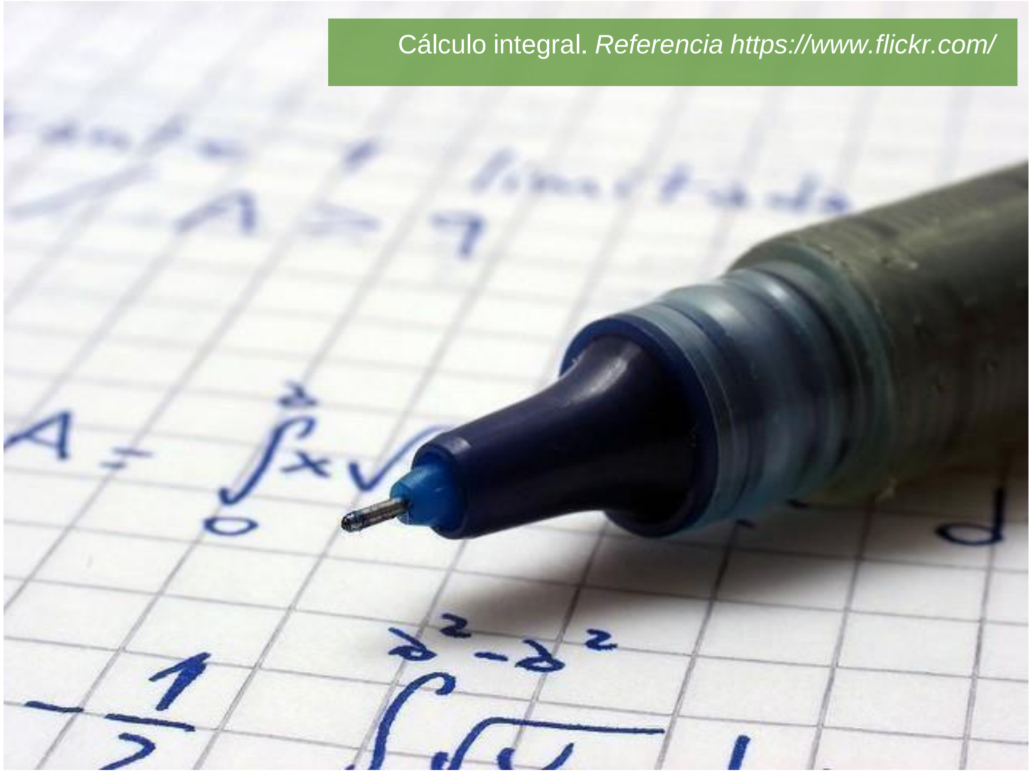
Cálculo integral

U2 | Aplicaciones de la integración

División de Ciencias de la Salud, Biológicas y Ambientales

Aplicaciones de la integración



Cálculo integral. *Referencia https://www.flickr.com/*

Índice

Presentación 4
Competencia específica 5
Propósitos 5
2.1. Área entre curvas 6
    2.1.1. Área entre curvas mediante aproximación 6
    2.1.2. Área entre curvas mediante integración 8
2.2. Volúmenes 11
    2.2.1. Volumen de un sólido 11
    2.2.2. Volúmenes de sólidos de revolución 15
    2.2.3. Volúmenes de cascarones cilíndricos 18
2.3. Valor promedio de una función 21
    2.3.1. Valor promedio 21
    2.3.2. Teorema del valor medio 22
Cierre de la unidad 24
Fuentes de consulta 25

Presentación

En esta unidad trataremos el caso de cómo calcular áreas limitadas por dos funciones, veremos que estos métodos tienen mucho que ver con el primer capítulo, donde analizamos la suma de Riemann para integración de ciertas áreas. De manera análoga utilizaremos el concepto de sumas de Riemann para llegar a la integral definida, útil para calcular el área entre dos curvas de funciones, limitadas al intervalo $[a, b]$.

Veremos también los métodos de integración para calcular volúmenes de sólidos. Para ello revisaremos el concepto de volumen, que nos será de gran utilidad para tener la idea intuitiva de lo que es volumen. Calcularemos volúmenes usando los métodos de sólido de revolución y el método de cálculo de volúmenes mediante cascarones esféricos.
Por otra parte, comprenderemos lo que es un valor medio de una función y el valor promedio de una función.

Competencia específica

Unidad 2

Analiza problemas modelo para calcular áreas entre curvas, volúmenes, así como el valor promedio de una función mediante el uso de aproximaciones, con base en definiciones, métodos y teoremas.

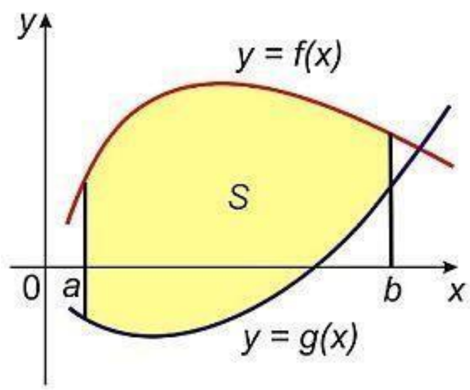
Propósitos

- Calcular áreas entre curvas o regiones, obtener la capacidad necesaria para calcular el volumen de sólidos mediante integración.
- Calcular volúmenes mediante cascarones cilíndricos y obtener el conocimiento para aplicar la integración en encontrar el valor promedio de una función y valor medio de una función.

