un valor más cercano? Para intentar resolver estas preguntas, considera el siguiente acercamiento por valores menores y mayores a $x_0=-1$:

$x<-1$	$f(x)$	$x>-1$	$f(x)$
-1.1	-2.1	-0.9	-1.9
-1.08	-2.08	-0.92	-1.92
-1.06	-2.06	-0.94	-1.92
-1.04	-2.04	-0.96	-1.96
-1.02	-2.02	-0.98	-1.98

Tabla 2

De nuevo, aparentemente, se tiene que $f(x)$ se aproxima a 2 cuando x se aproxima a -1. De nuevo es natural preguntarse: ¿ya me acerqué demasiado?, para responder esta pregunta se presenta el siguiente acercamiento:

$x<-1$	$f(x)$	$x>-1$	$f(x)$
-1.01	-2.01	-0.99	-1.99
-1.001	-2.001	-0.999	-1.999
-1.0001	-2.0001	-0.9999	-1.9999
-1.00001	-2.00001	-0.99999	-1.99999
-1.00001	-2.000001	-0.999999	-1.999999

Tabla 3

La tabla anterior presenta de manera más clara que $f(x)$ se aproxima a 2 cuando x se aproxima a -1.

$\sqcup$

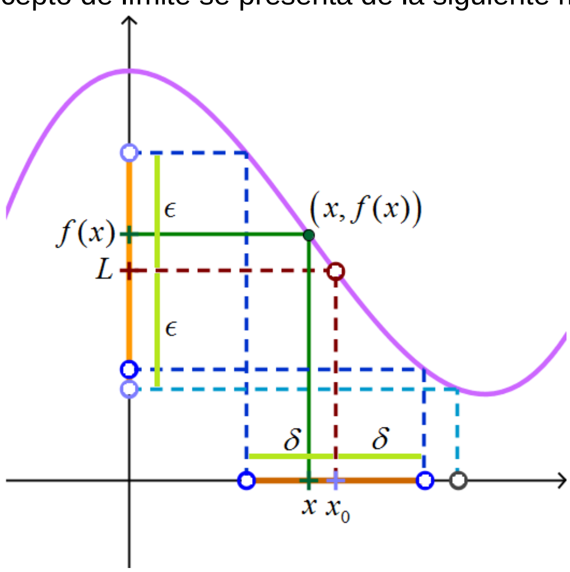
Hay que observar que el proceso anterior depende de la palabra cercanía, matemáticamente se dice que x **es cercano a** y si la diferencia entre ellos es un número "pequeño", es decir, existe $r>0$, con r pequeño, tal que $|x-y|<r$. En consecuencia el hecho de que $f(x)$ **este tan cerca** L significa que existe $\epsilon>0$, con ϵ pequeño, tal que $|f(x)-L|<\epsilon$ y de manera similar que x **esté suficientemente cercano a** x_0 significa que $x \neq x_0$ y que existe $\delta>0$, con δ pequeño, tal que $0<|x-x_0|<\delta$. Finalmente el enunciado $f(x)$ **este tan cerca como se quiera de** L se traduce para cualquier $\epsilon>0$, se tiene que $|f(x)-L|<\epsilon$. Agrupando las observaciones anteriores se tiene la definición formal de límite:

Definición 2.1.1.1. Se dice que la función $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a x_0 si y sólo si para todo $\epsilon>0$ existe $\delta>0$, que depende de ϵ, tales que:

$$|f(x)-L|<\epsilon \quad \text{si} \quad 0<|x-x_0|<\delta$$

En tal caso, se denota por $\lim_{x \to x_0} f(x)=L$ ó $f(x) \to L$ cuándo $x \to x_0$.

De forma gráfica el concepto de límite se presenta de la siguiente manera:

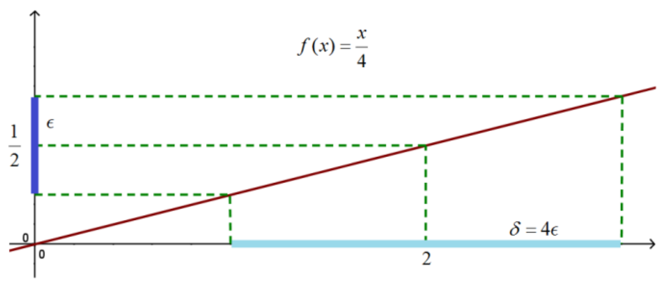


Representación Gráfica del límite 1

Ejemplo: Se tiene que $\lim_{x\to 2}\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$. En efecto, primero hay que identificar los elementos, en este caso la función es $f(x)=\frac{x}{4}$, el límite es $L=\frac{1}{2}$ y el valor en cuestión es $x_0=2$. Para $\epsilon>0$, hay que encontrar un valor $\delta>0$ que cumplan con la definición de límite. Se tiene lo siguiente:

$$|f(x)-L|=\left|\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-2}{4}\right|=\left|\frac{1}{4}\right|\cdot|x-2|=\frac{1}{4}|x-2|$$

Por consiguiente, la condición $|f(x)-L|<\epsilon$ se traduce en $\frac{1}{4}|x-2|<\epsilon$ por consiguiente, $|x-2|<4\epsilon$, luego basta tomar $\delta=4\epsilon$ para que se cumpla la condición de límite.
Gráficamente se tiene lo siguiente:



Representación Gráfica del límite 2

Advertencia: la definición de límite solo permite demostrar que el límite de la función en un punto determinado es correcto, mas no proporciona un método para calcularlo dicho valor, además encontrar el valor de δ a partir del ϵ dado, no siempre es fácil, como se muestra a continuación.

Ejemplo: Se tiene que $\lim_{x\to a}x^2=a^2$, en efecto, observa que la función es $f(x)=x^2$, el límite en supuesto límite es $L=x_0^2$ y el punto es cuestión es $x_0=a$. Se tiene que:

$$\epsilon>|f(x)-L|=\left|x^2-a^2\right|=\left|(x-a)(x+a)\right|=|x-a|\cdot|x+a|.$$

Por otra parte, observando si la distancia entre x y a es menor que 1 se tiene que $1>|x-a|\geq|x|-|a|$, es decir, $|x|<1+|a|$ esto que implica que:

$$|x+a| \leq |x|+|a| < (1+|a|)+|a| = 1+2|a| .$$

Finalmente, se define $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1+2|a|}\right\}$ y se tiene lo siguiente:

$$\left|x^2 - a^2\right| = |x-a| \cdot |x+a| < \left(\frac{\epsilon}{1+2|a|}\right)(1+2|a|) = \epsilon .$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$.

Para observar que una función no tiene límite en un determinado valor, hay que analizar porque no se cumple la definición de límite, es decir, hay que **negar** la condición:

> Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque, para todo x si $0 < |x - x_0| < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Dicha expresión es la siguiente:

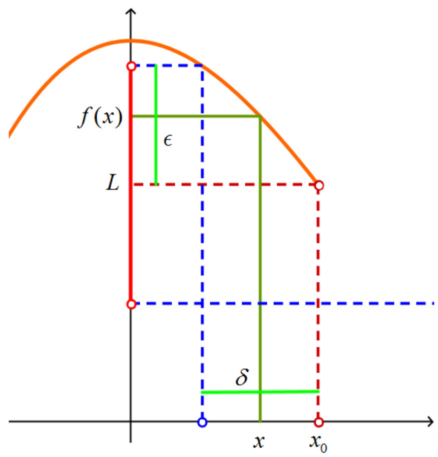
> Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x para el cual es $0 < |x - x_0| < \delta$ eso implica que $|f(x) - L| \geq \epsilon$.

