U1

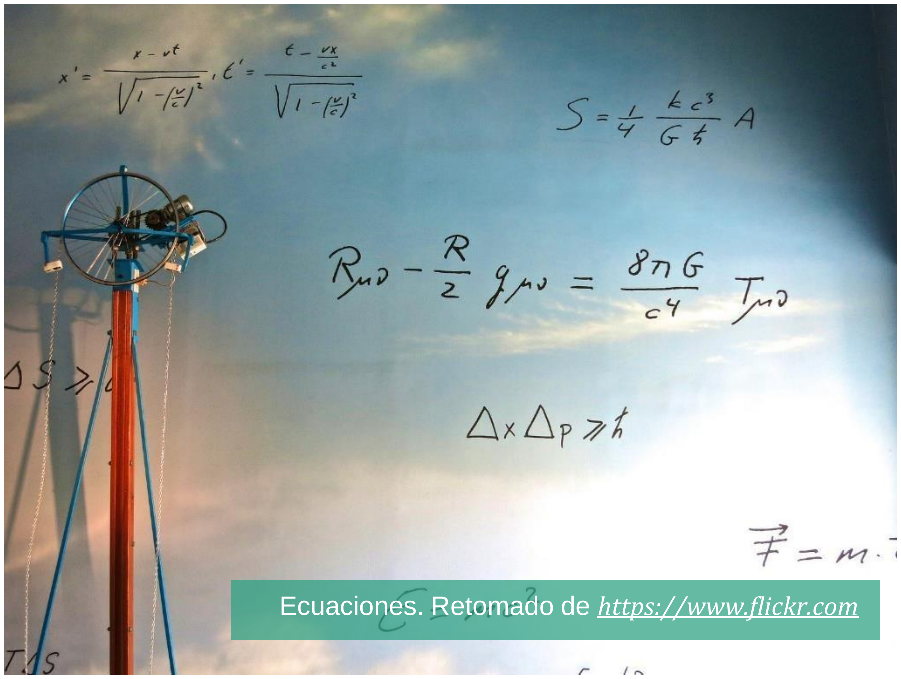
Programa de la asignatura:

Ecuaciones diferenciales

U1 | Conceptos fundamentales y ecuaciones diferenciales de primer orden

Índice

Presentación de la unidad



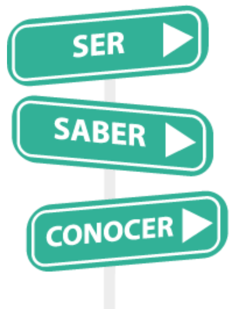
Ecuaciones. Retomado de *https://www.flickr.com*

En esta primera unidad serán cubiertos conceptos fundamentales que se utilizarán durante la materia, los cuales sirven de base para el entendimiento y resolución de las ecuaciones diferenciales. El vocabulario que se empleará durante el curso será provisto para fortalecer el nivel de comprensión de los temas, pues se establecerá un lenguaje en común. De igual manera, se estudiará una clase de ecuaciones en particular, llamadas “de primer orden”, al aprender métodos empleados en su solución y distinguiendo entre diferentes tipos de modelos; además, se estudiarán casos particulares y se aplicarán estas ecuaciones de primer orden para modelar y resolver problemas asociados con fenómenos físicos presentes en las energías renovables.

El objetivo de ésta y de las demás unidades será el proporcionar las herramientas necesarias para poder modelar matemáticamente sistemas cambiantes en el tiempo, para así facilitar su aplicación en el desarrollo, análisis, operación y control de sistemas de energía renovable.

Siéntete bienvenido al curso.

Competencia específica



Unidad 1

Aplica ecuaciones diferenciales de primer orden para modelar matemáticamente fenómenos físicos encontrados en sistemas de energías renovables, por medio de métodos como el de separación de variables.

Propósitos

1. **Identificar** los conceptos básicos que se emplean durante el análisis y solución de ecuaciones diferenciales, así como los conceptos básicos para realizar una primera clasificación de sus diferentes tipos.

2. **Reconocer** una ecuación diferencial de primer orden, para determinar si un fenómeno físico es representable por medio de éstas, al utilizar métodos desolución para ecuaciones diferenciales de primer orden.

1.1. Conceptos fundamentales y definiciones

Dentro del campo de las energías renovables, pueden ser observados distintos tipos de procesos o fenómenos.

La palabra *fenómeno* proviene del latín *phaenomenon* y, de acuerdo con la Real Academiade la Lengua Española (2001), hace referencia a “toda manifestación que se hace presente a la consciencia de un sujeto y aparece como objeto de su percepción”.

Una forma de clasificar los fenómenos es en físicos y químicos. Los primeros son manifestaciones en los que se efectúa algún proceso sin que las sustancias involucradas presenten un cambio en sus propiedades inherentes. Esto quiere decir que no cambia su naturaleza. Los fenómenos químicos, por su parte, son todo lo contrario: las sustancias cambian para formar otras de diferente naturaleza (De la Cruz, T., Barcía, M., s.f.). Podría decirse que un fenómeno físico es aquél que envuelve las propiedades físicas de materia y energía, y pueden ser, por ejemplo, eléctricos, atmosféricos, acústicos, mecánicos y ópticos, por mencionar algunos (Farlex, 2012).

Según Cárdenas, R. D. (2009), la manera de estudiar los fenómenos denominados como *físicos* es por medio de un proceso que inicia con la observación, para posteriormente describir la manifestación observada y así establecer, finalmente, un modelo que puede ser validado por la forma en que se comporta la manifestación. Para lograrlo, se utilizan como herramientas de análisis la matemática y la física.

Proceso de estudio de fenómenos físicos.

Relacionado con lo anterior, un modelo es la manera de representar, parcialmente o en su totalidad, características de relevancia de otra cosa, expresando simplificadamente y de forma general a ese fenómeno como una manifestación abstracta de su realidad.

Los modelos pueden clasificarse en prescriptivos (normativos) y descriptivos. Los primeros son utilizados como pauta de actuación al dar criterios normativos. Por ejemplo, el método científico, que se trata de un modelo para solucionar problemáticas; y el método inductivo, modelo empleado para la demostración de las características de los números naturales. Los modelos descriptivos son llamados de esta manera porque permiten la descripción de la realidad por medio de ellos, lo que facilita conocer cómo se comportan los sistemas, y siendo ejemplo de ellos modelos macroeconómicos, financieros y productivos.

