



Primer semestre

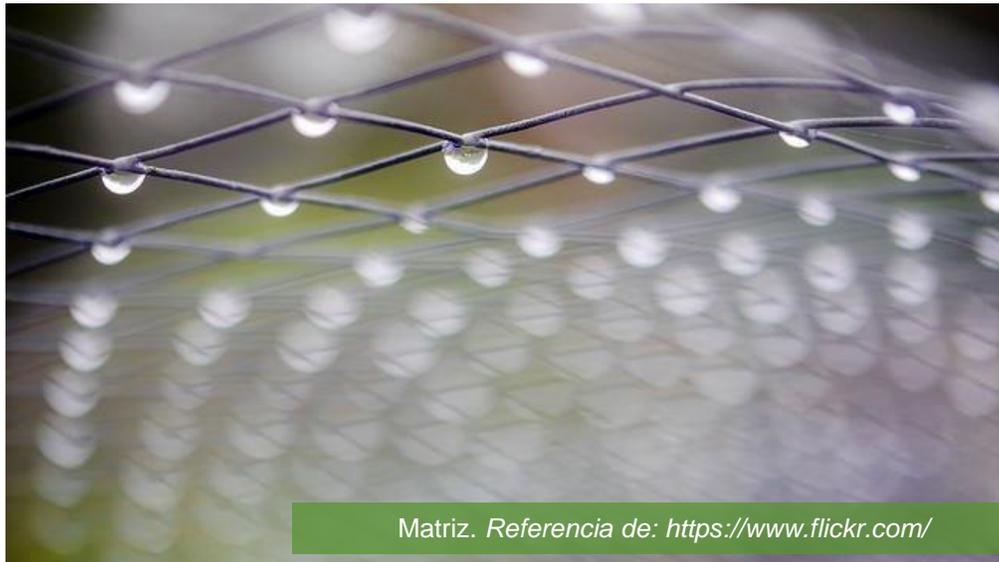
Álgebra lineal

U2 | Matrices



División de Ciencias de la Salud, Biológicas y Ambientales

Matrices



Matriz. Referencia de: <https://www.flickr.com/>

Índice

Presentación	4
Competencia específica	5
Propósitos	5
2.1. Introducción a matrices	6
2.1.1. Renglones y columnas	9
2.1.2. Notación y clasificación	10
2.2. Operaciones con matrices	16
2.2.1. Suma y resta de matrices	17
2.2.2. Producto de un escalar por una matriz.....	20
2.2.3. Producto matricial.....	21
2.3. Representación matricial.....	25
2.3.1. Matriz principal y matriz ampliada	25
2.3.2. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales....	27
2.4. Operaciones elementales de renglón	29
2.4.1. Aplicación de las operaciones elementales de renglón a una matriz	29
2.4.2. Matriz inversa mediante operaciones de renglón	36
2.5. Solución de sistemas lineales.....	38
2.5.1. Método de eliminación de Gauss	38
2.5.2. Método de Gauss-Jordan	41
Cierre de la unidad	44
Para saber más	45
Fuentes de consulta.....	46

Presentación

Las matrices aparecen tanto en forma explícita como implícita en nuestras actividades, tanto cotidianas como profesionales. Por ejemplo, una lista de los estudiantes de un grupo es una matriz; los gastos y entradas de una empresa también se pueden modelar con matrices; la presentación de una muestra de ADN o las celdas de un panel solar puede ser estudiada como un arreglo matricial.

En esta unidad, conocerás la importancia de las matrices, las aplicaciones que tiene en la vida cotidiana y en las diferentes áreas de estudio, y la forma en que pueden beneficiar. También se puede modelar un problema que surja en las empresas u organizaciones, planteando un sistema de ecuaciones.

El sistema de ecuaciones lineales lo podrás resolver por medio de una matriz, con el método de operaciones elementales de renglón, pero antes de conocer este método, es necesario que sepas cómo se realiza la suma y resta de matrices, el producto de un escalar por una matriz y el producto matricial; estas operaciones permiten comprender el método de operaciones elementales de renglón.