La anterior definición no es fácil de emplear, en la siguiente sección se presenta la propiedad de unicidad y a partir de ella, se presenta una técnica más sencilla para mostrar que un límite no existe.

En el ejemplo de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ se hacen aproximaciones al valor $x_0 = -1$ por valores menos y mayores respectivamente, este tipo de acercamientos toman el nombre de **límites unilaterales** los cuales se clasifican en **límites por la izquierda** y **límites por la derecha** dependiendo si el acercamiento es por valores menores o valores mayores respectivamente.

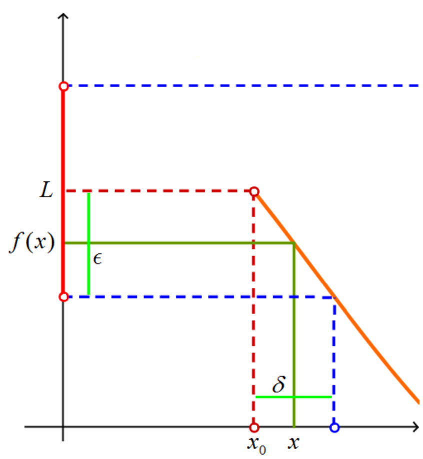
Los limites unilaterales de una función de definen de la siguiente forma:

(i). Se dice que $f(x)$ **tiende a** L **cuando** x **tiende a** x_0 **por la izquierda** si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sí $0 < x_0 - x < \delta$. En tal caso se denota por $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^-$ ó $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$. Gráficamente se tiene lo siguiente:



Límites unilaterales 1

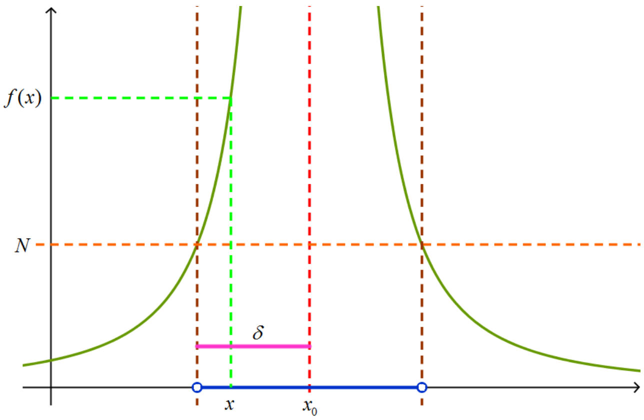
(ii). Se dice que $f(x)$ **tiende a** L **cuando** x **tiende a** x_0 **por la derecha** si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sí $0 < x - x_0 < \delta$. En tal caso se denota por $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^+$ ó $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$. Gráficamente se tiene lo siguiente:



Límites unilaterales 2

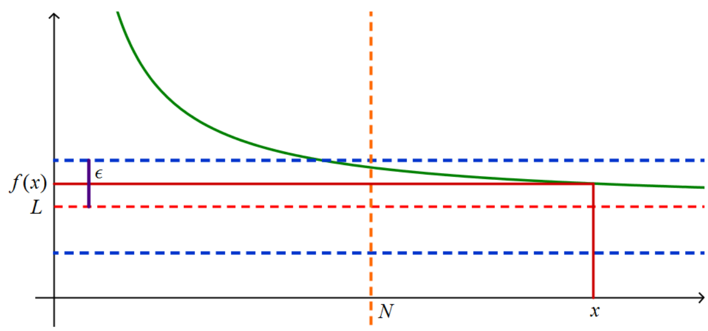
Para finalizar esta parte se presenta como interactúan los conceptos de límite e infinito, presentando el significado de límite infinito y límite al infinito. En el primer caso se entiende que la función crece sin acotamiento y en el segundo caso la variable crece sin acotamiento.

Se dice que $f(x)$ **tiende a** ∞ **cuando** x **tiende a** x_0 si y sólo si para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq N$ sí $0 < |x - x_0| < \delta$. En tal caso se denota por $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ó $f(x) \to \infty$ cuando $x \to x_0$. Gráficamente se tiene lo siguiente:



Límites unilaterales 3

Por último se dice que $f(x)$ **tiende a** L **cuando** x **tiende a** ∞ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, si $x \geq N$. En tal caso se denota por $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ó $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$. Gráficamente se tiene lo siguiente:



Límites unilaterales 4

Ejemplo: Se tiene que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, en efecto, sea $\epsilon > 0$ tal que $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon$, entonces $x > \frac{1}{\epsilon}$, basta tomar el valor N cualquier natural mayor o igual a $\frac{1}{\epsilon}$.

Ejemplo: Se tiene que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, en efecto, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x} \geq N$, entonces $\frac{1}{N} \geq x$, así basta tomar $\delta = \frac{1}{N+1}$.

Propiedades de los límites

En la sección anterior se presentó la definición formal de límite de una función en términos de $\epsilon-\delta$, en ningún momento de presenta una técnica o un método para proponer el valor del límite de la función, en esta sección se presentan las propiedades fundamentales de los límites las cuales son muy útiles en el cálculo de los mismos.

Una pregunta natural sobre los límites es: ¿cuántos límites tiene una función en un determinado valor?, la respuesta a esta cuestión es importante, ya que presenta el número de objetos que hay que encontrar, dicho resultado es el siguiente:

Teorema 2.1.2: Si el límite de una función existe, entonces es único.

Demostración: Se procede por contradicción. Supóngase que $f(x)\to L$ y que $f(x)\to M$, con $L\neq M$, cuando $x\to x_0$. Aplicando la definición de límite, para $\epsilon=\frac{|L-M|}{2}>0$ existen $\delta_1,\delta_2>0$ tales que:

$$|f(x)-L|<\frac{|L-M|}{2}\text{ , si } 0<|x-x_0|<\delta_1 \quad \text{y} \quad |f(x)-M|<\frac{|L-M|}{2}\text{ , si } 0<|x-x_0|<\delta_2$$

Luego, hay que garantizar que las dos condiciones se cumplan simultáneamente, para ello hay que tomar el más pequeño entre δ_1 y δ_2, es decir, si $0<|x-x_0|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}|L-M|&=|L-M+(f(x)-f(x))|=|(L-f(x))-(M-f(x))|\\&\leq|f(x)-L|+|f(x)-M|<\frac{|L-M|}{2}+\frac{|L-M|}{2}\\&=|L-M|\end{aligned}$$

Hay que observar tales elementos x existen ya $\delta_1,\delta_2>0$ y esto implica que $\delta>0$. En consecuencia $|L-M|<|L-M|$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $L=M$.

$\square$

Cabe mencionar que el teorema anterior parte de una hipótesis muy fuerte que es: **Si el límite de una función existe**, situación que hasta el momento se puede garantizar. Por tal motivo, se presenta los límites de funciones que son muy útiles en el cálculo de los límites. El siguiente resultado relaciona el concepto de límite con el concepto de límites unilaterales.