A la vez, los modelos pueden ser clasificados en concretos y abstractos por la forma en la que se aproximan a la realidad. Los concretos son resultado de un modelado físico que presenta propiedades similares o exactas de la realidad modelada. Algunos ejemplos serían los prototipos de objetos, a tamaño natural o escala, con un comportamiento similar al que tendría la manifestación modelada. Por otro lado, los modelos abstractos, a diferencia de los concretos, carecen de similitud física respecto a la manifestación representada. Éstos pueden ser matemáticos o analógicos. Los analógicos incluyen una serie de relaciones por medio de elementos diferentes a los originales, pero presentan una analogía con los mismos. Algunos ejemplos son los termómetros, gráficas, altímetros, diagramas y representaciones por medio de imágenes. Los modelos matemáticos hacen uso de la matemática al mostrar la relación entre elementos y pueden representarse por variables, números, operadores y otros símbolos, lo que los vuelve intangibles por su naturaleza.

Los modelos matemáticos pueden ser clasificados en determinísticos y en probabilísticos (estocásticos). Los determinísticos son los modelos en los que los datos han sido determinados. En los probabilísticos, por otro lado, existen elementos desconocidos y cuyo desconocimiento tendrá que considerarse al momento de modelar.

Los beneficios de utilizar un modelo es que brinda elementos para analizar de forma lógica un fenómeno, lo que obliga a determinar el objetivo a conseguir y a identificar los elementos pertinentes de incluir. De la misma manera, ayuda a expresar en términos cuantificables las variables a tomar en cuenta, mostrando su interacción y estableciendo las restricciones sobre las cuales funciona.

Para construir modelos matemáticos, Stewart, J. (2007) propone tres pasos:

1 Estudiar el contexto del fenómeno real para comprenderlo por medio de investigación, análisis y abstracción.
2 Formular una representación selectiva del fenómeno identificando y refinando sus entradas, llamadas variables exógenas, y que pueden ser variables de decisión (elementos controlables) o parámetros (variables sobre las que no se tiene control directo), y sus salidas, llamadas variables endógenas, que pueden ser medidas de desempeño y variables de consecuencia.
3 Construir simbólicamente y analizar el modelo.

Como un ejemplo de los modelos matemáticos, al estudiar los fenómenos físicos en una gran cantidad de ellos pueden encontrarse ecuaciones diferenciales que para resolverse requieren el uso de series, que podrían ser trigonométricas y con la siguiente estructura (Acero, I., López, M., 2007, p. 215):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Para profundizar en los procesos de construcción de modelos matemáticos y desarrollar tus habilidades para aplicar su elaboración en problemas reales, **lee** el capítulo *Construcción de modelos matemáticos*, del libro *Introducción al cálculo* de James Stewart (2007), de las páginas 144 a la 155 y **resuelve** los ejercicios y ejemplos que en él se encuentran. Al finalizar, deberás ser capaz de modelar y resolver problemas de la vida real similares a los de los ejercicios utilizando los modelos creados.

1.1.1. La ecuación diferencial

De acuerdo con James Stewart (2007) “una ecuación es un enunciado que establece que dos expresiones matemáticas son iguales” (p. 58).

Para representar una ecuación se establece una nomenclatura del tipo:

Expresión_matemática_1 **=** *Expresión_matemática_2*

Si se habla de ecuaciones diferenciales, se habla entonces de igualdades entre expresiones matemáticas diferenciales, o, en otras palabras, que tienen *diferencias* o *variaciones*.

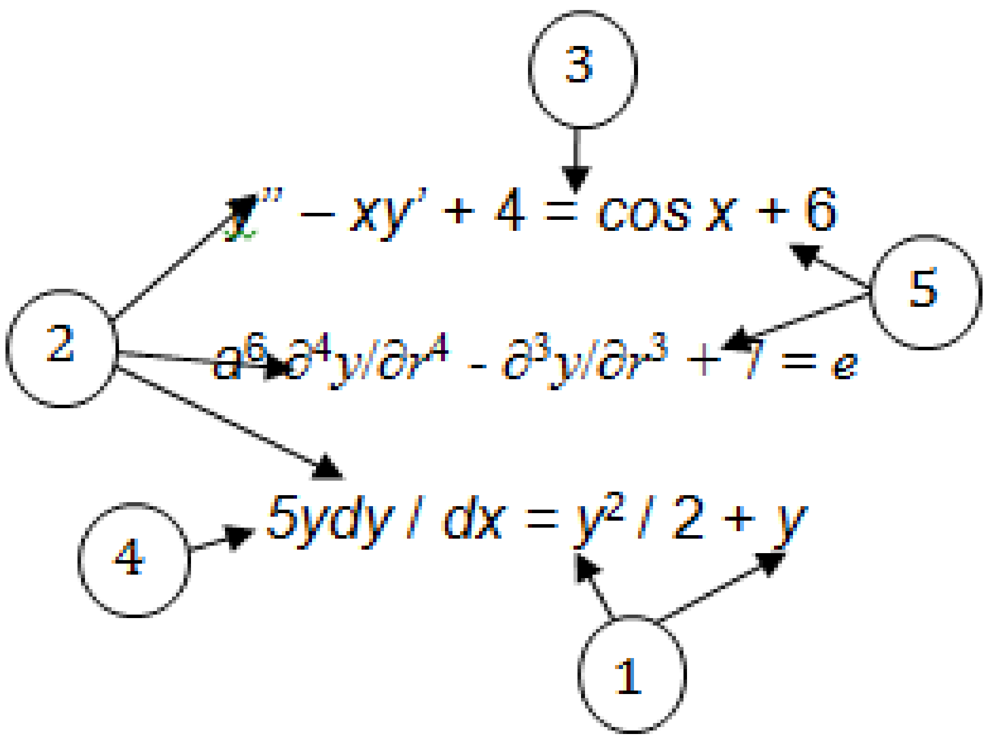
Expresión_matemática_diferencial_1 **=** *Expresión_matemática_diferencial_2*

De manera formal, y en este respecto, muchos autores han desarrollado capítulos enteros dedicados a la ecuación diferencial, y de una forma sintetizada y simple coinciden en que puede definirse como la que tiene diferenciales o derivadas. Son estas ecuaciones diferenciales las que se utilizan como lenguaje para representar los fenómenos y la realidad cambiante, en movimiento, que se presentan como símbolos que permiten sintetizar la información que tiene variación en el tiempo (Carmona, I., Filio, E., 2011) y su razón de cambio.

Se conoce por **razón de cambio** a la tasa de variación entre un elemento con respecto a otro. Una ecuación diferencial es muy posible que aparezca cuando un modelo represente esta variación. Al encontrar esta característica en modelos de sistemas de diversos tipos, tomando en cuenta que los fenómenos se encuentran en realidades cambiantes, que pueden ser psicológicos, poblacionales, operativos, médicos, biológicos y de ciencias físicas, por mencionar algunos: La aplicabilidad de las ecuaciones diferenciales es muy grande.

Una ecuación diferencial puede ser escrita en diversas formas, dependiendo de algunas de sus características, pero como componentes básicos se encontrarán variables dependientes e independientes(1), posiblemente presentes en combinaciones de notaciones matemáticas, la diferenciación, notada por una o varias comillas simples o por una d o ∂ precediendo a las variables(2), una igualdad, al seguir la manera de representar ecuaciones (3), coeficientes(4) y posiblemente algunos operadores y componentes adicionales que darán mayor precisión al modelo del fenómeno representado(5).