2.1. Área entre curvas

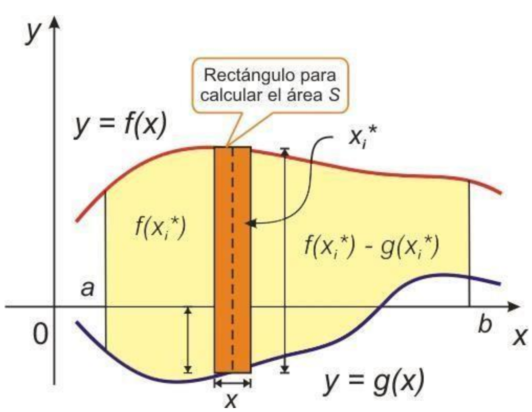
Para hallar el área delimitada entre dos funciones como se muestra en la figura siguiente, usaremos los conocimientos adquiridos en las secciones previas. Usaremos el concepto de sumas de Riemann para calcular áreas.

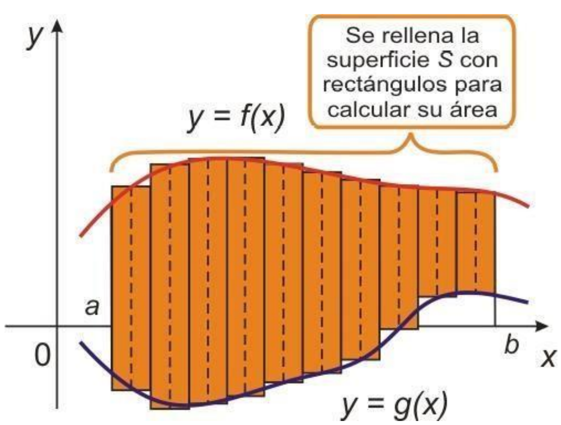
2.1.1. Área entre curvas mediante aproximación



En la figura de arriba observamos que tenemos un área S delimitada por dos funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$, delimitadas por las rectas verticales $x=a$ y $x=b$. En principio estamos considerando que las funciones son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Nuestra intención es hallar el área S y para ello haremos un procedimiento análogo al que vimos al principio de la unidad uno.





Para calcular el área de la región S consideremos que incrustamos rectángulos cuyas bases son del tamaño de Δx y alturas $h_i = f(x_i^*) - g(x_i^*)$. Así que tenemos rectangulitos de área $a_i = h_i \cdot \Delta x$.

> **Nota**: Recuerda que es indiferente cómo elijamos los puntos muestra, ya que pueden ser los del lado izquierdo, derecho o central. En este caso, tomaremos los del lado derecho $x_i^* = x_i$.

Ya hemos definido las dimensiones de nuestros rectangulitos, entonces, así podemos definir nuestra suma de Riemann como:

$$A_{(\text{aproximada})} = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*) \right] \Delta x$$

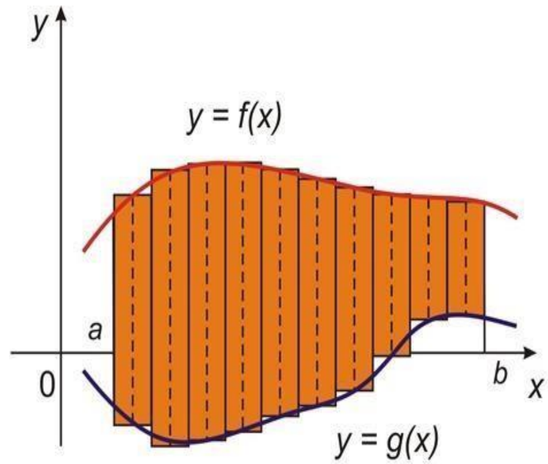
El área aproximada es la suma de las áreas de todos los rectángulos inscritos entre las dos funciones:

$$A_{(\text{aproximada})} = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*) \right] \Delta x$$

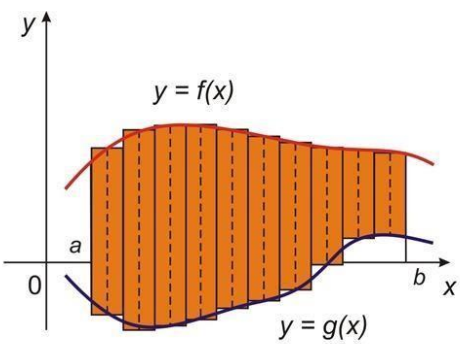
Finalmente, arribamos a que el área S delimitada por las dos funciones está expresada como un límite, cuando $n \to \infty$.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*) \right] \Delta x$$

Esta expresión la podemos reescribir como $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \Delta x$, representa que vamos a realizar la suma de todos los rectangulitos pequeños incrustados dentro de la región S. Al mismo tiempo hacemos cada vez más delgados nuestros rectangulitos, de modo que el límite de la suma se aproxima al área real de la región S.