Teorema 2.1.3. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 existe si y sólo si los límites unilaterales de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 existen y son iguales.

Demostración: Supóngase que $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0$, esto implica que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, si $0 < |x - x_0| < \delta$. La expresión $0 < |x - x_0| < \delta$ es equivalente a $-\delta < x - x_0 < \delta$. Tomando la primera y la segunda desigualdad respectivamente se tiene que:

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ si } 0 < x - x_0 < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - L| < \epsilon \text{ si } 0 < x_0 - x < \delta$$

Por lo tanto, $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^-$ y $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^+$. Por otra parte supóngase que $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^-$ y $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^+$, para $\epsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que :

$$|f(x) - L| < \epsilon, \text{ si } 0 < x - x_0 < \delta_1 \quad \text{y} \quad |f(x) - L| < \epsilon, \text{ si } 0 < x_0 - x < \delta_2$$

Tomando el valor más pequeño entre δ_1 y δ_2 se garantiza que se cumplen ambas condiciones, es decir,

$$|f(x) - L| < \epsilon, \text{ si } 0 < x - x_0 < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - L| < \epsilon, \text{ si } 0 < x_0 - x < \delta$$

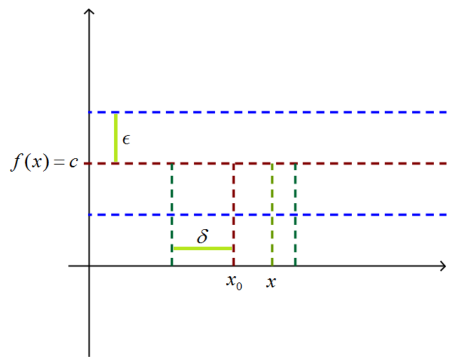
Donde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, además $0 < x - x_0 < \delta$ y $0 < x_0 - x < \delta$ implican que $-\delta < x - x_0 < \delta$ o equivalentemente $0 < |x - x_0| < \delta$. En consecuencia $|f(x) - L| < \epsilon$, si $0 < |x - x_0| < \delta$, por lo tanto $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0$.

$\sqcup$

Ahora se presentan los valores que toma el límite de una función constante y la función identidad.

Lema 2.1.4. Dado $c \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x \to x_0} c = c$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, el límite de una función constante es la misma constante.

Demostración: Dado que $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que $0 = |f(x) - c| < \epsilon$, así que basta tomar cualquier valor $\delta > 0$. De manera gráfica se tiene lo siguiente:



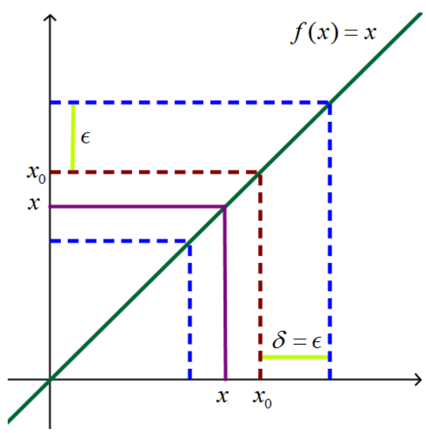
Límite de una función constante 1

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

$\square$

Lema 2.1.5. Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Demostración: Se tiene que $f(x)=x$ y $L=x_0$. Sea $\epsilon>0$ tal que $|f(x)-L|=|x-x_0|<\epsilon$, basta tomar $\delta=\epsilon$, como se muestra en la siguiente gráfica:



Gráfica de una función 1

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

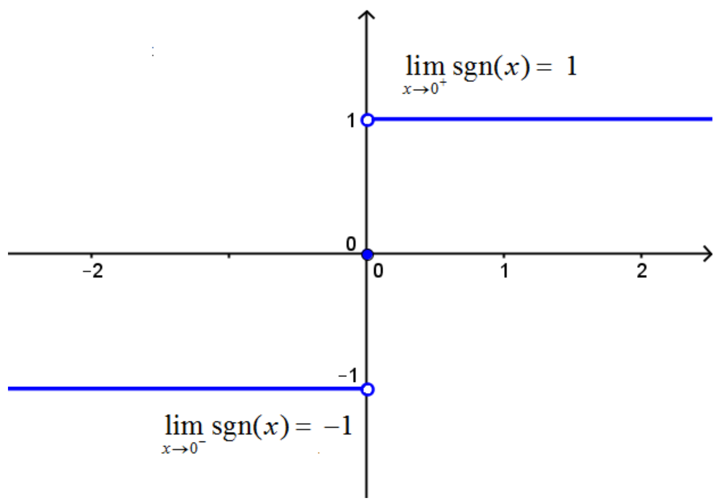
$\square$

Ahora se presenta un ejemplo de una función que no tiene límite en un determinado valor ocupando los límites unilaterales.

Ejemplo: Se tiene que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ no existe, para ellos se utilizan los límites unilaterales. Recordando que la función signo se define de la siguiente forma:

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Tomando el límite por la izquierda se tiene que $\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$ por otra parte el límite por la derecha es $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0^+}(1)=1$, gráficamente se tiene lo siguiente:



Función sin límites 1

Como el límite por la derecha es distinto al límite por la izquierda, es decir $\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)\neq\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)$, implica que $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ no existe.

El siguiente resultado muestra la compatibilidad que existe entre el concepto de límite y las operaciones algebraicas de funciones.

Teorema 2.1.6. Supóngase que $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ y que $\lim_{x\to x_0} g(x)=M$ entonces se cumple lo siguiente:

(i). $\lim_{x\to x_0}\left(f+g\right)(x)=L+M$.

(ii). $\lim_{x\to x_0}\left(f-g\right)(x)=L-M$.

(iii). $\lim_{x\to x_0}\left(f\cdot g\right)(x)=L\cdot M$.

(iv). $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{L}{M}$, cuando $M\neq 0$.

Demostración: La idea de esta prueba consiste en aprovechar que los límite de f y g existen en x_0 lo que permite proponer cantidades $\epsilon>0$ adecuadas para garantizar la existencia de $\delta>0$ adecuados. Supóngase que $\epsilon>0$, para (i) y (ii) hay que observar que para $\dfrac{e}{2}>0$ existen $\delta_1,\delta_2>0$ tales que

$$|f(x)-L|<\frac{\epsilon}{2}\text{ , si }0<|x-x_0|<\delta_1\ \text{ y }\ |g(x)-M|<\frac{\epsilon}{2}\text{ , si }0<|x-x_0|<\delta_2$$

Luego, hay que garantizar que las dos condiciones se cumplan simultáneamente, para ello hay que tomar el más pequeño entre δ_1 y δ_2, es decir, si $0<|x-x_0|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, obsérvese que como $\delta_1,\delta_2>0$ implica que $\delta>0$.