Ejemplos de lo anterior pueden encontrarse en las siguientes ecuaciones diferenciales:



Ejemplo de elementos de una ecuación diferencial.

Para conocer más acerca de la historia de las ecuaciones diferenciales, **lee** el trabajo de Molero, M., Salvador, A., Menarguez, M. T., y Garmendia, L. (2007), la sección de *Historia de las ecuaciones diferenciales*, de la página 368 a la 406. La lectura anterior tiene la finalidad de entender la forma en que históricamente se construyeron los principios del uso de las ecuaciones diferenciales.

1.1.2. Orden, grado, y otros conceptos

De acuerdo con Carmona, I. y Filio, E. (2011), las ecuaciones diferenciales pueden ser clasificadas principalmente por su ***orden***, ***grado*** y ***tipo***.

El **orden** de una ecuación diferencial se determina por el de la derivada más alta existente en ella y puede ser hasta de un orden n.

El **grado** de una ecuación diferencial se establece por el exponente de la derivada más alta cuando está en su forma polinomial y, al igual que el orden, su grado puede ser tan grande como el sistema modelado lo establezca.

La forma polinomial de una ecuación es aquella en donde únicamente tiene restas, sumas y productos, que pueden incluir potencias con exponentes enteros positivos o cero, para la variable dependiente y sus derivadas. Para evitar confusiones, no es de importancia lo que ocurra en la variable independiente o sus exponentes, ya que la variable de interés es la dependiente (UAIM, 2005).

Ejemplos de ecuaciones diferenciales en su forma polinomial son:

$$3y'' + 2y' - 3x = 0$$

$$y' + 4y = cos\ x$$

$$2y''' + 2y' + 7x^{-4} = 5$$

Para ser aún más claros, una ecuación diferencial en su forma polinomial no debe de contener exponentes negativos o en fracciones para sus variables dependientes o derivadas; ni logaritmos, funciones hiperbólicas o hiperbólicas inversas, trigonométricas o trigonométricas inversas, ni funciones exponenciales que tengan por argumento a las variables dependientes o sus derivadas.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales que no están en su forma polinomial son:

$$\sqrt{3y''} + 2y' - 3x = sen\, y$$

$$y' + 4y^{-1} = cos\, x$$

$$2y''' + 2ln\, y\,' + 7x^{-4} = 5$$

Poner las ecuaciones en forma polinomial muchas veces puede ser logrado al utilizar el álgebra.

Por último, una ecuación puede ser del **tipo** *ordinaria* o *parcial*.

Una *ecuación diferencial ordinaria* presenta derivadas de variables dependientes con relación a solamente una variable independiente, esto es, no tiene derivadas parciales. La ecuación tiene sólo una variable independiente. La forma de escribirla puede ser de manera implícita o explícita, normal o diferencial.

La forma implícita de una ecuación diferencial ordinaria, o EDO por sus iniciales, puede ser representada así, y es llamada de esta manera por no tener a y' despejada:

$$F(x, y, y') = 0$$

La manera normal tiene la siguiente forma:

$$y' - f(x, y) = 0$$

Si despejamos a y' , entonces se dice que es la forma explícita:

$$y' = f(x, y)$$

y recordando que se puede expresar el diferencial de una función $F(x, y)$ como:

$$dF = F_x dx + F_y dy$$

Si $F_x dx = P(x, y)$ y $F_y dy = Q(x, y)$, suponiendo $dF = 0$ se tiene la forma diferencial:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Una *ecuación diferencial parcial* es la que tiene derivadas parciales de variables dependientes con relación a más de una variable independiente. Esto quiere decir que la ecuación tiene más de una variable independiente, lo que genera la aparición de derivadas parciales.

$$\frac{\partial y}{\partial x}P(x,y)+\frac{\partial y}{\partial x}Q(x,y)=0$$

Para poner un ejemplo, supón que se tiene la siguiente ecuación:

$$a(y''')^n-4y''+y'=0$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden y grado n.

Las ecuaciones pueden también ser *lineales* o *no lineales*, en lo cual se profundizará durante el subtema *1.2.3. Ecuaciones lineales*.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales por orden, grado, tipo y linealidad.

Ahora bien, se conoce como **solución** de una ecuación diferencial a la función que la satisface sin contener derivadas de ningún tipo.

Se dice que la **solución** es **general** cuando la función encontrada (sin derivadas presentes) tiene constantes arbitrarias como resultado de las integraciones que fueron necesarias para resolver la ecuación diferencial.

Se dice que la **solución** es **particular** cuando las constantes dejan de ser arbitrarias y presentan valores específicos, la cual se revisará a detalle en el subtema *1.1.4. Problemas con valor inicial.*

De acuerdo con Nagle, K., Saff, E. B., y Snider, A. D. (2005), una **solución** es **explícita** en un intervalo I si en éste satisface la ecuación para toda x al sustituir por la variable dependiente y la función $\phi(x)$. Esto se cumple para las expresiones en forma general de ecuaciones de orden n siguientes (a) y (b):

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}) = 0 \qquad (a)$$

Que también puede ser escrita, si se despeja el elemento de mayor orden, de la siguiente forma:

$$(d^\wedge n\ y)/(dx^\wedge n\ ) = f(x, y, dy/dx, \ldots, (d^\wedge(n-1)\ y)/(dx^\wedge(n-1)\ )) = 0 \qquad (b)$$

Los mismos autores dicen que una **solución** $G(x, y) = 0$ es **implícita** para las ecuaciones a y b en I si en el intervalo I establece una o varias soluciones explícitas.

Se dice que una solución **existe** y es **única** cuando, suponiendo que $F(x)$ y $G(x)$ tienen continuidad en el intervalo cualquiera (a, b) en el cual se encuentra el punto x_0, se tiene una única solución $y(x)$ en el intervalo (a, b) para cualquier selección del valor inicial y_0.

Esto es:

$$\frac{dy}{dx} + F(x)y = G(x)$$

en donde:

$$y(x_0) = y_0$$

Para poner en práctica lo aprendido hasta ahora, **resuelve** lo que se te presenta en el documento *Ejercicios 1.1* (páginas 5 y 6) del libro de Carmona y Filio (2011). Una vez que lo hagas, podrás valorar tu nivel de conocimiento respecto de la forma de clasificar las ecuaciones diferenciales.

1.1.3. Soluciones de ecuaciones diferenciales en fenómenos físicos

Para resolver una ecuación diferencial hay algunos autores que sugieren, primero, identificarla y, posteriormente, integrarla, y en caso de que sea necesario, previo a su integración hacer cambios de variable o transformar la ecuación a integrales más familiares (Carmona, I., Filio, E., 2011).