2.1.2. Área entre curvas mediante integración



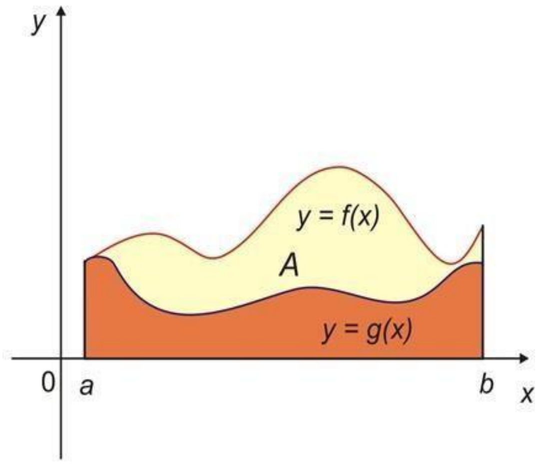
Ahora que sabemos que el área de la región S es una aproximación de rectángulos inscritos infinitesimalmente delgados o, dicho de otra manera, es el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos infinitamente delgados. Este límite se expresa como:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*) \right] \Delta x$$

Teniendo un poco de imaginación, podemos darnos cuenta de que el límite de esta suma es la integral definida de $f - g$.

Por lo tanto, el área A de la región limitada por las gráficas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales en $x=a$ y $x=b$, considerando que f y g son continuas, además de que $f \geq g$ para cualquier valor de x en el intervalo $[a, b]$ es:

$$A = \int_a^b \left[f(x_i) - g(x_i) \right] dx$$

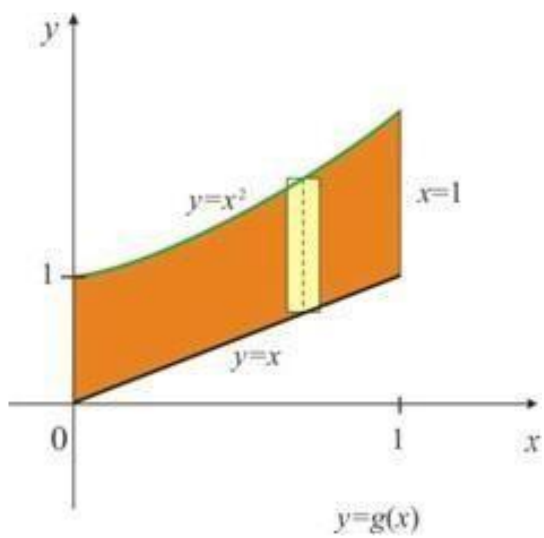


Es evidente de la figura que se cumple lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \text{área debajo} \\ \text{de } f(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{área debajo} \\ \text{de } g(x) \end{bmatrix} \\
&= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \\
&= \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

Hallar el área limitada por $y = x^2 + 2$, y por $y = -x$, acotada por las rectas verticales $x=0$ y $x=1$.



Solución

En la figura de arriba se muestra la región limitada por ambas gráficas. Usamos la fórmula $A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$ para calcular el área e identificamos los términos. $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = -x$; $a=0$ y $b=1$.

El área del triángulo representativo es:

$$\Delta A = \left[f(x) - g(x) \right] \Delta x = \left[(x^2 + 2) - (-x) \right] \Delta x$$

El área de la región está dada como:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int_0^1 \left[(x^2 + 2) - (-x) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 + x + 2 \right] dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}$$

Finalmente, tenemos que el área encerrada es:

$$A = \frac{17}{6}$$

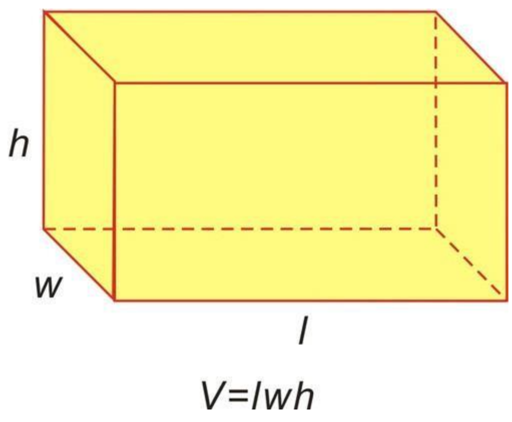
2.2. Volúmenes

Posiblemente, alguna vez te hayas hecho preguntas como:
¿Con qué formula cálculo el volumen una botella de refresco, de vino o incluso el de una olla de barro?,

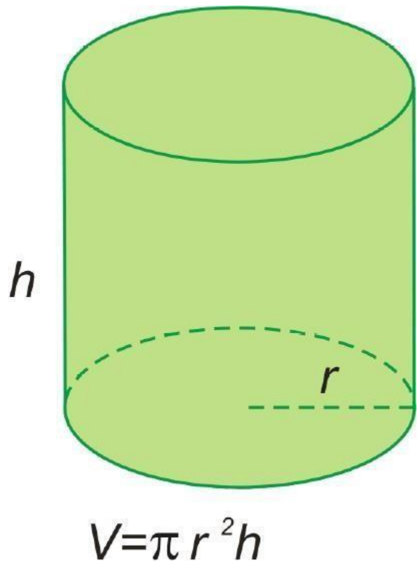
¿Cómo cálculo el volumen de una figura irregular?
Pues, en esta sección, daremos respuesta a estas inquietudes.
En esta sección encontrarás diferentes métodos de integración para calcular volúmenes de ciertos sólidos.