De lo anterior se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\left|(f\pm g)(x)-(L\pm M)\right|&=\left|f(x)\pm g(x)-(L\pm M)\right|=\left|(f(x)-L)\pm(g(x)-M)\right|\\&\leq|f(x)-L|+|g(x)-M|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to x_0}(f\pm g)(x)=L\pm M$. Para (iii) hay que observar que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left|(f\cdot g)(x)-L\cdot M\right|&=|f(x)g(x)-LM|\\&=\left|f(x)g(x)-LM+(f(x)M-f(x)M)+(g(x)L-g(x)L)+(LM-LM)\right|\\&=\left|(f(x)g(x)-f(x)M-g(x)L+LM)+(f(x)M-LM)+(g(x)L-LM)\right|\\&=\left|(f(x)-L)(g(x)-M)+M(f(x)-L)+L(g(x)-M)\right|\\&=\left|(f(x)-L)(g(x)-M)\right|+\left|M(f(x)-L)\right|+\left|L(g(x)-M)\right|\\&\leq|f(x)-L||g(x)-M|+|M||f(x)-L|+|L||g(x)-M|\\&<|f(x)-L||g(x)-M|+(|M|+1)|f(x)-L|+(|L|+1)|g(x)-M|\end{aligned}$$

Como $f(x)\to L$ cuando $x\to x_0$, para los valores $1,\dfrac{\epsilon}{3(|M|+1)}>0$ existen $\delta_1,\delta_2>0$ tales que:

$$|f(x)-L|<1\text{ , si }0<|x-x_0|<\delta_1\ \text{ y }\ |f(x)-L|<\frac{\epsilon}{3(|M|+1)}\text{ , si }0<|x-x_0|<\delta_2.$$

De manera similar, como $g(x) \to M$ cuando $x \to x_0$, para los valores $\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3(|L|+1)} > 0$ existen $\delta_3, \delta_4 > 0$ tales que:

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{3} \text{, si } 0 < |x - x_0| < \delta_3 \text{ y } |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{3(|L|+1)} \text{, si } 0 < |x - x_0| < \delta_4$$

Análogamente a (i) y (ii) para que se cumpla las 4 condiciones simultáneamente hay tomar el valor más pequeño entre $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ y δ_4, es decir, cuando $0 < |x - x_0| < \delta$, donde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\} > 0$, se tiene que:

$$|f(x) - L||g(x) - M| < (1)\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$(|M|+1)|f(x) - L| < (|M|+1)\frac{\varepsilon}{3(|M|+1)} = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$(|L|+1)|g(x) - M| < (|L|+1)\frac{\varepsilon}{3(|L|+1)} = \frac{\varepsilon}{3}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(x) - L \cdot M| &< |f(x) - L||g(x) - M| + (|M|+1)|f(x) - L| + (|L|+1)|g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$. Finalmente, para (iv) hay que mostrar primero que $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{M}$ cuando $M \neq 0$. En efecto, hay que observar lo siguiente:

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{g(x)M}\right| = \frac{|g(x) - M|}{|g(x)| \cdot |M|}$$

Como $g(x) \to M$ cuando $x \to x_0$ para $\frac{|M|}{2} > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}, \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

Además $\frac{|M|}{2} > |g(x)-M| \geq \big||M|-|g(x)|\big|$, de donde se obtiene que $|g(x)| > |M| - \frac{|M|}{2} = \frac{|M|}{2}$ en consecuencia $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}$. Por otro lado, para $\frac{\epsilon|M|^2}{2} > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x)-M| < \frac{\epsilon|M|^2}{2}, \text{ si } 0<|x-x_0|<\delta_2$$

Tomando el valor mínimo entre δ_1 y δ_2 se garantizan las dos condiciones simultáneamente, es decir, cuando $0<|x-x_0|<\delta$ donde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ se tiene lo siguiente:

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{M}\right| = \frac{|g(x)-M|}{|g(x)|\cdot|M|} < \left(\frac{1}{|M|}\right)\left(\frac{2}{|M|}\right)\left(\frac{\epsilon|M|^2}{2}\right) = \epsilon$$

Lo que muestra que $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{M}$. Finalmente aplicando (iii) se obtiene lo que:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f \times \frac{1}{g}\right)(x) = L \times \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

$\square$

Como consecuencia inmediata del resultado anterior se tiene lo siguiente.

Corolario 2.1.7. Sean $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ un conjunto de funciones tales que:

$f_1(x) \to L_1, \ldots f_n(x) \to L_n$ cuando $x \to x_0$ entonces

(i). $\lim_{x\to x_0}\left(f_1 + \cdots + f_n\right)(x) = L_1 + \cdots + L_n$.

(ii). $\lim_{x\to x_0}\left(f_1 \times \cdots \times f_n\right)(x) = L_1 \times \cdots \times L_n$.

Demostración: La demostración es inmediata aplicando inducción matemática sobre el número n.

$\square$

Aplicando el corolario anterior a la función identidad se obtiene lo siguiente:

Lema 2.1.8. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$.

Demostración: Se procede por inducción, para $n=1$ se tiene:

$$\lim_{x\to x_0} x^1 = \lim_{x\to x_0} x = x_0 = x_0^1$$

Supóngase que para $n=k$ se tiene que $\lim_{x\to x_0} x^k = x_0^k$, tomando $n=k+1$ se obtiene lo siguiente:

$$\lim_{x\to x_0} x^{k+1} = \lim_{x\to x_0}\left(x^k\cdot x\right) = \left(\lim_{x\to x_0} x^k\right)\left(\lim_{x\to x_0} x^1\right) = x_0^k\cdot x_0 = x_0^{k+1}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\sqcup$

Combinando el teorema y su corolario junto con los lemas previos se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1.9. Sean $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales y $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$.

Demostración: Sean $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomio con coeficientes reales y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} p(x) &= \lim_{x\to x_0}\left[a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\right] = \lim_{x\to x_0} a_0 + \lim_{x\to x_0} a_1x + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_nx^n \\ &= a_0 + \left(\lim_{x\to x_0} a_1\right)\left(\lim_{x\to x_0} x\right) + \cdots + \left(\lim_{x\to x_0} a_n\right)\left(\lim_{x\to x_0} x^n\right) \\ &= a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = p(x_0)\end{aligned}$$

Aplicando el resultado anterior y la parte (iv) del teorema se tiene lo siguiente:

Proposición 2.1.10. Sean $h(x)$ una función racional y $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x\to x_0} h(x) = h(x_0)$, cuando $h(x_0)$ existe.

Demostración: Como $h(x)$ es una función racional, existen dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tales que $h(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, como $h(x_0)$ existe implica que $q(x_0)\neq 0$. El resultado se obtiene de observar que $\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x_0)}{q(x_0)}=h(x_0)$.

$\square$

Ejemplos:

- $\lim_{x\to 4} 5=5$.
- $\lim_{x\to -3} 4x^2=4(-3)^2=4(9)=36$.
- $\lim_{x\to -2}\left(3x^2-5x+6\right)=3(2)^2-5(2)+6=3(4)-10+6=12-4=8$.
- $\lim_{x\to -1}\left[\frac{4x^3-6x^2-3x}{4x^2-24}\right]=\frac{\lim_{x\to -1}\left[4x^3-6x^2-3x\right]}{\lim_{x\to -1}\left[4x^2-24\right]}=\frac{4(-1)^3-6(-1)^2-3(-1)}{4(-1)^2-24}=\frac{-7}{-20}=\frac{7}{20}$.