Por ejemplo, la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Para resolverla, de acuerdo a lo mencionado, se detecta que es una ecuación ordinaria lineal de primer orden de grado uno. Se procede entonces a despejar la variable dependiente para transformar la ecuación a una forma en la que se pueda alinearla a integrales conocidas.

$$dy = xdx$$

Se integra de ambos lados:

$$\int dy = \int xdx$$

Lo que resulta en lo siguiente:

$$y = \int xdx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + c$$

Para comprobarlo, se pueden derivar ambos lados de la función resultante, observando que una vez aplicado queda como en su forma inicial.

$$y = d(\frac{x^2}{2} + c)$$

$$dy = d\frac{x^2}{2} + dc$$

$$dy = \frac{1}{2}\ dx^2$$

$$dy = \frac{1}{2}\ 2x^{2-1}dx$$

$$dy = xdx$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dx}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Lo anterior es cierto y funciona como una solución para la ecuación descrita, pero para dar aplicación a las ecuaciones diferenciales, el inicio de la resolución inicia desde aún más atrás hasta llegar a su origen: el modelado.

Edwards y Penney (2009) comentan al respecto que estudiar ecuaciones diferenciales tiene como sus metas más importantes identificar el modelo matemático que representa una situación física; encontrar su solución exacta o aproximada e interpretarla. Ellos ponen como ejemplo de lo anterior leyes que describen fenómenos físicos y que pueden ser expresadas con ecuaciones diferenciales.

La ley de enfriamiento de Newton dice que el cambio de temperatura de un cuerpo en cierto tiempo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente. Para modelar lo anterior, se identifican los elementos del sistema descrito:

- Temperatura del cuerpo (T)
- Tiempo (t)
- Temperatura del medio ambiente (A)
- Proporción de la relación (k)

De acuerdo a la ley, se tendría lo siguiente:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$$

Si se establecen los valores de la proporción $-k$ y de la temperatura ambiente A se puede determinar una fórmula que permitirá calcular la temperatura que va a tener el cuerpo ante las condiciones dadas. Si la temperatura del cuerpo es mayor a la del ambiente, $\frac{dT}{dt}$ es menor a cero, lo que significa que el cuerpo se enfría ante esta función decreciente.

Caso contrario, si la temperatura del cuerpo es menor a la ambiental, $\frac{dT}{dt}$ es mayor a cero, por lo que se puede predecir que el cuerpo se está calentando.

Se te invita a consultar el video *Ecuaciones diferenciales y ley de enfriamiento de Newton*, que se encuentra en la carpeta de ***Materiales de estudio*** en el aula, con el que podrás mejorar la comprensión de la aplicación de las ecuaciones diferenciales para entender el comportamiento de fenómenos físicos y la relación entre las variables presentes en ellos.

De forma similar, se tiene la ley de Torricelli, que determina que la tasa de variación de un volumen de agua en un tanque que se está vaciando con respecto al tiempo será *proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua en el tanque*.

Se identifican los elementos del sistema descrito:

- Volumen de agua (V)
- Tiempo (t)
- Proporción de la relación (k)
- Profundidad o altura (y)

De acuerdo con la ley, la forma de relacionar los elementos sería la siguiente:

La variación del volumen de agua con respecto al tiempo se representa con los símbolos que simbolizan variación:

$$\frac{dV}{dt}$$

La ley indica que existe una proporción, que se ha simbolizado con una k, con respecto a la raíz cuadrada de la profundidad.

$$-k\sqrt{y}$$

Al establecer la igualdad de la ecuación se tiene entonces que:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}$$

Se ha modelado la ley con ecuaciones diferenciales, pero se puede incluso ir más allá al incluir la forma del tanque. El tanque puede tomar forma cúbica, cilíndrica, etc. Para el ejemplo, se piensa en un tanque con forma cilíndrica. Se sabe que el volumen de un cilindro puede calcularse por el área de su base, que se llama “A”, y por la altura, a la que se está representando con una “y”. Con estos símbolos, el volumen se representa de la siguiente forma:

$$V = Ay$$

Si se deriva con respecto al tiempo de ambos lados para ver la tasa de variación, la representación se transforma de la siguiente manera:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dAy}{dt}$$

Como el área del tanque no varía,

$$\frac{dV}{dt} = A\frac{dy}{dt}$$

Al sustituir la variación volumétrica en el modelo matemático diferencial que se realizó de la ley de Torricelli,

$$A\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

Tras reacomodar los elementos:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{A}\sqrt{y}$$

Para simplificarla más, se sabe que al ser k y A constantes, $-\frac{k}{A}$ será una constante también, y que se puede representar con h:

$$\frac{dy}{dt} = h\sqrt{y}$$

Se te invita a consultar el video *Ecuaciones diferenciales y ley de Torricelli*, con el que podrás mejorar la comprensión de la aplicación de las ecuaciones diferenciales para entender el comportamiento de fenómenos físicos y la relación entre las variables presentes en ellos. Recuerda que se encuentra en la carpeta de ***Materiales de estudio*** del aula.

Podrás ver otros ejemplos de modelado en el subtema *1.2.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden en un sistema de energías renovables.*

1.1.4. Problemas con valor inicial

Los problemas con valor inicial son aquellos en donde las ecuaciones diferenciales se presentan con ciertas condiciones establecidas de inicio para el fenómeno modelado, resultando de esta manera en soluciones particulares al resolverlos. Para resolverlos, se hace el tratamiento que se indicó en el subtema anterior, pero incluyendo la condición inicial.

Supón un fenómeno físico representable por el siguiente modelo:

$$y' = 4 - 9x^2 - 6x^5$$

en el que se ha detectado que cuando la variable x es igual a uno, la variable y es igual a 2.

Ahora se te invita a consultar el video *Problemas con valor inicial*, que se encuentra en la carpeta de ***Materiales de estudio*** del aula, para ver el procedimiento de resolución. Con él, podrás entender de una forma sencilla cómo se utilizan los valores iniciales al resolver una ecuación.

Como otro ejemplo que te permitirá reforzar tu conocimiento, se presenta un fenómeno físico representable por el siguiente modelo:

$$y' + 5xy = 0$$

En este fenómeno, se supondrá que cuando la variable independiente (que pudiera ser, por ejemplo, el tiempo x) tiene el valor de 0, la variable dependiente tiene un valor de 4 unidades, cualesquiera que sean éstas.