2.2.1. Volumen de un sólido

La pregunta inicial en esta sección es ¿sabes qué es volumen?
El volumen lo podemos definir como el espacio encerrado por varias superficies. Por ejemplo, en una caja, el espacio que está encerrado por las seis superficies planas corresponde al volumen encerrado por dicha figura. La manera de calcular el volumen es multiplicar el área de la base $l\omega$ por su altura h. Por lo tanto el volumen es $V = l\omega h$.

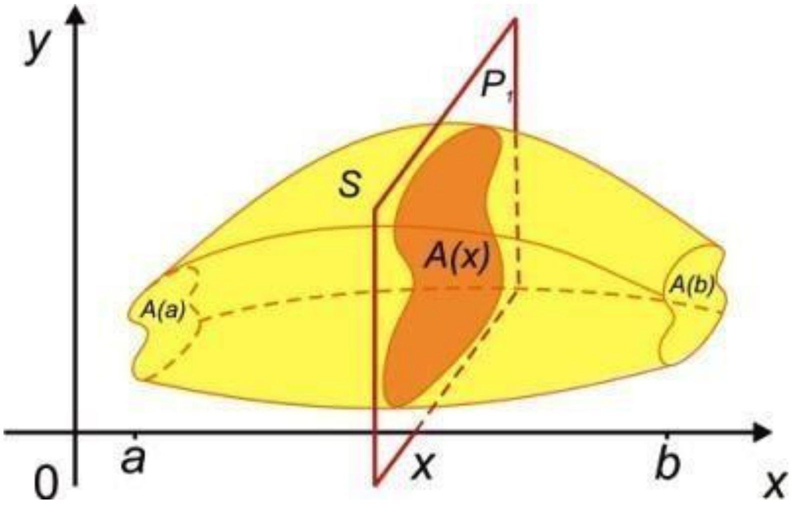


Otro ejemplo es cuando se desea calcular el volumen de un tonel de forma cilíndrica para saber su capacidad. La manera de hacerlo es multiplicar el área de su base πr^2 por su altura h. El área de la base es el área de un círculo πr^2.

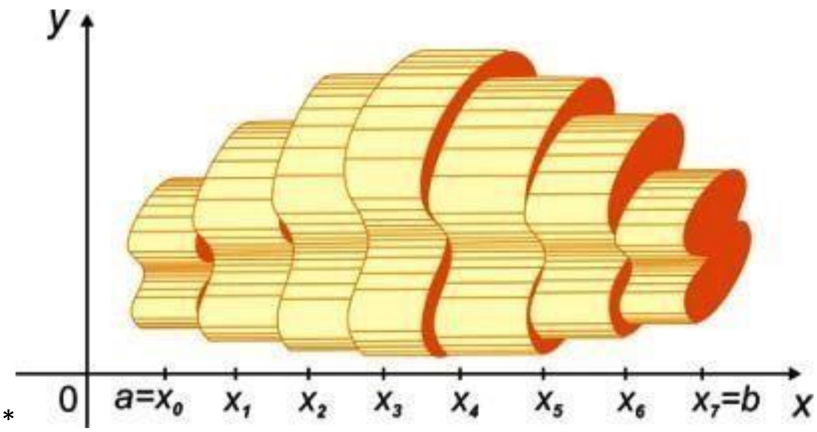


En este caso, el espacio está limitado por dos superficies planas (tapaderas) y una superficie cilíndrica que es una superficie curva que rodea el espacio geométrico buscado. El volumen es $V = \pi r^2 h$.

Lo anterior lo podemos aplicar de manera muy práctica para figuras geométricas conocidas; sin embargo, para sólidos o cuerpos volumétricos que no tengan formas bien definidas (como los de abajo), lo que haremos es incrustar pequeños cilindros dentro del sólido de cierta anchura. Con lo cual realizamos la suma de Riemann, se aplica el límite y obtendremos una integral definida. De esta manera seremos capaces de hallar volúmenes a sólidos de diferentes formas.