Asimismo, podrás resolver un sistema de ecuaciones lineales por medio del método de eliminación de Gauss o el método de Gauss-Jordan.

También en esta unidad se abordará todo lo referente a las principales características y elementos de los que se compone una matriz; asimismo, conocerás los diferentes tipos de matrices que se utilizan en la actualidad, así como la forma que éstas tienen. En general, se darán los conceptos fundamentales de las matrices para poder continuar en los siguientes temas y con el desarrollo de las mismas.

Competencia específica

Unidad 2

Emplea matrices para resolver problemas de distintas áreas mediante diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Propósitos

Utilizar los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas de distintas áreas, por medio del método de eliminación de Gauss y de Gauss-Jordan.

2.1. Introducción a matrices

Una matriz es un arreglo de entradas organizadas en renglones y columnas.

El estudio de matrices es muy importante dentro de la vida cotidiana; constantemente las utilizan sin darse cuenta de ello. Por ejemplo, una boleta de calificaciones es una matriz con los datos acomodados en filas y columnas, la lista de compras del mercado, el horario de clases, una cartilla de vacunación, etc., también son ejemplos de matrices.

HORARIO DE CLASES SEMESTRE 1997

HORAS	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
08:30 a 10:00	Introducción al Álgebra II Prof. P. Elemente	Redacción General II Prof. R. Muñoz	Electivo: Comunicación Prof. S. Gallardo	Electivo: Comunicación Prof. S. Gallardo	Introducción al Álgebra II Prof. P. Elemente
10:15 a 11:45	Historia II Prof. A. Araya	Redacción General II Prof. R. Muñoz	Redacción General II Prof. Alfa Calderon (20 alumnos)	Historia II Prof. A. Araya	Electivo: La Palabra y el Gesto Prof. J. López
12:00 a 13:30	Sociología de la Com. Prof. J. Huneez	Filosofía II Prof. J. Acevedo	Redacción General II Prof. A. Calderon (20 alumnos)	Filosofía II Prof. J. Acevedo	
14:30 a 16:00		AYUDANTIA DE SOCIOLOGIA de la Comunicación Ana Collado	Electivo: La Palabra y el Gesto Prof. J. López	AYUDANTIA DE HISTORIA II Adolfo.	
16:15 a 17:45					

Alumno: Juárez Hidalgo Fabiola
Matricula: 253238

Grupo: unico
Turno: Matutino
Semestre: 1
Fecha: 10-Jul-06

Clave	Asignatura	Inasistencias				Calificaciones			
		1er Parcial	2º Parcial	Examen Final	Finales	Calificación 1er Parcial	Calificación 2º Parcial	Calificación Examen Final	Calificación Final
CUC-MER-01-01	Contabilidad Básica	0	2		2	8.00	8.00	8.00	8.00
CUC-MER-04-02	Microteoría I	0	2	0	2	6.70	6.21	8.40	7.00
CUC-MER-01-03	Matemáticas Financieras	0	1	3	4	8.00	10.00	9.00	9.00
CUC-MER-04-04	Derecho Cambiario Internacional	10	3	2	15	NP	6.20	4.70	5.00
CUC-MER-01-04	Derecho de los Negocios I	2	0		2	5.00	5.00	5.00	5.00
CUC-MER-01-05	Macroeconomía	1	1	2	4	7.00	8.00	6.00	7.00
CUC-MER-01-07	Metodología de la Investigación	3	3	5	11	10.00	8.00	7.00	8.00
CUC-MER-01-08	Inglés Básico	0	0	0	0	7.00	8.00	8.00	7.00
		16	12	12	40	7.39	7.43	7.01	7.00

¿Sabías que...?

El buscador Google utiliza matrices para mostrar las páginas de búsqueda; de hecho, para que el servidor funcione se necesita álgebra lineal, teoría de grafos, y probabilidad.