Se puede reescribir el modelo para facilitar su resolución de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = -5xy$$

o bien:

$$\frac{1}{y}dy = (-5x)dx$$

Si se integra la ecuación en ambos lados se tiene:

$$\int \frac{1}{y} dy = -5 \int x dx$$

y resulta lo siguiente:

$$ln\, y = -\frac{5}{2}x^2 + c$$

Despejando la variable dependiente:

$$y = ce^{-\frac{5}{2}x^2}$$

Si se sustituyen los valores iniciales que se detectaron (0, 4), se obtiene:

$$4 = c\, e^0$$

$$c = 4$$

Entonces, al sustituir la c se encuentra como solución particular para esas condiciones iniciales:

$$y = 4e^{-\frac{5}{2}x^2}$$

Para poner en práctica lo aprendido hasta ahora, **resuelve** lo que se te presenta en el documento *Ejercicios 1.3* (páginas 14 a la 16) del libro de Carmona y Filio (2011).
Una vez terminados los ejercicios, deberás poder determinar el valor de las constantes arbitrarias dada una ecuación diferencial, su solución y las condiciones iniciales.

1.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales de primer orden tienen en su variable dependiente únicamente primeras derivadas. Para resolverlas, pueden ser utilizadas diferentes técnicas:

- Por medio de la separación de variables, que verás en el subtema *1.2.1. Variables separables y reducibles.*

- Utilizando los conceptos de ecuación lineal (subtema *1.2.3. Ecuaciones lineales*) y factor integrante (subtema *1.2.2. Ecuaciones exactas, no exactas y factor integrante*) como parte fundamental en los siguientes pasos:

    1. Poner la ecuación diferencial de la forma:

    $$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

       en la forma:

    $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

    2. Identificar $P(x)$ y determinar el factor integrante.

    3. Multiplicar la forma estándar por el factor integrante.

    4. Integrar los dos lados de la ecuación resultante del punto anterior.

- Mediante una sustitución de variables que verás en la manera de resolver ecuaciones con forma de Lagrange, Clairaut y Bernoulli (subtema 1.2.4. Ecuaciones de Bernoulli, Lagrange y Clairaut).

- Pueden ser usados otra gran diversidad de métodos, como el de Euler como una técnica numérica, procedimientos cualitativos como los campos de pendientes, el método de series de Taylor y el método de Picard.

Para profundizar en los procedimientos cualitativos de los campos de pendientes y el método de Euler, **consulta** los temas 1.3. Técnica cualitativa: Campos de pendientes y 1.4. Técnica numérica: Método de Euler, del libro de Blanchard, Devaney y Hall (1999), llamado *Ecuaciones diferenciales*, en las páginas 35-46 y 52-61, respectivamente. Al finalizar las lecturas, deberás de entender y utilizar procedimientos geométricos para representar soluciones de ecuaciones diferenciales como el método de los *campos de pendientes*, así como el procedimiento numérico denominado *método de Euler*.

1.2.1. Variables separables y reducibles

Se dice que una ecuación diferencial $y' = f\,(x, y)$ es de variables separables si ésta puede expresarse como:

$$p(x)dx \pm q(y)dy = 0$$

Esto significa que puede ser reescrita para que las variables y sus respectivos diferenciales queden en lados opuestos de la ecuación.

$$p(x)dx = q(y)dy$$

Nagle, Saff y Snider (2005) definen a la ecuación separable de la siguiente manera:

Si para $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Su lado derecho puede ser expresado como una función $p(x)$ tal que únicamente depende de x, por una función $q(y)$ que solamente tiene dependencia de y, la ecuación se considera separable.

El método de resolución es el siguiente:

Si se tiene la ecuación,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tal que

$$\frac{dy}{dx} = p(x)g(y)$$

Se multiplica ambos lados por dx y por $q(y)$ donde $q(y) = \frac{1}{g(y)}$, resultando

$$q(y)dy = p(x)dx$$

Se integran, entonces, los dos lados de la ecuación

$$\int q(y)dy = \int p(x)dx$$

quedando:

$$Q(y) + c_1 = P(x) + c_2$$

Si se unen las constantes para simplificar la lectura, se tendría como forma final

$$Q(y) = P(x) + c$$

Bernoulli formalizó el método explícito, denominado “separación de variables”, en el año 1694, pero tres años antes Leibniz descubrió implícitamente la forma de hacerlo.

Para poner un ejemplo, se tiene la siguiente ecuación:

$$4x\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 5x^2y}{3y + 2}$$

Si se factoriza,

$$4x\frac{dy}{dx} = x^2\frac{3 + 5y}{3y + 2}$$

Una vez hecho esto, se pondrá de cada lado de la ecuación las variables con sus respectivas diferenciales:

$$4\frac{3y + 2}{3 + 5y}dy = xdx$$

Para resolverla lo único que se debe de hacer es integrar:

$$4\int\frac{3y + 2}{3 + 5y}dy = \int xdx$$

Al solucionar la integral, se tiene el resultado de la ecuación que se **redujo** utilizando el método de variables separables.

Se te invita a ver los ejemplos 1 al 5 de la sección *Ecuaciones diferenciales de variables separables*, dentro del libro de Carmona y Filio (2011), que podrás encontrar en las páginas 39 a 43. Una vez que los hayas revisado, deberás ser capaz de resolver problemas similares utilizando el método de solución por variables separables.

1.2.2. Ecuaciones exactas, no exactas y factor integrante

Para entender el concepto de una ecuación exacta, se debe de saber lo que es el *diferencial total*.

El *diferencial total* de una función puede explicarse de la siguiente forma, si se tiene una función $f(x, y)$ que es igual a una variable z, que al modelarla quedaría de la siguiente forma:

$$z = f(x, y)$$

Si se diferencia de ambos lados, su *diferencial total* sería,

$$dz = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$$

suponiendo que las derivadas tienen continuidad en una región del plano xy.

Si se reescribe,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

y se toma $dz = 0$, entonces se puede expresar la ecuación como:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Esta igualdad, expresada por la ecuación anterior, se considera como una *ecuación diferencial exacta.*

Si como ya se había planteado, se tiene:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

y se derivan estas igualdades con respecto a la otra, se tiene:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Por el teorema de igualdad de derivadas parciales mixtas continuas:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

A éste se le conoce como el criterio de exactitud, y dice que la igualdad anterior es la condición *necesaria* y *suficiente* para que sea exacta la ecuación diferencial:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

El método para solucionar ecuaciones diferenciales exactas es el siguiente (Carmona, I., Filio, E., 2011):

1.- Se debe de aplicar la definición

$$f_x = M(x, y) \text{ o } f_y = N(x, y)$$

2.- Se hace una integración respecto a alguna de las dos variables

$$f = \int Mdx \text{ ó } f = \int Ndy$$

3.- Se hace una derivación del resultado respecto a alguna de las dos variables

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\int Mdx \text{ ó } f_x = \frac{\partial}{\partial x}\int Ndy$$

4.- Se hace una igualación del resultado a N o a M

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int Mdx \text{ ó } M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\int Ndy$$

5.- Se integra de nuevo la ecuación

Para ver la demostración del teorema, **consulta** el *Capítulo 2. Ecuaciones diferenciales de primer orden*, dentro del libro de Nagle, Saff y Snider (2005) en sus páginas 62 a 65, en donde se muestra además el método para su resolución y un par de ejemplos. Asimismo, en la sección *Método de solución* del libro de Carmona y Filio (2011), puedes observar los ejemplos 4 al 7 en las páginas 57 a 60. Una vez que los revises deberás ser capaz de demostrar el teorema y usar el método de resolución en ejemplos similares a los del libro.