Ejercicio: Calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$ donde $f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x\geq 1 \\ x^2-2 & \text{si } x<1 \end{cases}$

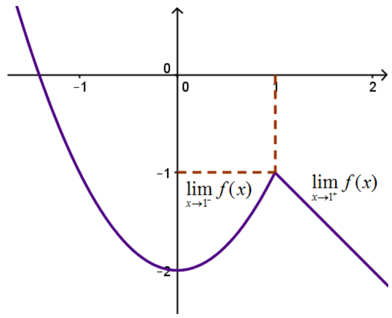
Solución: Se procede a través de límites unilaterales. Para para valores menores que 1 la regla de correspondencia de $f(x)$ es x^2-2, en consecuencia, el límite por la izquierda es:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2-2\right)=\left(1\right)^2-2=-1$$

De manera similar para valores mayores a 1 la regla de correspondencia de $f(x)$ es -1, en consecuencia, el límite por la derecha es:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(-x\right)=-\left(1\right)=-1.$$

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Grafica del límite de una función 1

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$ se tiene que $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$.

$\sqcup$

Existen funciones cuyos límites no se pueden calcular por simple evaluación como los ejemplos anteriores, en algunos casos se requiere hacer un poco de artificios algebraicos.

Ejercicio: Calcular $\lim_{x\to 2}\left[\dfrac{6-5x+x^2}{x^2-4}\right]$

Solución: Este ejercicio pide calcular el límite de una función racional, el problema que presenta es en el denominador, ya que $\lim_{x\to 2}\left[x^2-4\right]=(2)^2-4=4-4=0$ y en consecuencia el teorema sobre el límite de un cociente no se puede aplicar ya que no se cumple con su hipótesis.

Hay que observar que tanto el numerador como el denominador se puede factorizar, en consecuencia, se tiene lo siguiente:

$$\frac{6-5x+x^2}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$$

El mismo concepto de límite dice que hay que tomar acercamiento, eso significa que $x \neq 2$ en consecuencia $x-2\neq 0$ y la expresión anterior se reduce el siguiente modo:

$$\frac{6-5x+x^2}{x^2-4}=\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x-3}{x+2}$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{6-5x+x^2}{x^2-4}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x-3}{x+2}\right]=\frac{\lim_{x\to 2}(x-3)}{\lim_{x\to 2}(x+2)}=\frac{2-3}{2+2}=-\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 2}\left[\frac{6-5x+x^2}{x^2-4}\right]=-\frac{1}{2}$

Los siguientes ejemplos se resuelven de manera similar al ejercicio anterior.

Ejemplo:

- $\lim_{x\to 4}\frac{8-6x+x^2}{20-9x+x^2}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x-2)}{\cancel{(x-4)}(x-5)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{x-5}=\frac{4-2}{4-5}=\frac{2}{-1}=-2$.
- $\lim_{x\to -1}\frac{-4-x+3x^2}{4+5x+x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(3x-4)}{\cancel{(x+1)}(x+4)}=\lim_{x\to -1}\frac{3x-4}{x+4}=\frac{3(-1)-4}{-1+4}=\frac{-7}{3}=-\frac{7}{3}$.
- $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{-1+x+6x^2}{-5-9x+2x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(2x+1)}(3x-1)}{\cancel{(2x+1)}(x-5)}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{3x-1}{x-5}=\frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{-\frac{1}{2}-5}=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{11}{2}}=\frac{5}{11}$

Cuando se requiere calcular límites al infinito, hay que utilizar la relación $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, esto se realizará factorizando la potencia de x que se presente tanto en el numerador como en el denominador, como se muestra en los siguientes ejercicios.

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x-2}$.

Solución: Se comienza factorizando x en ambas componentes de la función racional para obtener lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}}=\frac{1+0}{3-0}=\frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x-2}=\frac{1}{3}$

Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x+1}{-2x^3-x^2+5x}$.

Solución: Se comienza factorizando x^3 en ambas componentes de la función racional para obtener lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x+1}{-2x^3-x^2+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(-2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{-2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{1+0+0}{-2-0+0}=-\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x+1}{-2x^3-x^2+5x}=-\dfrac{1}{2}$

Ahora se presenta la relación que existe entre el concepto de límite y la composición de funciones:

Teorema 2.1.11. Supóngase que $f(x)\to L$ cuando $x\to x_0$ y que $g(u)\to M$ cuando $u\to L$ entonces $(g\circ f)(x)\to M$ cuando $x\to x_0$.

Demostración: Como $g(u)\to M$ cuando $u\to L$, dado $\epsilon>0$ existe $\delta_1>0$ tal que $|g(u)-M|<\epsilon$, si $0<|u-L|<\delta_1$. Por otro lado, como $f(x)\to L$ cuando $x\to x_0$, para $\delta_1>0$ existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-L|<\delta_1$, si $0<|x-x_0|<\delta$, entonces tomando los valores u tales que $u=f(x)$ y $0<|x-x_0|<\delta$, lo que implica que:

$$|g(f(x))-M|<\epsilon,\ \text{si}\ 0<|x-x_0|<\delta$$

Por lo tanto, $(g\circ f)(x)\to M$ cuando $x\to x_0$.

El teorema anterior plantea que para calcular el límite de una composición de funciones es lo mismo componer las funciones y calcular el límite o calcular los límites de manera parcial, como lo muestra a continuación:

Ejemplo: Sean $f(x)=3x^2$, $g(x)=2x-1$ y $x_0=-1$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to -1} 3x^2=3(-1)^2=3$, en consecuencia $L=3$, luego $\lim_{x\to L} g(x)=\lim_{x\to 3}(2x-1)=2(3)-1=5$. Por otro lado, realizando la composición se tiene $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x^2)=2(3x^2)-1=6x^2-1$, finalmente se calcula $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to -1}(6x^2-1)=6(-1)^2-1=5$, el teorema garantizaba que ambos resultados es el mismo.

Para finalizar se presenta un resultado que relaciona el límite con el orden que existe en los números reales.

Teorema 2.1.12. Supóngase que $f(x)\le g(x)$ para todos los valores suficientemente cercanos a x_0 si $f(x)\to L$ y $g(x)\to M$ cuando $x\to x_0$ entonces $L\le M$.

Demostración: Sea $\varphi(x)=g(x)-f(x)$ entonces $\varphi(x)\ge 0$ para todos los valores suficiente cercanos a x_0 y además $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}(g(x)-f(x))=M-L$. Defínase $K=M-L$, para mostrar que $K\ge 0$ se procede por contradicción, es decir, supóngase que $K<0$ como $\varphi(x)\to K$ cuando $x\to x_0$ para $\frac{|K|}{2}>0$ existe $\delta>0$ tal que $|\varphi(x)-K|<\frac{|K|}{2}$, siempre y cuando $0<|x-x_0|<\delta$. Observando que $|\varphi(x)|-K\le|\varphi(x)-K|<\frac{|K|}{2}$ implica que $|\varphi(x)|<K+\frac{|K|}{2}=\frac{K}{2}$, en consecuencia $|\varphi(x)|<0$ ya que $K<0$, lo cual es una contradicción por consiguiente $K\ge 0$. Por lo tanto, $M\ge L$.

Teorema 2.1.13. Dadas tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tales que $g(x)\le h(x)\le f(x)$ para todos los valores suficientemente cercanos a x_0. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=L$ entonces $\lim_{x\to x_0} h(x)=L$.

