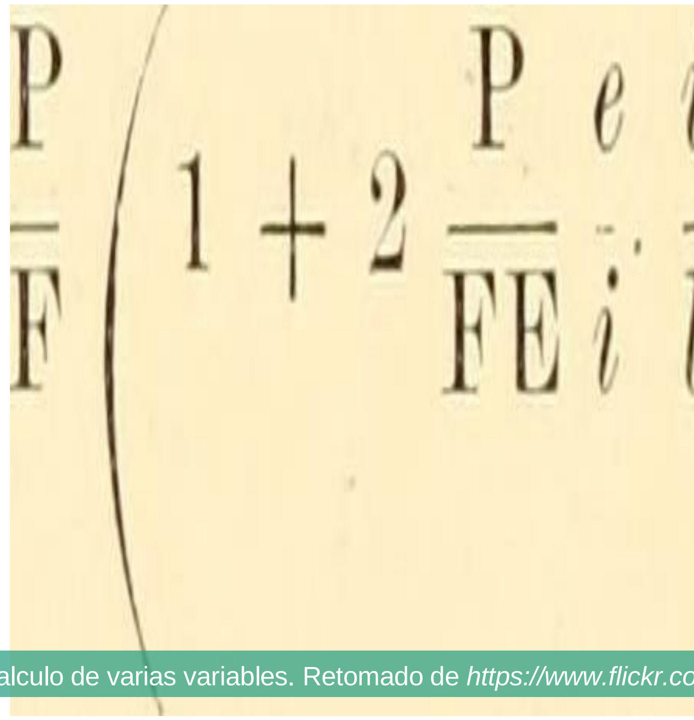
Programa de la asignatura:

Cálculo de varias variables

U3 | Ecuaciones diferenciales

Índice

Presentación de la unidad


Calculo de varias variables. Retomado de *https://www.flickr.com*

En esta unidad aprenderás a identificar los tipos de ecuaciones diferenciales, los métodos para resolverlos, aplicando las diferenciales. Este tipo de ecuaciones te permite representar diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, así como su representación en diferentes contextos sociales y profesionales.

Ejecutarás procedimientos en donde utilices las reglas y procedimientos de diferenciación, así como su representación por medio de ecuaciones exactas, separables y de factor integrante.

Estos temas que se presentan en esta unidad te brindan una introducción a la asignatura de ecuaciones diferenciales, donde todos los procedimientos aquí plasmados, se ejecutaran en dicha asignatura.

Competencia especifica

Unidad 3

Utiliza los métodos de derivación para determinar variables separadas, exactas, tomando como base los factores integrantes.

Propósitos

- **Identificar** los tipos de ecuaciones diferenciales, mediante la posición de sus variables.
- **Resolver** ecuaciones diferenciales de primer orden (exacta, separable y factor integrante).

Métodos elementales de integración

Cuando se utilizan las ecuaciones diferenciales, se puede comparar en su aplicación dentro de las ingenierías o las ciencias, y en su mente llegan destellos de ideas donde son difíciles de resolver, pero al revisarlas y comprender el sentido de cada una de ellas y la importancia que tienen para la solución en diferentes campos del ámbito profesional.

Las ecuaciones diferenciales cumplen un papel muy importante dentro de las ecuaciones de varias variables, ya que son una herramienta muy valiosa e insustituible para comprender el mundo que los rodea.

Ecuaciones con variables separadas

Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

Donde $f(x, y)$ es una función, con dos variables, definida en un intervalo en el plano xy. Esta ecuación es llamada de primer orden porque solo involucra a la primera derivada de la función.

Otra forma de expresar la ecuación anterior es:

$$\frac{d}{dx} y = f(x, y)$$

O bien,

$$y' = f(x, y)$$

La solución para la ecuación (1) es una función $y = y(x)$ diferenciable. Esta función está definida en un intervalo I de valores x, de tal forma que se cumple en el intervalo que:

$$\frac{d}{dx} y(x) = f(x, y(x))$$

En otras palabras, cuando se sustituye en la ecuación 1 a $y(x)$ y su derivada $y'(x)$, el resultado de la ecuación es válido para todo x en el intervalo I. Es conveniente mencionar que la solución general para una ecuación diferencial de primer orden es una solución que contiene todas las posibles soluciones. La solución general puede contener una constante arbitraria, pero sin que ésta sea considerada como una solución general.