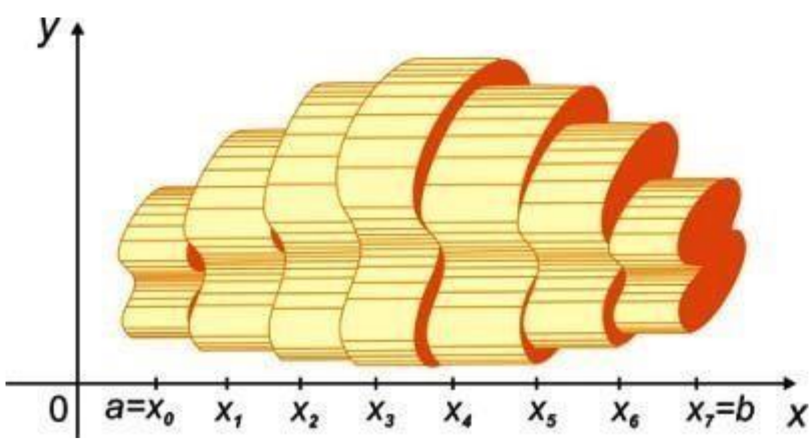


Con esto se puede hacer una estimación del volumen del sólido, simplemente realizando la suma de todos los cilindros delgados que estén dentro de la región a calcular. Claro está, si aplicamos el límite cuando el número de cilindros va en aumento, llegaremos al valor exacto del volumen de la región interna del cuerpo S.



*

Para calcular el volumen de este cuerpo, lo primero que haremos es calcular el área de la sección transversal $A(x_i^*)$ de S para multiplicarlos por una anchura Δx , esto está representado en la figura de arriba del lado derecho. Obtenemos cilindros pequeños con áreas cuyas bases miden $A(x_i^*)$ y altura Δx o, como dicen, tenemos rebanadas del cuerpo de altura Δx con bases cuyas áreas miden $A(x_i^*)$.



Realizando la suma de todos los volúmenes de las rebanadas, tendremos el volumen aproximado del sólido. Ahora bien, si aplicamos el límite cuando $n \to \infty$, es decir, aumentamos el número de cilindros o rebanadas dentro del sólido al mismo tiempo que disminuyen su achura, tenemos que $V = \lim_{n\to\infty} \sum A(x_i^*)\Delta x$. Aplicando el concepto de integral definida tenemos el siguiente enunciado:

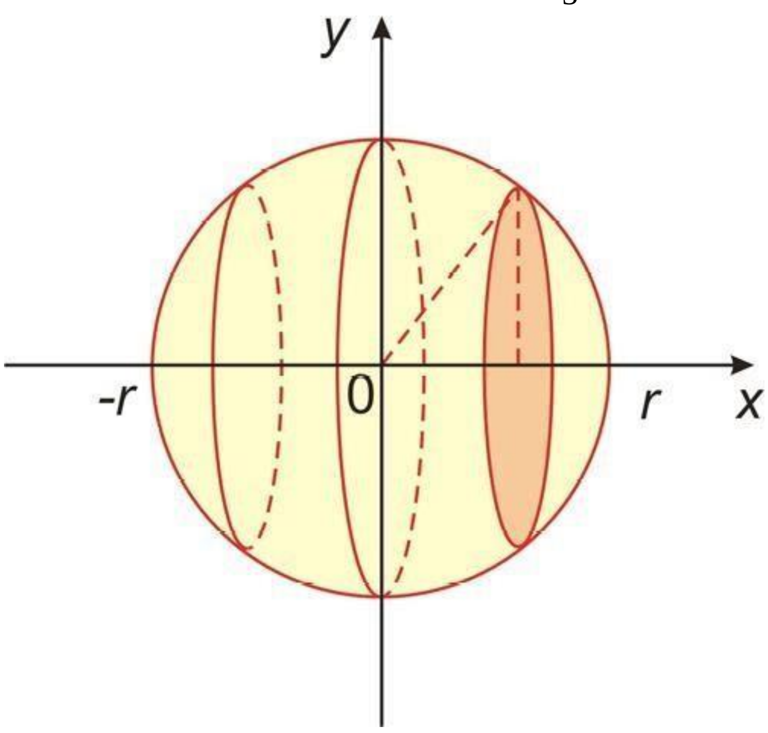
Definición de volumen

Sea un sólido limitado por $x=a$ y $x=b$. Si el área de su sección transversal de S se encuentra en el plano P_x, que pasa por x y es perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el volumen de S es:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_i A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

Ejemplo

Vamos a demostrar que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Solución

Consideremos que la esfera está centrada en el origen. El plano P_x secciona a la esfera en un círculo de radio $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, es fácil identificar esto por el teorema de Pitágoras. Se tiene entonces que el área de la sección transversal está dada por:

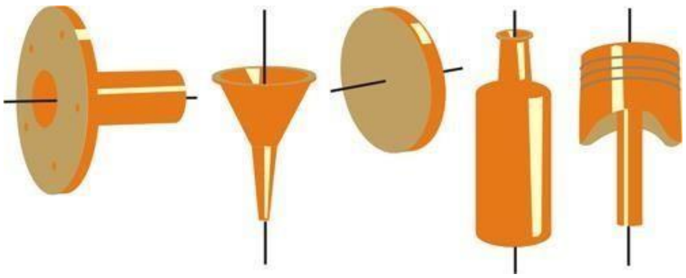
$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Usando la definición de volumen

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi \int_0^r r^2 - x^2 dx \quad \text{por ser una funcion par} \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

2.2.2. Volúmenes de sólidos de revolución

Los sólidos de revolución son comunes en ingeniería y en todo tipo de objetos de uso cotidiano. Ejemplos de estos son los embudos, ruedas, discos, píldoras, botellas y pistones, entre otros.