Demostración: Como $f(x)\to L$ y $g(x)\to L$ cuando $x\to x_0$ y $g(x)\le h(x)\le f(x)$ para todos los valores suficientemente cercanos a x_0, se tiene que para $\epsilon>0$ existen $\delta>0$ tales que

$$|f(x)-L|<\frac{\epsilon}{4} \quad \text{y} \quad |g(x)-L|<\frac{\epsilon}{4}, \text{ si } 0<|x-x_0|<\delta$$

Hay que observar lo siguiente:

$$0 \le f(x) - g(x) = \big(f(x) - L\big) - \big(g(x) - L\big) \le |f(x) - L| + |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando:

$$\begin{aligned} |L - h(x)| &= \big|\big(L - f(x)\big) + \big(f(x) - h(x)\big)\big| \le |f(x) - L| + |f(x) - h(x)| \\ &= \frac{\varepsilon}{4} + \big(f(x) - g(x)\big) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$.

$\square$

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.1.14. Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se tiene que $\lim_{x \to 0} x^n = 0$.

Demostración: Se tiene que $0 \le x^n \le x$ para todo $0 < |x| < 1$, además $\lim_{x \to 0} 0 = 0$ y $\lim_{x \to 0} x = 0$ por el teorema anterior $\lim_{x \to 0} x^n = 0$.

Continuidad

La continuidad es una de las propiedades más importantes que tienen algunas funciones, la importancia que tiene esta propiedad es que a partir de ella se pueden garantizar otras propiedades.

Continuidad de funciones

En la sección anterior, muchos de los ejemplos de límites se calcularon evaluando ya sea en la función original o en reducciones de la misma, en general el límite de una función no siempre se puede calcular de esta manera, sin embargo, hay una familia de funciones la cuales permiten calcular los límites evaluando. Esta sección comienza presentando la definición de una función continua.

Intuitivamente, la gráfica de una función continua se puede dibujar sin despegar el lápiz, es decir, es un trazo continuo esto significa que no presenta interrupciones, ni saltos ni mucho menos oscilaciones indefinidas. Pero definir un concepto a partir de la vista, puede ser engañoso, por consiguiente, la definición formal de una función continua es la siguiente.

Definición 2.2.1. Se dice que una función $f(x)$ **es continua en** x_0 sí y sólo si:

(i). La función $f(x)$ está definida en x_0.

(ii). $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe.

(iii). $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

En caso contrario, se dice que $f(x)$ **es discontinua en** x_0 si y sólo si $f(x)$ no es continua en x_0. Además se dice que $f(x)$ **es continua en un conjunto** S si y sólo si $f(x)$ es continua en x para todo $x \in S$.

Hay que observar que el concepto de continuidad es un local, esto quiere decir, depende del punto donde se esté trabajando.

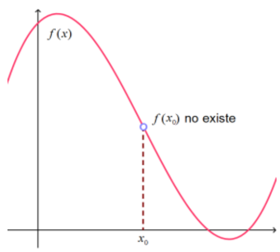
A partir de (iii) la definición de continuidad se escribe de manera equivalente: la función $f(x)$ es continua en x_0 sí y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tales que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, si $|x - x_0| < \delta$.

Ejemplo: Cualquier polinomio $p(x)$ es una función continua para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ ya que $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: El polinomio $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ es continua en $\mathbb{R}$.

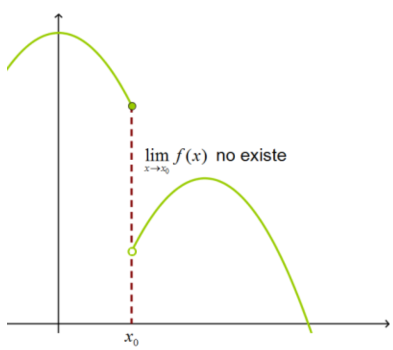
Cuando $f(x)$ es discontinua en x_0 significa que al menos una de las condiciones de la definición de continuidad no se cumple, de manera más clara se tiene que:

(a) Que $f(x)$ no existe esté definida en x_0.



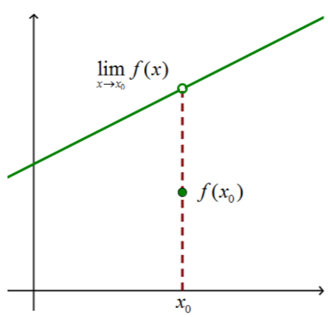
Polinomio continua en R 1

(b) Que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no exista.



Polinomio continua en R 2

(c) Qué $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.



Polinomio continua en R 3

Ejemplo: Dada una función racional $h(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es continua en todos los valores x_0 tales que $q(x_0)\neq 0$.

Ejemplo: La función $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x^2-5x+6}$ es continua salvo los valores que satisfacen $x^2-5x+6=0$, equivalentemente se tiene que $(x-2)(x-3)=0$, por consiguiente $x=2$ y $x=3$. Por lo tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}/\{2,3\}$.

Ejemplo: La función $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x^3+x^2-20x}$ es continua salvo los valores que satisfacen $x^3+x^2-20x=0$, equivalentemente se tiene que $x(x+5)(x-4)=0$, por consiguiente $x=0$, $x=-5$ y. $x=4$ Por lo tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}/\{-5,0,4\}$.

Ahora se presenta dos ejemplos de cómo estudiar la continuidad de una función definida por secciones.

Ejercicio: Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x\le 4 \\ 3x+a & \text{si } x>4 \end{cases}$ hallar el valor de a para que $f(x)$ sea continua en $x_0=4$.

Solución: Dado que $f(x)=-x^2$ para $x\le 4$ entonces $f(4)=-(4)^2=-16$, es decir, se cumple la condición (i) de la definición. Para la condición (ii) se toman los límites unilaterales, de donde se obtiene que:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\left(-x^2\right)=-(4)^2=-16 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(3x+a)=3(4)+a=12+a$$

Como $\lim_{x\to 4} f(x)$ tiene que existir, implica que:

$$-16=\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=12+a$$

Por consiguiente $a=-16-12=-28$

□.

Ejercicio: Dada la función $f(x)=\begin{cases} -2x^2+4 & \text{si } x\leq 1 \\ 3x & \text{si } x>1 \end{cases}$ estudiar su continuidad.

Solución: Dado que $f(x)$ es una función por secciones donde cada sección es un polinomio definido sobre intervalos, solo basta estudiar cuando $x_0=1$, dado que $1\leq 1$ se tiene que $f(1)=-2(1)^2+4=2$. Tomando límites unilaterales se tiene lo siguiente:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-2x^2+4\right)=-2\left(1\right)^2+4=2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(3x\right)=3\left(1\right)=3$$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ entonces $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe, es decir, la función $f(x)$ es discontinua en $x_0=1$. Por lo tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}/\{1\}$.

Propiedades de la continuidad

En esta sección se presenta algunas propiedades de las funciones continuas, se comienza presentando la relación entre las funciones continuas y las operaciones algebraicas de funciones.

Teorema 2.2.2. Supóngase que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en x_0 entonces:

(i). $\left(f+g\right)(x)$ es continua en x_0.

(ii). $\left(f-g\right)(x)$ es continua en x_0.

(iii). $\left(f\cdot g\right)(x)$ es continua en x_0.

(iv). $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es continua en x_0, sí $g(x_0)\neq 0$.