Es posible encontrar algún factor que al multiplicar una ecuación no exacta la convierta en exacta, facilitando su resolución con el método anterior. Dicho de otra forma, se conoce como *factor de integración* para una ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$ a un factor $F(x, y)$ que haga que la siguiente ecuación sea exacta:

$$F(x,y)Mdx + F(x,y)Ndy = 0$$

Pueden existir varios factores de integración para una ecuación diferencial no exacta.

Para encontrar el factor integrador $F(x, y)$, pueden ser utilizados varios métodos, entre los cuales se encuentran los siguientes:

1.- Se puede suponer una función al inspeccionar la ecuación diferencial dada, probándola con el criterio de exactitud visto antes.

2.- Si se encuentra que el factor es únicamente $F(x)$, se encuentra haciendo

$$F(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

3.- Si se encuentra que el factor es únicamente $F(y)$, se encuentra haciendo

$$F(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

En el *Capítulo 2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (a)*, del libro de Carmona y Filio (2011) puedes **analizar** ejemplos en las páginas 66 a 69. Una vez hecho esto, deberás ser capaz de encontrar el factor de integración para ecuaciones diferenciales similares a las de los ejemplos.

1.2.3. Ecuaciones lineales

Decir que una ecuación es lineal se debe a una forma de clasificación de las ecuaciones diferenciales resultante de su grado. Esto es, las ecuaciones lineales tienen su variable dependiente, generalmente notada por y, y a todas sus derivadas en grado 1. Para ellas, se cumple también que cada coeficiente de la variable dependiente y y sus derivadas dependen de únicamente la variable independiente, generalmente notada por x. Las ecuaciones no lineales, por su parte, son las que no tienen las características anteriormente enunciadas (Carmona, I., Filio, E., 2011).

En otras palabras, y como ya se había mencionado antes, una ecuación diferencial ordinaria es **lineal** cuando la función es lineal en la variable dependiente y en todas sus derivadas, esto es:

F es lineal para $y,\ y',\ y'' \ldots y^n$ si

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Para identificar si una ecuación es lineal se pueden revisar dos condiciones:

a y y sus derivadas son de primer grado.
b Los coeficientes de $y,\ y',\ y'' \ldots y^n$ dependen sólo de la variable independiente.

Al escribir una ecuación diferencial, puede hacerse en su forma estándar. La forma estándar es aquella en donde la ecuación no tiene su primer coeficiente, lo cual resulta de dividir los dos lados de la ecuación entre éste (Zill, D. G., 2009).

Un ejemplo de la forma estándar de una ecuación lineal es:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Para resolverla, si $f(x) = 0$ se hace por variables separables (vistas en el subtema *1.2.1. Variables separables y reducibles*); en caso contrario, se puede hacer por la técnica del factor de integración (visto en el subtema *1.2.2. Ecuaciones exactas, no exactas y factor integrante*), o por la de variación de parámetros.

La técnica de variación de parámetros consiste en cambiar variables o funciones por algunas más fáciles para resolver la ecuación.

Al observar esta última técnica desde la forma de resolver expuesta por Carmona y Filio (2011):

Se sabe que,

$$y = ce^{-\int f(x)dx}$$

es una solución general de la ecuación lineal homogénea,

$$y' + f(x)y = 0$$

Para encontrar la solución de la ecuación lineal no homogénea,

$$y' + f(x)y = r(x)$$

se varían los parámetros,

$$c = u(x)$$

$$v = e^{-\int f(x)dx}$$

Así, se tiene que:

$$y(x) = u(x)v(x)$$

es una solución de la ecuación si se puede determinar una $u(x)$ que la satisfaga.

Si se deriva,

$$y' = uv' + u'v$$

y se sustituye en la homogénea, al igual que el valor de $y = uv$

$$uv' + u'v + fuv = r$$

Reacomodando y factorizando:

$$u'v + fuv + uv' = r$$

$$u'v + u(fv + v') = r$$

Al ser v la solución de la ecuación homogénea, todo el paréntesis se hace 0. Queda:

$$u'v = r$$

Despejando:

$$u' = \frac{r}{v}$$

Si se integra de ambos lados para resolverla,

$$u = \int \frac{r}{v} dx + c$$

Para que u pueda existir, v debe ser diferente de 0, por lo que $y = vu$ será entonces la solución para la ecuación lineal no homogénea y, sustituyendo por los valores encontrados, quedará:

$$y = (e^{-\int f(x)dx})(\int \frac{r(x)}{e^{-\int f(x)dx}} dx + c)$$

o lo que es lo mismo por álgebra:

$$y = (e^{-\int f(x)dx})(\int r(x)e^{\int f(x)dx}\, dx + c)$$

Para ver ejemplos de resolución, **consulta** el documento llamado *Capítulo 2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (b)*, del libro de Carmona y Filio (2011), en las páginas 74 a 78. Una vez analizados los ejemplos, deberás poder determinar si ecuaciones similares son lineales y resolverlas utilizando el método del factor integrante o el de variación de parámetros.

1.2.4. Ecuaciones de Bernoulli, Lagrange y Clairaut

Las ecuaciones de Bernoulli, Lagrange y Clairaut son ejemplos de ecuaciones diferenciales que tienen formas definidas, por lo que resulta de interés el mostrarte lo relacionado a ellas y la forma de resolverlas.

Ecuación de Bernoulli

La ecuación de **Bernoulli** tiene la siguiente forma:

$$y' + f(x)y = r(x)y^n , \qquad n \neq 0, 1$$

f(x) y r(x) son reales y tienen continuidad en un intervalo entre dos puntos, que algunos autores consideran como [*a, b*].

Si n es igual a 0 o 1 entonces puede ser resuelta por medio de separación de la ecuación o de igual forma que las ecuaciones lineales, respectivamente.

La ecuación recibe su nombre debido a que fue propuesta por James Bernoulli para ser solucionada en 1695. John Bernoulli, su hermano, la resolvió, y un año después de su publicación Gottfried Leibniz hizo la demostración de cómo puede ser reducida a una simple ecuación lineal con el primer método que se presenta a continuación.

Para resolverla se puede hacer uso de dos métodos, el primero es convertirla en una ecuación lineal, sustituyendo con la igualdad.

$$u = y^{1-n}$$

El segundo método consiste en resolverla sin hacerla lineal, sustituyendo con la igualdad:

$$y = u(x)\, v(x)$$

Para comprobarlo se realiza lo siguiente:

Si se dividí la ecuación de Bernoulli entre y^{n} se tiene:

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{f(x)y}{y^n} = \frac{r(x)y^n}{y^n}$$

Al acomodar para hacer más identificables los factores.