Si una región plana se hace girar en torno a una recta, el sólido resultante es un sólido de revolución y a esta recta se le llama **eje de revolución o eje de giro.**

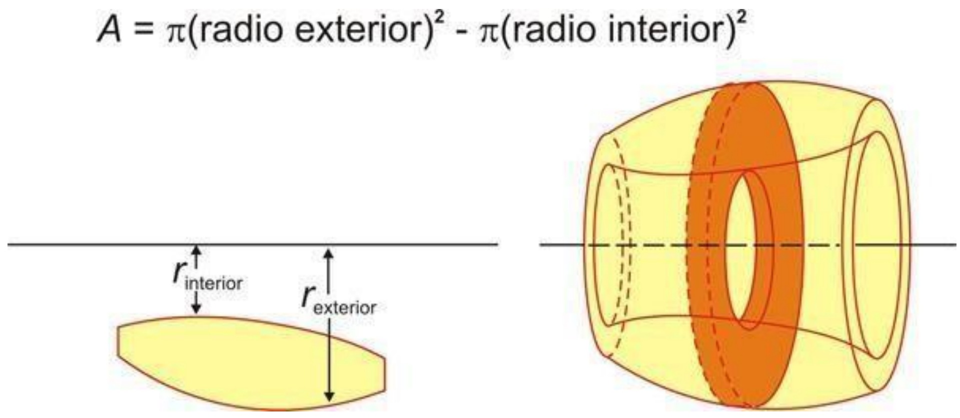
La fórmula para hallar el volumen de un sólido de revolución es la misma fórmula anterior.

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Sólo hay que hallar el área de la sección transversal $A(x)$ o $A(y)$.
Si la sección transversal es un disco, primero buscamos el radio del disco en términos de x o y, según el eje de giro x o y. Así que el área es:

$$A = \pi(\text{radio})^2$$

Si la sección transversal es un anillo o arandela, necesitamos saber el radio interior y el radio exterior como se muestra en la figura siguiente.



Para calcular el área de la arandela, restamos el área exterior menos el área interior del disco.

Lo que queda como

$$A = \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2$$

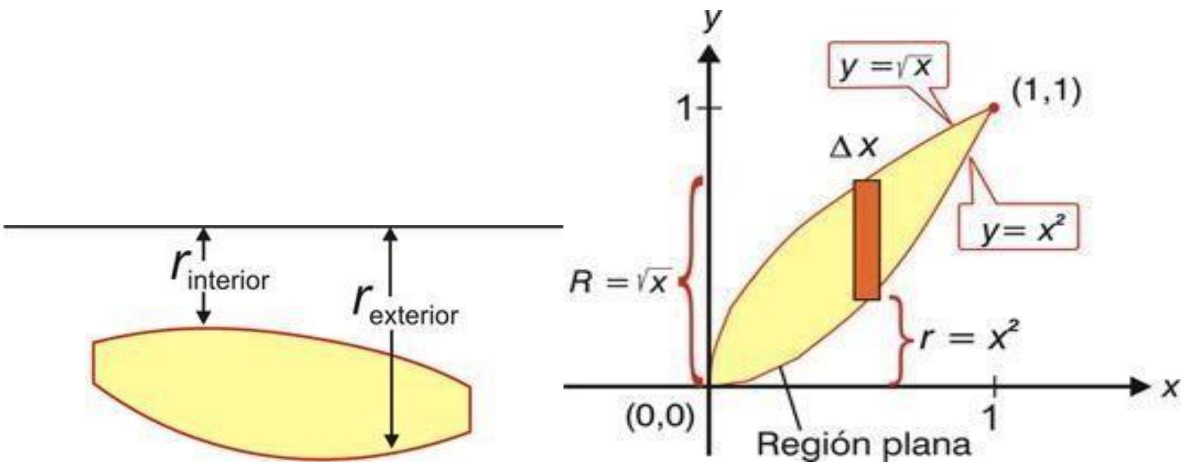
Lo anterior lo podemos enunciar de la siguiente manera:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2 \right] dx$$

Donde $f(x)^2 - g(x)^2$ representa la diferencia de regiones acotadas por el radio exterior $f(x)$ y el radio interior $g(x)$.

Ejemplo

Calcular el volumen del sólido al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ alrededor del eje x.



En este caso hay que identificar el radio interno y externo. Los límites son $x=0$, y $x=1$

$f(x) = \sqrt{x}$ radio exterior

$g(x) = x^2$ radio interior

Se sustituye en la fórmula para volumen

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 \left((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right) dx$$

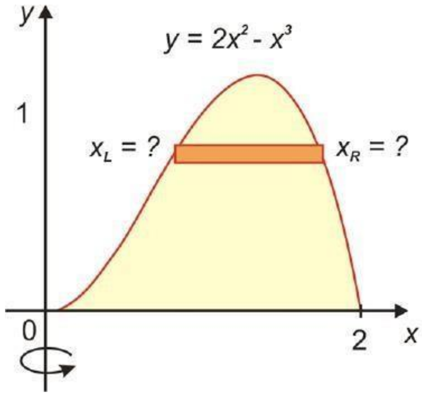
$$= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$

En este caso, el eje de revolución fue x y se ha integrado con respecto a x. En el caso que el eje de giro sea y hay que integrar con respecto a y.