Demostración: Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en x_0 se tiene que:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x_0)=g(x_0).$$

Para (i) y (ii) se tiene que:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f\pm g\right)(x)=f(x_0)\pm g(x_0)=\left(f\pm g\right)(x_0)$$

Para (iii) se tiene lo siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$$

Finalmente, para (iv) cómo $g(x_0) \neq 0$ se tiene lo siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g} \right)(x_0)$$

Con lo anterior queda demostrado el teorema.

$\square$

Ahora se presenta la relación que hay entre el concepto de continuidad y la composición de funciones:

Teorema 2.2.3. Supóngase que $f(x)$ es continua en x_0 y que $g(x)$ es continua en $f(x_0)$ entonces $(g \circ f)(x)$ es continua en x_0.

Demostración: Para mostrar este resultado se utiliza la relación que hay entre el límite de una función y la composición de funciones. Como $f(x)$ es continua en x_0 implica que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y como que $g(x)$ es continua en $f(x_0)$ implica que $\lim_{u \to f(x_0)} g(u) = g(f(x_0))$ se tiene que:

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

Por lo tanto $(g \circ f)(x)$ es continua en x_0.

$\square$

Ejemplo: La función $h(x) = 2(x^2 + 5)^3$ es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que $h(x)$ es la composición de las funciones $f(x) = x^2 + 5$ y la función $g(x) = 2x^3$.

Cuando $f(x)$ está definida en un intervalo abierto (a,b), hay que recordar que $f(x)$ **es continua en** (a,b) sí y sólo si $f(x)$ es continua en x para todo $x \in (a,b)$. Cuando se tiene un intervalo cerrado $[a,b]$ se dice que $f(x)$ **es continua en** $[a,b]$ sí y sólo si $f(x)$ es continua (a,b), $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

El siguiente resultado presenta como hipótesis la continuidad de la función un punto sin embargo la conclusión muestra el comportamiento de la función un intervalo que contiene a dicho punto.

Proposición 2.2.4. Supóngase que $f(x)$ es continua en x_0 si $f(x_0)>0$ existe $\delta>0$ tal que para todo x que satisface $|x-x_0|<\delta$ implica que $f(x)>0$.

Demostración: Dado que $f(x)$ es continua en x_0 entonces para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, si $|x-x_0|<\delta$, en particular cuando $\varepsilon=f(x_0)>0$ existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(x_0)|<f(x_0)$, si $|x-x_0|<\delta$. Lo que implica que $f(x)>0$.

$\sqcup$

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior se tiene lo siguiente:

Corolario 2.2.5. Supóngase que $f(x)$ es continua en x_0 si $f(x_0)<0$ existe $\delta>0$ tal que para todo x que satisface $|x-x_0|<\delta$ implica que $f(x)<0$.

Demostración: Basta observar que la función $-f(x)$ satisface las hipótesis de la proposición anterior.

$\sqcup$

Los siguientes resultados presentan algunas propiedades que tienen las funciones continúas definidas sobre intervalos cerrados, esto requiere la utilización del axioma de completes de los números reales.

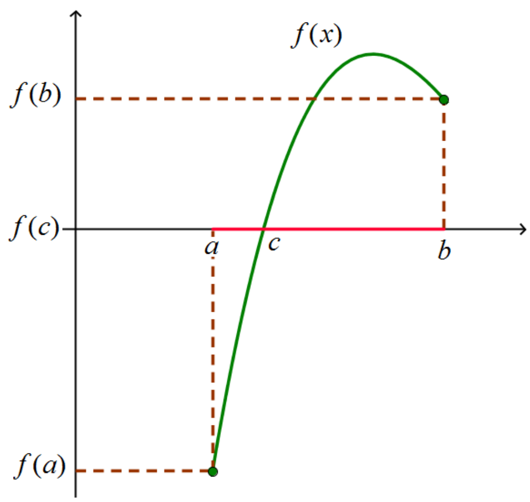
Teorema 2.2.6. Supóngase que $f(x)$ es continua en $[a,b]$, si $f(a)<0$ y $f(b)>0$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Demostración: Sea $A=\{x\in[a,b] \mid f(y)<0$ para todo $y\in[a,x]\}$, dado que $f(a)<0$, por el Corolario 2.2.5 implica que existe $\delta>0$ tal que $f(x)<0$ para cada x que satisface $x-a<\delta$, esto garantiza que $A\neq\varnothing$. De manera similar, como $f(b)>0$ por la Proposición 2.2.4 existe $\delta>0$ tal que $f(x)>0$ para todo x que satisface $b-x<\delta$, por consiguiente A no vacío es un conjunto acotado superiormente, por el axioma de completes existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $c=\sup(A)$.

Ahora se mostrará que $f(c)=0$, para ello se procede por contradicción, supóngase que $f(c)<0$ por el Corolario 2.2.5 existe $\delta>0$ tal que $f(x)<0$ para todo x que satisface $|x-c|<\delta$, equivalentemente $c-\delta<x<\delta+c$, así tomando $c<y<c+\delta$ se tiene que $f(y)<0$ lo que contradice el hecho de que $c=\sup(A)$. De manera análoga, supóngase que $f(c)>0$ por la Proposición 2.2.4 existe $\delta>0$ tal que $f(x)>0$ para todo x que satisface $|x-c|<\delta$, equivalentemente $c-\delta<x<\delta+c$, así tomando $c-\delta<y<c$ se tiene que $f(y)>0$ lo que contradice el hecho de que $c=\sup(A)$. Por lo tanto $f(c)=0$.

$\sqcup$

De forma gráfica el teorema anterior se presenta de la siguiente forma:



Gráfica teorema 2.2.6 1

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior se tienen los siguientes resultados:

Corolario 2.2.7. Supóngase que $f(x)$ es continua en $[a,b]$, si $f(a)>0$ y $f(b)<0$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Demostración: Se obtiene de aplicar al teorema anterior a la función $-f(x)$.

$\sqcup$

Corolario 2.2.8. Supóngase que $f(x)$ es continua en $[a,b]$, si $f(a)<y<f(b)$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=y$.

Demostración: Se obtiene de aplicar al teorema anterior a la función $h(x)=f(x)-y$, en efecto como $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces $h(x)=f(x)-y$ es continua en $[a,b]$, además $h(a)=f(x)-y<0$ y $h(b)=f(b)-y>0$ por el Teorema 2.2.6 existe $c\in(a,b)$ tal que $h(c)=0$, es decir $f(c)=y$.

$\square$

Antes de presentar el siguiente teorema, se comienza con el siguiente concepto, se dice que una función $f(x)$ **es acotada en un conjunto** S si y solo si existe $M>0$ tal que $|f(x)|\leq M$ para todo $x\in S$.

Lema 2.2.8. Si $f(x)$ es continua en x_0 entonces existe un $\delta>0$ tal que $f(x)$ es continua en $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Demostración: Por la definición de continuidad, para $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ sí $|x-x_0|<\delta$. Observando que $|f(x)|-|f(x_0)|\leq|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ implica $|f(x)|<\epsilon+|f(x_0)|$. El resultado se obtiene tomando $M=\epsilon+|f(x_0)|$.