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+f(x)y^{1-n}=r(x)$$

Si se hace uso del primer método descrito, $u = y^{1-n}$, se tiene, por ende:

$$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Si se despeja,

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}=y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo en la ecuación de Bernoulli que se divide entre y^n

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+f(x)u=r(x)$$

Así, se tiene la ecuación de primer orden que se mencionó en un inicio y que se obtendría al aplicar la sustitución del primer método.

Para facilitarte entender de qué te servirá identificar las ecuaciones con esta forma, suponiendo que has modelado un sistema de energías renovables que pretendes controlar o del cual deseas predecir un estado futuro respecto a ciertos factores representados por las variables p y t.

El modelo que representa de mejor forma el fenómeno que observaste, se supondría que es el siguiente, mostrando la ecuación que describe la relación de la variación de p con respecto a t:

$$\frac{dp}{dt}=2p-\frac{3}{4}tp^3$$

Lo primero que se hace es acomodar la ecuación para tener una con la forma de la de Bernoulli, obteniendo así:

$$\frac{dp}{dt}-2p=-\frac{3}{4}tp^3$$

o lo que es lo mismo,

$$p'-2p=-\frac{3}{4}tp^3$$

Al escribirla de esta manera, se puede observar que $f(x) = -2, r(x) = -3/4t \; y \; n = 3$

Siguiendo los pasos indicados para hacerla lineal, se divide la ecuación entre p^3, lo que resulta en:

$$\frac{1}{p^3}p' - \frac{2p}{p^3} = -\frac{3}{4}\frac{tp^3}{p^3}$$

Simplificando un poco,

$$p^{-3}p' - 2p^{-2} = \frac{3}{4}t$$

Haciendo una conversión de $u = p^{-2}$, se tiene por ende que,

$$\frac{du}{dt} = -2p^{-3}\frac{dp}{dt}$$

o lo que es lo mismo:

$$u' = -2p^{-3}p'$$

de tal forma que si despeja $p'$$-\frac{1}{2p^{-3}}u' = p'$

Al sustituir, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$-\frac{1}{2}u' - 2u = -\frac{3}{4}t$$

Multiplicando por *-2* ambos lados para dejar la ecuación en una forma más fácil de leer,

$$u' + 4u = \frac{3}{2}t$$

Para obtener la solución, se acomodan los elementos:

$$\frac{du}{dt} = \frac{3}{2}t - 4u$$

$$du = \frac{3}{2}tdt - 4udt$$

se integran de ambos lados,

$$u = \frac{3}{4}t^2 - 4ut + c$$

para después sustituir de nuevo *u* por p^{-2}, de los que se obtiene una solución:

$$p^{-2} = \frac{3}{4}t^2 - 4p^{-2}t + c$$

$$4p^{-2}t + p^{-2} = \frac{3}{4}t^2 + c$$

$$p^{-2}(4t+1) = \frac{3}{4}t^2 + c$$

$$p^{-2} = \frac{\frac{3}{4}t^2 + c}{(4t+1)}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{\frac{3}{4}t^2 + c}{(4t+1)}$$

$$p^2 = \frac{(4t+1)}{\frac{3}{4}t^2 + c}$$

$$p = \sqrt{\frac{4t+1}{\frac{3}{4}t^2 + c}}$$

Para ver ejemplos de la resolución de la ecuación de Bernoulli, **consulta** el documento llamado *Ecuación de Bernoulli*, de la página 108 a la 110 del libro de Carmona y Filio (2011). Una vez analizados los ejemplos deberás ser capaz de resolver ecuaciones similares por los métodos expuestos.

Ecuación de Lagrange

La ecuación de **Lagrange** puede encontrarse con las siguientes representaciones:

$$y + x\varphi(y') + \omega(y') = 0$$

o más comúnmente,

$$y = x\varphi(y') + \omega(y')$$

Para resolverla se hace,

$$y' = p$$

por tanto,

$$y = x\varphi(p) + \omega(p)$$

Al derivar de ambos lados se tiene una ecuación lineal respecto a la variable independiente.

$$y' = \frac{d[x\varphi(y') + \omega(y')]}{dx}$$

Al sustituir y acomodar la ecuación,

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)p' + \omega'(p)p'$$

Ésta ya es una ecuación lineal que se puede resolver integrando.

Si se deseara despejar *p’*,

$$p - \varphi(p) = p'(x\varphi'(p) + \omega'(p))$$

$$\frac{p - \varphi(p)}{x\varphi'(p) + \omega'(p)} = p'$$

Para ver ejemplos de la resolución de la ecuación de Lagrange, **consulta** el documento llamado *Ecuación de Lagrange*, de la página 111 a la 113 del libro de Carmona y Filio (2011). Una vez hecho esto, deberás ser capaz de resolver ecuaciones del tipo de Lagrange de la misma forma, por medio de la diferenciación de la ecuación y sustitución de dy por pdx.

Ecuaciones de Clairaut

Las ecuaciones de **Clairaut** tienen la siguiente representación:

$$y = xy' + \omega(y')$$

tal que $\omega(y')$ es una función que puede diferenciarse de forma continua.

Se puede observar que es muy similar a la ecuación de Lagrange pero con $x\varphi(y') = y'$. Esta ecuación resulta de interés debido a que su solución es una familia de rectas y su envolvente, la cual es una solución singular.

La familia de rectas que aparecen como su solución general puede representarse por

$$y = cx + \omega(c)$$

y la singular por:

$$x = -\omega'(t)$$

$$y = -t\,\omega'(t) + \omega(t)$$

Las ecuaciones con esta forma reciben su nombre debido a que el matemático Alexis Claude Clairaut, de origen francés, las tuvo como objeto de estudio en 1734.

Una forma de resolverla consiste en hacer lo mismo que en la ecuación estudiada anteriormente.

$$y' = p$$

Se tiene con la sustitución la siguiente ecuación:

$$y = xp + \omega(p)$$

Al derivar de los dos lados de la ecuación,

$$dy/dx = d[xp + \omega(p)]/dx$$

o lo que es lo mismo,

$$y' = xp' + p + \omega'(p)p'$$

Factorizando,

$$y' - p = p'[x + \omega'(p)]$$

Del cambio de variable $y' = p$ se obtiene que $y' - p = 0$, al hacer la sustitución,

$$p'[x + \omega'(p)] = 0$$

De aquí se pueden deducir dos cosas: para que la ecuación sea verdadera,

$$p' = 0 \quad \text{ó} \quad x + \omega'(p) = 0\,;$$

Si $p' = 0$ entonces esto significa que p es una constante c (la derivada de una constante es igual a cero).

Después de hacer la sustitución de c por p en la ecuación en donde por primera vez se presenta el cambio de variable

$$y = xp + \omega(p)$$

Queda;

$$y = cx + \omega(c)$$

que es la solución general comentada en un inicio.