2.2.3. Volúmenes de cascarones cilíndricos

Veremos cómo calcular el volumen cuando se trata de cascarones, tomando de la analogía que una naranja tiene una cáscara. Prácticamente, lo que queremos es hallar el volumen de la cáscara sin considerar el núcleo.

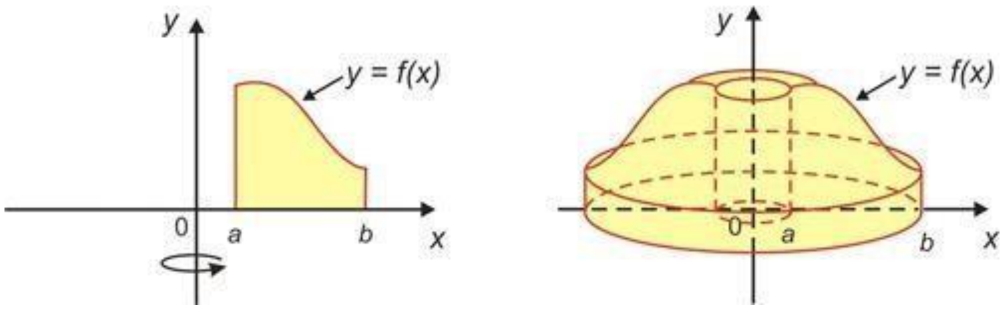
El método de los cascarones cilíndricos que enunciaremos a continuación surge de la necesidad de resolver problemas que se complican con el método de la sección anterior. Por ejemplo, para calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje y la región que limitan $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$. La región limitada es la siguiente.



Si rebanamos perpendicularmente al eje y, obtenemos un anillo o arandela; sin embargo, la situación se complica al tratar de calcular el radio interior y el radio exterior de la arandela, tendríamos que resolver la ecuación cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para escribir x en términos de y.

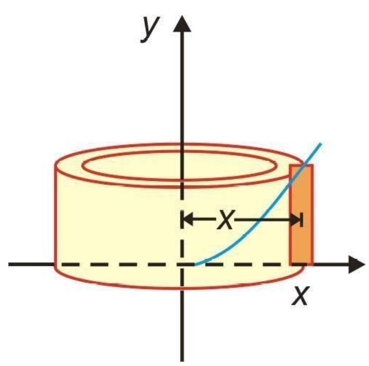
Para calcular el volumen del cuerpo de una figura como la de abajo, se tiene que hacer girar alrededor del eje y la región debajo de la curva $y = f(x)$ desde a hasta b:

$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$ donde $0 \le a < b$



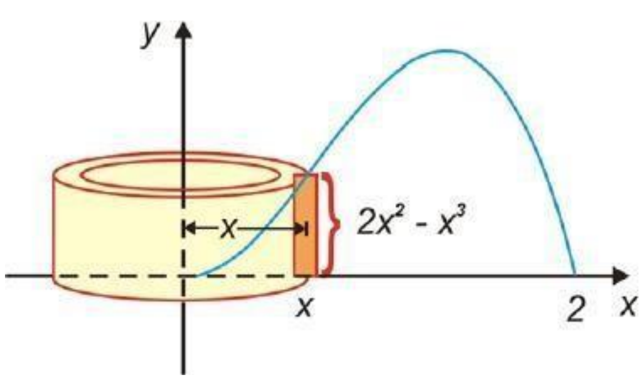
Ejemplo

En este ejemplo hay que calcular el volumen del sólido que se obtiene girando la región limitada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$ alrededor del eje y.



Solución

Miremos el dibujo siguiente que corresponde a las dos funciones, del diagrama identificamos un cascarón que tiene radio x, circunferencia $y = 2\pi x$ y altura $f(x) = 2x^2 - x^3$



El volumen para este cascarón es:

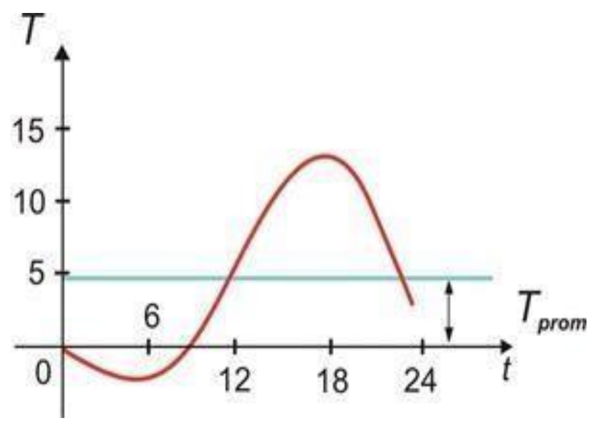
$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b 2\pi x f(x)dx = \int_a^b 2\pi x(2x^2 - x^3)dx \\
&= 2\pi \int_a^b (2x^3 - x^4)dx \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\
&= 2\pi \left(8 - \frac{32}{5} \right) \\
&= \frac{16}{5}\pi
\end{aligned}
$$

2.3. Valor promedio de una función

En esta sección veremos cómo calcular el promedio de una cantidad infinita de números, en tales casos se ven involucrados hechos para calcular la temperatura promedio durante el día, si hay una cantidad infinita de medidas del termómetro. Hablando de manera general, veremos cómo calcular el valor promedio de una función, también cómo calcular el valor medio. Finalmente conoceremos el teorema de valor medio.