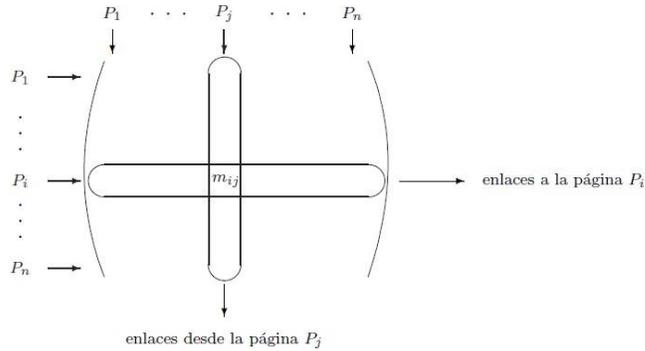
¿Podrías explicar cómo el buscador Google atiende 200 millones de consultas diarias, aproximadamente, e indexa varios miles de millones de páginas web? ¿Qué papel juegan las matemáticas en este servidor?

Para que este servidor funcione, se necesita un criterio de ordenación; si se etiquetan con los símbolos P_1, \dots, P_n cada una de las páginas de la red, se le puede asignar a cada P_j un número x_j , que representará su importancia. Estos números podrían ser, por ejemplo, números entre 0 y 1.

Suponiendo que después de un censo de los sitios de la red, se construye la lista de páginas web, asignándole a cada una de ellas, de la manera que sea, una importancia. Esta lista queda a disposición para ser utilizada cada vez que se realice una determinada consulta: las páginas seleccionadas se mostrarán en el orden que indique dicha lista, ¿cómo se construye esa lista?

Cuando se tratan con grafos, se recurre a los dibujos en el papel, en los que los vértices son puntos del plano; mientras que las aristas son flechas que unen esos puntos, conviene considerar una interpretación alternativa, en este caso por medio de matrices.

La dimensión de una matriz está dada como el número de filas por el número de columnas. Por ejemplo, el horario se trata de una matriz de dimensión 6X6, o bien de 5X5, si solo te fijas en las entradas y no en la información que proporcionan, mientras que la boleta de calificaciones es una matriz de 11X10, o bien de 9X8. La dimensión de una matriz también se conoce como el orden de la matriz.



Ahora bien, en la matriz que se forman, las filas y columnas van etiquetadas con los P_1, \dots, P_n , y cuyas entradas son ceros y unos. La entrada m_{ij} de la matriz será un uno si es que hay un enlace de la página P_j a la página P_i ; y un cero en caso contrario:

Suponiendo, por ejemplo, que la página P_1 es citada desde las páginas P_2, P_{25} y P_{256} , que P_2 sólo se cita desde P_1 y P_{256} , etc., mientras que, se diga, hay enlaces a la última página, P_n , desde P_1, P_2, P_3, P_{25} y P_{n-1} .

La página P_1 tiene tres enlaces, los cuales son: P_2, P_{25} y P_{256} ; la página P_2 tiene dos enlaces, P_1 y P_{256} ; la página P_n tiene cinco enlaces que son: P_1, P_2, P_3, P_{25} y P_{n-1} .

De acuerdo con esto, x_1 debería ser proporcional a 3, porque tiene tres enlaces; x_2 lo sería a 2, etc., mientras que x_n habría de ser proporcional a 5.

Pero ahora la asignación x_1, \dots, x_n debe cumplir que $x_1 = K(x_2 + x_{25} + x_{256})$, $x_2 = K(x_1 + x_{256})$, ..., $x_n = K(x_1 + x_2 + x_3 + x_{25} + x_{n-1})$, donde K es una constante de proporcionalidad. Se encuentra así con un enorme sistema de ecuaciones cuyas soluciones son las posibles asignaciones de x_1, \dots, x_n .

En este curso aprenderás a calcular las soluciones de una matriz, sin las cuales, como te podrás dar cuenta, no podría existir una herramienta tan valiosa como Google.

2.1.1. Renglones y columnas

Ya sea hablado a lo largo de la primera unidad de los conceptos referentes a los vectores; en esta unidad, se clasificarán los vectores por su tipo, es decir, por renglón o por columna; de esta manera, se tiene la siguiente definición.

Definición

Un vector renglón de n componentes u , es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

Con este tipo de vectores ya se están familiarizando, ya que han sido los que se utilizan durante la primera unidad.