Ejercicio 1. Considere la siguiente función:

$$y = \frac{C}{x} + 3$$

Muestre que, en el intervalo $(0, \propto)$ donde C es una constante, todos los miembros de la familia de esta función representan una solución de la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(3 - y)$$

Solución:

Diferenciando $y = \frac{C}{x} + 3$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + 0 = -\frac{C}{x^2}$$

A continuación, se necesita comprobar que para todo x en el intervalo $(0, \propto)$, se cumple que:

$$-\frac{C}{x^2} = \frac{1}{x}\left(2 - \left(\frac{C}{x} + 3\right)\right)$$

$$\frac{1}{x}\left(3 - \left(\frac{C}{x} + 3\right)\right) = \frac{1}{x}\left(-\frac{C}{x}\right) = -\frac{C}{x^2}$$

Como se puede ver, la función $y = \frac{C}{x} + 3$ es una solución para todo valor de C, para la ecuación diferencial.

Es común que en lugar de querer obtener una solución general, a lo largo de todo el intervalo considerado para un problema de ecuaciones diferenciales, se requiere tener una solución particular que satisfaga una condición inicial donde $y(x_0) = y_0$ es la solución para $y = y(x)$, donde por supuesto el valor es y_0 cuando $x = x_0$.

Un problema de primer orden para valores iniciales es una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ donde debe existir una solución que satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Ejemplo:

Demostrar que la función:

$$y = x + 1 - \frac{1}{3}e^x$$

Representa una solución al problema de valor inicial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \qquad y(0) = \frac{2}{3}$$

Solución:

La ecuación $\frac{dy}{dx} = y - x$ es una ecuación diferencial de primer orden con $f(x, y) = y - x$.

Desarrollando la primera parte de la ecuación se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\left(x + 1 - \frac{1}{3}e^x\right) = 1 - \frac{1}{3}e^x$$

Desarrollando el lado derecho de la ecuación, se tiene lo siguiente:

$$y - x = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x - x = 1 - \frac{1}{3}e^x$$

Y como se puede ver, la ecuación satisface la condición inicial:

$$y(0) = \left[x + 1 - \frac{1}{3}e^x\right]_{x=0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad \blacksquare$$

Ecuaciones exactas

Hay ecuaciones diferenciales que no se pueden resolver por separación de variables. Tal es el caso de la ecuación diferencial: $(2xy + 3)dx + (y^2 - 1)dy = 0$, entonces ¿cómo se podrá resolver?

Antes de contestar esta pregunta, considera que se tiene una función de dos variables de la forma: $z = f(x, y)$, la cual tiene sus derivadas parciales de primer orden, continuas en una región R del plano xy, entonces su diferencial total viene dada por:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

Cuando $f(x, y) = k$, siendo k una constante, se tiene que:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Por lo tanto, se dice que si se tiene una ecuación diferencial de la forma $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$, entonces su solución está dada implícitamente por $f(x, y) = k$.

Definición: Se dice que una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

es *exacta* si se puede escribir como $df = 0$, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

O también se puede decir que la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es *exacta* si existe una función f tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y).$$

Observe que, la solución de una ecuación diferencial exacta está dada implícitamente por la ecuación $f(x, y) = k$ en donde k es una constante.

A la función f que cumple con las condiciones de que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ se le llama también *función potencial* (en la Física) y a la función vectorial

$$\vec{F}(x, y) = M(x, y)\,\hat{\imath} + N(x, y)\,\hat{\jmath}$$

Se le llama *campo vectorial conservativo*. Por lo tanto, desde el punto de vista físico, el resolver una ecuación diferencial exacta, es lo mismo que encontrar la función potencial del campo vectorial conservativo respectivo. Ejemplos de ello, los pueden visualizar en los campos eléctrico, magnético y gravitacional.

Se puede llegar al siguiente teorema que proporciona un criterio sencillo para determinar si una ecuación diferencial es exacta:

Teorema

Sean las funciones M y N continuas en una región rectangular R del plano $xy,$ entonces la ecuación $M(x,\ y)dx\ +\ N(x,\ y)dy\ =\ 0,$ se dice que es exacta en la región rectangular $R,$ si y sólo si:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial y},$$

Para todo punto (x, y) dentro de la región R.