Suponiendo el otro caso, en donde $x + \omega'(p) = 0$, entonces,

$$x = -\omega'(p)$$

Tras sustituir, al igual que en el primer caso, en la ecuación donde por primera vez se presentó el cambio de variable:

$$y = xp + \omega(p)$$

Queda,

$$y = -p\,\omega'(p) + \omega(p)$$

donde esta es la solución singular de la que se habló en un inicio, si se considera a p como t.

Para ver un ejemplo de la resolución de la ecuación de Clairaut, **consulta** el documento llamado *Ecuación de Clairaut*, de la página 114 a la 115 del libro de Carmona y Filio

(2011). Una vez hecho esto, deberás ser capaz de resolver una ecuación con la forma de la de Clairaut por medio de la técnica mostrada.

Método de series de Taylor y método de Picard

El **método de series de Taylor** puede ser utilizado para la resolución de las ecuaciones diferenciales. De acuerdo con Nagle, Saff y Snider (2005), el polinomio de Taylor puede definirse para un n-ésimo grado en $x=x_o$ de la siguiente manera:

$$P_n(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y^n(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Para problemas de valor inicial, en donde $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$ se deben establecer los valores para $\emptyset'$ en x_0, esto es $\emptyset(x_0), \emptyset'(x_0), \emptyset''(x_0)$, etc.

Utilizando como base la condición inicial, se tiene que $\emptyset(x_0) = y_0$.

Como se definió que $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, se puede calcular el valor de $\emptyset'(x_0)$,

$$\emptyset'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

Para calcular $\emptyset''(x_0)$ se deriva la ecuación anterior respecto de x, lo que da,

$$y'' = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

y como previamente se había determinado que,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Después de hacer la sustitución se tiene,

$$y'' = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} f(x, y)$$

Con el **método de Picard** para el problema de valor inicial, al igual que con el método de las series de Taylor, se supone que hay una $y'(x) = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$.

Al integrarlos dos lados de la ecuación respecto a x, para $x = x_0$ a $x = x_1$

$$\int_{x_0}^{x_1} y'(x)dx = y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))dx$$

Y al sustituir $y(x_0)$ por y_0

$$y(x_1) - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))dx$$

y al despejar $y(x_1)$

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))dx$$

Al utilizar t como variable de integración en lugar de x se puede sustituir a x_1 por x como límite de integración superior,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Con la ecuación anterior, pueden generarse aproximaciones sucesivas para solucionar el problema de valor inicial,

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Si $\emptyset_0(x)$ es la aproximación de una solución para la ecuación del valor inicial, la siguiente aproximación sería haciendo $y(t) = \emptyset_0(t)$

$$\emptyset_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \emptyset_0(t))dt$$

Siguiendo la lógica anterior, se puede hacer uso de $\emptyset_1(x)$ para calcular $\emptyset_2(x)$, y ésta para $\emptyset_3(x)$.

Si se continúa el cálculo de aproximaciones basado en la inmediata anterior, se puede observar que existe una relación como la que sigue para calcular la aproximación $n+1$

$$\emptyset_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \emptyset_n(t))dt$$

1.2.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden en un sistema de energías renovables

Las ecuaciones diferenciales, como has visto a lo largo de la unidad, tienen aplicación en las energías renovables al modelar fenómenos de una forma matemática.

En las energías renovables, para el desarrollo, análisis, operación y control de sistemas que hagan uso de éstas, encuentran un vasto campo de aplicación, ya que están presentes en la termodinámica, mecánica, electricidad, química, biología y finanzas, por mencionar tan sólo algunos de los campos en donde podrán expresarse modelos de utilidad y resolverlos.

Para ver ejemplos de modelado y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en los sistemas de primer orden, **consulta** el *Capítulo 3. Modelos matemáticos y métodos numéricos que implican ecuaciones de primer orden*, del libro de Nagle, Saff y Snider (2005). Revisa los apartados 3.2 (89 – 98), 3.3 (101 – 107), 3.4 (108 - 115) y 3.5 (118 – 121). Una vez hecho esto, deberás poder analizar y resolver modelos que implican ecuaciones diferenciales en sistemas similares a los vistos, como en el análisis por compartimientos, problemas de mezclas, poblacionales, variaciones térmicas en edificios, mecánica newtoniana y circuitos eléctricos.

Cierre de la unidad

A manera de cierre, es importante enfatizar que a lo largo de la unidad se abordaron los conceptos fundamentales y definiciones para la ecuación diferencial, el orden, grado y otros elementos, así como también las soluciones en fenómenos físicos y los problemas con valor inicial. Se estudiaron los métodos para el tratamiento y resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden, como son las variables separables y reducibles, las ecuaciones exactas, no exactas y factor integrante, ecuaciones lineales, ecuaciones de Bernoulli, Lagrange y Clairaut, y se presentaron materiales de estudio para ver las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden en un sistema de energías renovables.

Se te invita a continuar con la siguiente unidad, en la que revisarás las propiedades de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, problemas de valor inicial, las definiciones de homogeneidad y no homogeneidad en las ecuaciones diferenciales, la dependencia e independencia lineal, la solución general de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas en fenómenos físicos, la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden dos, solución por superposición, por coeficientes indeterminados y por el método de operador anulador.

Fuentes de consulta

1. Acero, I., López, M. (2007). *Ecuaciones diferenciales: Teoría y problemas*. 2a ed. Madrid, España: Tebar.

2. Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México: International Thomson.

3. Cárdenas, R. D. (2009). *Metrología e instrumentación*. Múnich, Alemania: Grin GmbH.

4. Carmona Jover, I. & Filio López, E. (2011). *Ecuaciones diferenciales*. 5ª Ed. México: Pearson Educación.

5. Edwards, C. H., y Penney, D. E. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 4a ed. México: Pearson Educación.

6. Farlex, Inc. (2012). *The free dictionary*. Recuperado de http://www.thefreedictionary.com/physical+phenomenon

7. Molero, M., Salvador, A., Menarguez, M. T., y Garmendia, L. (2007). *Análisis matemático para ingeniería*. Madrid, España: Pearson/Prentice-Hall.

8. Nagle, K., Saff, E. B., Snider, A. D. (2005) *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 4a ed. México: Pearson Educación.

9. Real Academia de la Lengua Española (2001). *Diccionario de la lengua española*. 22a ed. Madrid, España: Espasa Libros, S.L.U.

10. Stewart, J. (2007). *Introducción al cálculo*. 1a ed. Argentina: Thomson Learning Argentina.

11. UAIM. (2005). *Ecuaciones diferenciales*. Recuperado de http://uaim.edu.mx/carreras/sistemas%20computacionales/Sexto%20Trimestre/ECUACIONES%20DIFERENCIALES.pdf

12. Zill, D. G. (2009). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 9a ed. México: Cengage Learning.