$\square$

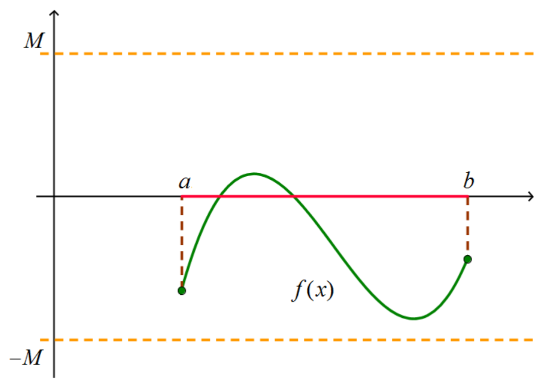
Ahora se presenta el siguiente resultado.

Teorema 2.2.9. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces existe $-M>0$ tal que $|f(x)|\leq M$ para todo $x\in[a,b]$.

Demostración: Sea $A=\{x\in[a,b]\,|\,f(x)$ es acotada en $[a,x]\}$, se tiene que $A\neq\varnothing$, ya que $a\in A$, además b acota al conjunto A, por el axioma de completitud existe $\alpha=\sup(A)$. El resto de la prueba es mostrar que $b=\alpha$, para ello se procede por contradicción, supóngase que $\alpha<b$. Como $f(x)$ es continua en α entonces existe $\delta>0$ tal que $f(x)$ es acotada en $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$, así que α es cota superior de A entonces dado x_0 tal que $\alpha-\delta<x_0<\alpha$ se tiene que $f(x)$ es acotada en $[a,x_0]$. Ahora tomando x_1 tal $\alpha<x_1<\alpha+\delta$ entonces $f(x)$ también es acotada en $[x_0,x_1]$, lo que contradice el hecho de que $\alpha=\sup(A)$. Así $b=\sup(A)$, esto solo muestra que la función $f(x)$ es acotada en $[a,x]$ para todo $x<b$, para incluir a b basta observar que como $f(x)$ es continua en b existe $\delta>0$ tal que $f(x)$ es acotada en $(b-\delta,b]$, tomando $b-\delta<x_0<b$ implica que $f(x)$ es

acotada en $\left[a, x_0\right]$ y además $f(x)$ es acotada en $\left[x_0, b\right]$. Por lo tanto $f(x)$ es acotada en $\left[a, b\right]$.

De forma gráfica el teorema anterior se ilustra de la siguiente forma:



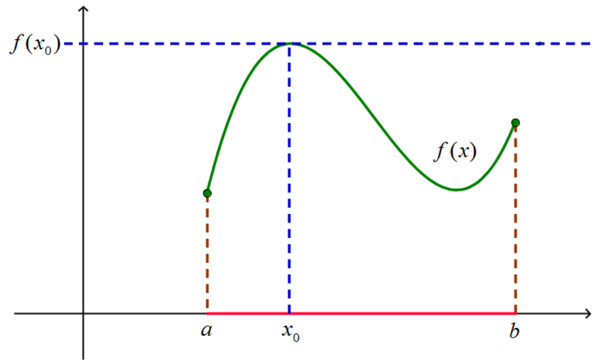
Gráfica teorema 2.2.9

Finalmente, se presenta el siguiente resultado que garantiza que una función continúa definida sobre un intervalo cerrado alcanza un punto más alto.

Teorema 2.2.10. Si $f(x)$ es continua en $\left[a,b\right]$, entonces existe $x_0 \in \left[a,b\right]$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in \left[a,b\right]$.

Demostración: Se tiene que $f(x)$ es acotada, sea $A = \left\{ f(x) \mid x \in \left[a,b\right] \right\}$ es un conjunto no vació y acotado. Por el axioma de completes existe $\alpha = \sup(A)$. Para demostrar que existe $x_0 \in \left[a,b\right]$ tal que $f(x_0) = \alpha$ se procede por contradicción, supóngase que $f(x) \neq \alpha$ y defínase la función $g(x) = \dfrac{1}{f(x) - \alpha}$ para cada $x \in \left[a,b\right]$, se tiene que $g(x)$ es continua en $\left[a,b\right]$, como $\alpha = \sup(A)$ implica que para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in \left[a,b\right]$ tal que $\alpha - f(x) < \epsilon$, estos es equivalente a que $\dfrac{1}{g(x)} < \epsilon$, cuando $x \in \left[a,b\right]$. Por consiguiente $g(x) > \dfrac{1}{\epsilon}$ cuando $x \in \left[a,b\right]$, es decir, $g(x)$ no es acotado, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $x_0 \in \left[a,b\right]$ tal que $f(x_0) = \alpha$.

De manera gráfica se tiene lo siguiente:



Gráfica teorema 2.2.10

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.2.11. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostración: Se aplica el teorema anterior a la función $-f(x)$.

Cierre de la unidad

En esta unidad se presentó el concepto de límite. A partir de este, se demostró que cuando existe es único, se estudiaron sus relaciones con las operaciones de funciones, así como también los límites unilaterales y su relación con el límite. Después se presentó el concepto de continuidad de funciones y algunas de las propiedades que se desprenden de este.

En esta unidad se estudiaste los axiomas que determinan la estructura de los números reales. Después aprendiste los conceptos de valor absoluto e los intervalos. Finalmente trabajaste con funciones reales de variable real, estudiando su dominio, contradominio, imagen, su gráfica y las distintas operaciones que hay entre ellas.

En esta unidad se presentó el concepto de límite. A partir de este, se demostró que cuando existe es único, se estudiaron sus relaciones con las operaciones de funciones, así como también los límites unilaterales y su relación con el límite. Después se presentó el concepto de continuidad de funciones y algunas de las propiedades que se desprenden de este.

Para saber más

Para profundizar sobre la continuidad de funciones y sus propiedades se pueden consultar los siguientes sitios:

Te recomiendo revisar estás páginas, trata sobre los espacios métricos topológicos, que dentro del área de cálculo diferencial y otras asignaturas te serán de utilidad.

http://www.math.psu.edu/roe/527-FA10/527F10-notes.pdf
http://www.imada.sdu.dk/~njn/MM508/topnoter.pdf
http://www.math.ethz.ch/~efonn/stuff/docs/topology.pdf

Algunos programas en línea que te permiten graficar funciones reales de variable real están en las siguientes direcciones:

- http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvciI6IiMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ--

- http://www.graphmatica.com/

Para profundizar sobre la continuidad de funciones y sus propiedades se pueden consultar los siguientes sitios:

Te recomiendo revisar estás páginas, trata sobre los espacios métricos topológicos, que dentro del área de cálculo diferencial y otras asignaturas te serán de utilidad.

http://www.math.psu.edu/roe/527-FA10/527F10-notes.pdf
http://www.imada.sdu.dk/~njn/MM508/topnoter.pdf
http://www.math.ethz.ch/~efonn/stuff/docs/topology.pdf

Fuentes de consulta

1. Apostol, T. (1990). *Calculus, (Vol. 1)*. Massachusetts Reverté.
2. Lang, S. (1986). *A First Course in Calculus. (5a edition)*. N. Y. Springer.
3. Larson, R. (2010). *Cálculo de una variable*. (9ª Edición). México. Mc Graw Hill.
4. Spivak, M. (2008). *Calculus. (4ª edición)*, México. Reverté
5. Stewart, J. B. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y contexto. (4ª edición)*. México Cengage Learning.
6. Zill, D. (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas. (4ª edición)*. México. Mc Graw Hill.