Observa un ejemplo de aplicación, encontrando la solución de una ecuación diferencial exacta.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación diferencial:

$$2xydx + (y^2 - 1)dy = 0$$

Solución. Se verifica primero, que la ecuación diferencial planteada es exacta. Para ello, se tiene que:

$$M(x,y) = 2xy \quad y \quad N(x,y) = (y^2 - 1),$$

Derivando parcialmente, se tiene que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = 2y \quad y \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial y} = 2y,$$

Ya que son iguales las derivadas parciales respectivas, entonces se dice que la ecuación diferencial propuesta es exacta. Por lo tanto, existe una función $f(x,\ y),$ tal que la ecuación diferencial propuesta se puede escribir como $df(x,y) = 0,$ esto es, que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = y^2 - 1.$$

Para encontrar a $f(x, y)$, se integra la primera ecuación anterior con respecto a x, dando:

$$f(x,y) = \int 2xy\,dx = x^2y + \varphi(y),$$

En donde φ es una función de y ya que se integra con respecto de x.

Ahora se deriva parcialmente esta solución para $f(x, y)$, dando:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y),$$

Y dado que se quiere que también se satisfaga la expresión:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = y^2 - 1.$$

Igualando, se tiene que:

$$x^2 + \varphi'(y) = y^2 - 1,$$

Luego,

$$\varphi'(y) = y^2 - 1 - x^2$$

Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a y, se tiene que:

$$\varphi(y) = \frac{y^3}{3} - y - x^2y + c_1,$$

En donde c_1 es una constante arbitraria.

Ahora se sustituye esta solución de $\varphi(y)$ en la ecuación $f(x,y) = x^2y + \varphi(y)$, dando

$$f(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{3} - y - x^2y + c_1$$

$$= \frac{y^3}{3} - y + c_1.$$

Finalmente se iguala $f(x,y)=k$, para obtener la solución de la ecuación diferencial originalmente planteada:

$$\frac{y^3}{3}-y+c_1=k$$

$$\frac{y^3}{3}-y=k-c_1,$$

Renombrando la constante $c=k-c_1$, se llega a la expresión final para la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{y^3}{3}-y=c,$$

Que también se puede escribir (multiplicando por 3) como:

$$y^3-3y=c.$$

Factores integrantes

Si se pregunta: ¿qué se hace si la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, no es exacta? Bueno, lo que se puede hacer es preguntar si existe una función $\mu(x,y)$, tal que si se multiplica la ecuación diferencial por esta última función, la ecuación que resulta:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0,$$

Es exacta, entonces se dice que la función $\mu(x,y)$ es un ***factor integrante*** de la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

Observe que la solución de la ecuación diferencial:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

Es la solución de $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, y que en general no es sencillo encontrar un factor integrante para la ecuación no exacta. Sin embargo, es posible determinar ciertas condiciones que deberán cumplir las funciones $M(x,y)\ y\ N(x,y)$ para encontrar los factores integrantes. Se van a considerar varios casos.

Caso 1. El factor integrante es sólo función de x. Suponga que:

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

es una función que se llamará $g(x)$ y que sólo depende de x. Entonces un factor integrante para la ecuación diferencial dada viene dado por:

$$\mu(x)=e^{\int g(x)dx}.$$

Caso 2. El factor integrante es sólo función de y. Entonces se tiene que:

$$\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}$$

es una función de y, que detonará como $h(y)$, entonces:

$$\mu(x)=e^{\int h(y)dy},$$

El cual es un factor integrante de la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

Caso 3. Los factores de integración son de la forma $x^m y^n$. Si existen m y n, tales que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=m\frac{N}{x}-n\frac{M}{y},$$

Entonces la función:

$$\mu(x,y)=x^m y^n$$

es un factor integrante de la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

Caso 4. En este caso si existen dos funciones $P(x)$ y $Q(y)$, tales que satisfagan la ecuación:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=N(x,y)P(x)-M(x,y)Q(y),$$

Entonces un factor integrante para la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es

$$\mu(x,y) = e^{\int P(x)dx} e^{\int Q(y)dy}.$$

El caso 4 incluye a los tres casos anteriores, si se consideran que $Q(y) = 0$, $P(x) = 0$ y $P(x) = \frac{m}{x}$, $Q(y) = \frac{n}{y}$, respectivamente.

Ahora observen algunos ejemplos de aplicación del uso de los factores integrantes para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales no exactas.

Ejemplo 1. Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$(2xy + y^4)dx + (3x^2 + 6xy^3)dy = 0.$$

Solución. Los valores para $M(x,y)$ y $N(x,y)$ y sus derivadas parciales son:

$$M(x,y) = (2xy + y^4); \quad N(x,y) = (3x^2 + 6xy^3),$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 4y^3; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x + 6y^3.$$

Observa que como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces no es una ecuación diferencial exacta. Por lo que se necesita encontrar un factor integrante para la ecuación diferencial y para ello se necesita investigar si M y N cumplen con las condiciones del caso 1.