2.3.1. Valor promedio

La definición es muy sencilla, así que no nos extenderemos mucho. Si tienes una función $f(x)$ como la que muestra la siguiente gráfica, es posible encontrar su valor promedio. Veamos.



El valor promedio de una función $f(x)$ en un intervalo cerrado [*a, b*] está definido como:

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Revisemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Calculemos el valor promedio de la función $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo [-1, 2].

Solución

Identificamos el intervalo para el cual se quiere calcular el promedio, $a = -1$ y b=2. Los sustituimos en la definición.

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(1+x^2)dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= 2$$

Hemos calculado el valor medio de la función $f(x) = 1 + x^2$. El resultado es 2.

2.3.2. Teorema del valor medio

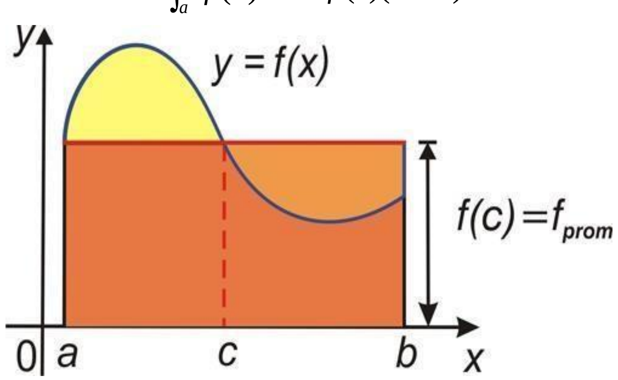
Ahora quizá te surja la siguiente duda.

¿Hay algún número, c, tal que f sea exactamente igual al valor promedio de una función, $f(c) = f_{\text{prom}}$?

Según el siguiente teorema, resulta que sí:

Teorema del valor medio para las integrales. Si tenemos una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existe un número tal que cumple:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



La figura de arriba muestra que cuando las funciones son positivas, hay un número c tal que el rectángulo de base es $b - a$ y altura $f(c)$, tiene la misma área que la región bajo la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo

Como ejemplo consideremos la función $f(x) = 1 + x^2$ continua en el intervalo [-1, 2].

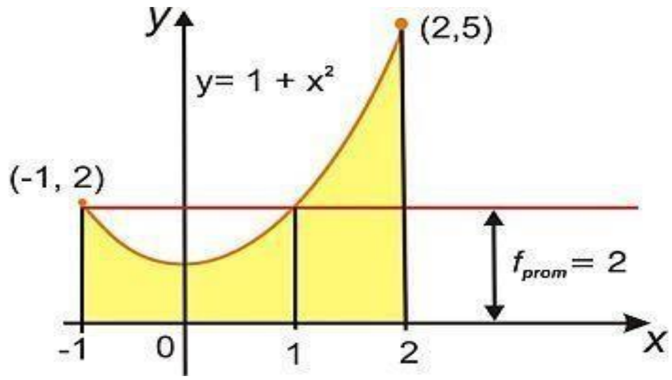
El teorema de valor medio para las integrales dice que existe un número tal que:

$$\int_{-1}^{2} (1 + x^2)dx = f(c)\left[2 - (-1)\right]$$

Sabemos que $f(c) = f_{\text{prom}}$, y del problema de la sección anterior se tiene que

$$f(c) = f_{\text{prom}} = 2$$

Por lo tanto, si despejamos la función $2 = f(c) = 1 + c^2$, se tiene que hay dos números que satisfacen la relación $f(c) = f_{\text{prom}}$ en el intervalo [-1,2].



Cierre de la unidad

En esta sección requerimos el siguiente material:

- Calculadora.
- Tablas de integración. Existen libros en las bibliotecas que podrías utilizar o bien adquirir las tablas de Internet. Te aconsejamos que lleves contigo las tablas para evaluar las integrales.
- Es necesario que repases las fórmulas para encontrar áreas de figuras geométricas planas y volumétricas comunes.

Es necesario que tengas conocimientos sobre:

- Álgebra
- Geometría analítica
- Cálculo diferencial
- Propiedades y reglas de las operaciones de sumatorias.

Fuentes de consulta

1. Apostol, T. M. (2008). *Calculus*. España: Reverté
2. Larson, R. E. (2005). *Cálculo*. México: McGraw Hill.
3. Leithold, L. (2009). *El Cálculo*. México: Oxford University Press
4. Stewart, James. (2008). *Cálculo. Trascendentes tempranas.* México: Cengage Learning.