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{2x + 4y^3 - 6x - 6y^3}{3x^2 + 6xy^3}$$

$$= -\frac{2y^3 + 4x}{3x^2 + 6xy^3}$$

Esta expresión no es una función exclusiva de x. Observa si ahora M y N son funciones que cumplen con las condiciones del caso 2.

$$\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} = \frac{6x + 6y^3 - 2x - 4y^3}{2xy + y^4}$$

$$= \frac{2(y^3 + 2x)}{y(y^3 + 2x)}$$

$$= \frac{2}{y}.$$

Como esta expresión si es una función únicamente de y, entonces el factor integrante es de la forma:

$$e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln} = e^{\ln y^2} = y^2$$

Por lo tanto, $\mu(y) = y^2$, es un factor integrante que debe multiplicar a la ecuación diferencial original dando lo siguiente:

$$y^2(2xy + y^4)dx + y^2(3x^2 + 6xy^3)dy = 0$$

$$(2xy^3 + y^6)dx + (3x^2y^2 + 6xy^5)dy = 0.$$

Ahora identifica las diferentes partes:

$$M(x,y) = (2xy^3 + y^6), \qquad N(x,y) = (3x^2y^2 + 6xy^5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 + 6y^5, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 + 6y^5.$$

Estas últimas expresiones al ser iguales implican que la ecuación diferencial:

$$(2xy^3 + y^6)dx + (3x^2y^2 + 6xy^5)dy = 0$$

es exacta y su solución está dada por: $x^2y^3 + xy^6 = c$

Ejemplo. Encontrar la solución de la ecuación diferencial $(x + y + 2)dx + dy = 0$.
Solución. Se identifica a $M(x,y)$ y $N(x,y)$ de la siguiente manera:

$$M(x,y) = x + y + 2, \qquad N(x,y) = 1,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Esto dice que la ecuación diferencial no es exacta, por lo que se debe investigar si existe un factor integrante que la transforme en una ecuación exacta. Primero se observa si se cumplen las condiciones del caso 1.

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = 1.$$

Esto no es una función exclusiva de x o de y. Se considera que la función sólo depende de x, es decir, $\mu(x) = e^x$. Ahora se multiplica la ecuación por $\mu(x)$:

$$e^x(x + y + 2)dx + e^x dy = 0$$

Se puede demostrar que ésta es una ecuación diferencial exacta, cuya solución es:

$$y = ce^{-x} - x - 1.$$

Cierre de la unidad

Durante esta unidad lograste identificar los tipos de ecuaciones diferenciales, en su caso los más básicos, aprendiste a resolverlos y clasificarlos, además se representaron situaciones donde se ocupan estos tipos de ecuaciones mediante las derivadas de ecuaciones de primer orden.

Esta unidad sirve como introducción a la siguiente asignatura del quinto semestre ***Ecuaciones diferenciales***, donde se plasmarán los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, así como sus aplicaciones dentro del contexto profesional.

Se te invita a que sigas aplicando tus conocimientos adquiridos hasta el momento, ya que los que acabas de obtener te servirán como un instrumento que utilizarás dentro del quinto semestre.

Para saber más

Para poder reforzar los conocimientos adquiridos en esta unidad se recomienda el siguiente artículo en la web donde podrás obtener diferentes ejemplos de ecuaciones exactas.

https://edumatth.weebly.com/uploads/1/3/1/9/13198236/ecuaciones_diferenciales_exactas.pdf

Para poder visualizar teorías y ejercicios de ***ecuaciones separables*** se recomienda la siguiente página, la cual muestra ejemplos claros y sencillos para que inicies con la práctica de solución de este tipo de ecuaciones.

http://canek.azc.uam.mx/Ecuaciones/Teoria/2.PrimerOrden/TPrimerOrden.htm

En esta página podrás revisar ejemplos de ecuaciones diferenciales con factor integrante, por lo que se te recomienda revisarlos.

http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma-841/recursos/l841-06.pdf

Fuentes de consulta

1. Bosch, C. (2006). *Cálculo diferencial e integral*. México: Publicaciones cultural S.A.
2. Picón, P. E. (2006). *Análisis conjunto*. México: Porrúa.
3. Thomas (2006). *Cálculo de varias variables*. México: Pearson.
4. Abellanas, L. y Galindo, A. (1990). *Métodos de Cálculo*. México. Mc Graw-Hill, serie
5. Schaum.
6. Weisstein, E.W: *CRC (1999) Concise Encyclopedia of Mathematics*. E.E.U.U:Chapman & Hall.