Definición

Se define un vector columna de n componentes v , como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

En ambos vectores (renglón o columna), u_1 se conoce como primera componente, v_2 se llama segunda componente, y así sucesivamente. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector columna, en el cual 3 es la primera componente, 5 la segunda componente, -7 la tercera componente y el 2 es la cuarta componente.

Mientras tanto, en el vector renglón $(3, 5, -7, 2)$, 3 es la primera componente, 5 es la segunda, -7 es la tercera y 2 es la cuarta.

Este vector, tanto la columna como el renglón, se pueden utilizar, por ejemplo, para describir el ahorro de una persona al día; así, el vector puede expresarse como: ahorré 3 pesos el lunes, 5 pesos el martes, gasté 7 el miércoles, ahorré 2 el jueves.

Ahora que se conocen los vectores, están listos para dar a conocer otro concepto, en este caso, el de las matrices.

2.1.2. Notación y clasificación

En 1858, Cayley introdujo la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales y derivadas parciales. Además de que son útiles para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, en las diferentes ingenierías, etc., y, como viste, también pueden aparecer en tus actividades cotidianas.

La utilización de matrices actualmente constituye una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos, etc.

Notación que se utiliza para una matriz

Una matriz A de $m \times n$ (m por n) es un arreglo rectangular de m por n números dispuestos en m filas y n columnas, tal y como se muestra a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los elementos que conforman una matriz, son los vectores fila y los vectores columna; entonces, cada fila de una matriz es precisamente un vector fila y cada columna de la misma, es un vector columna. Ahora ya se pueden representar diferentes situaciones mediante matrices, de manera muy similar a cuando utilizaban vectores, pero con más información. Por ejemplo, un estudiante obtuvo las siguientes calificaciones:

	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3
Cálculo	8	9	9
Álgebra	9	7	9
Computación	10	9	10

está en la fila i columna j . De esta manera, a_{34} , significa que el elemento que se encuentra en la fila 3 y columna 4.

De modo general, las matrices pueden clasificarse en matrices cuadradas y matrices no cuadradas; las matrices cuadradas tienen características especiales y son aquellas con las cuales se trabajará durante todo el curso.

Todas las matrices, ya sean cuadradas o no, pueden escribirse en su forma escalonada reducida por renglones. Este tipo de matriz tiene las siguientes características.

a) Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero, es 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

Primer elemento
igual a 1 de la fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo elemento igual
a 1 de la segunda fila

d) Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene cero en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama pivote para ese renglón.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivote que se ubica en la fila 3, columna 3 y es igual 1

Las siguientes matrices, son ejemplos de matrices escalonadas reducidas por renglones.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
--	--	---	--

Matriz cuadrada

Una matriz es cuadrada si tiene el mismo número de filas que de columnas, por ejemplo, la matriz de las calificaciones de cálculo, álgebra y computación, tiene 3 filas y 3 columnas.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 9 & 7 & 9 \\ 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Diagonal de la matriz

Los elementos que se encuentran en las posiciones donde el número de filas coincide con el de la columna, forman la diagonal de la matriz; en este ejemplo, las posiciones son $a_{11} = 8$, $a_{22} = 7$ y $a_{33} = 10$.

Una matriz que no es cuadrada tiene diferente número de filas y de columnas. Por ejemplo, el vector fila y el vector columna.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Una diagonal de una matriz es la que forman las entradas, comenzando por cualquiera de la primera columna, y dirigiéndose hacia abajo en forma escalonada.

La diagonal principal de una matriz se define para matrices de $n \times n$. Ésta es la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha. Es decir, si se tiene una matriz cuadrada de $n \times n$, la diagonal principal está formada por las entradas a_{ii} .

Dentro de las matrices cuadradas se pueden encontrar diferentes tipos de matrices, como son:

Matriz triangular

Una matriz es triangular superior si es una matriz cuadrada y todos los elementos que se encuentran abajo de la diagonal principal son cero; en una matriz inferior sucede a la inversa, es decir, todos los elementos que se encuentran arriba de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz A es **triangular superior** porque al construir un triángulo por arriba de la diagonal lo que queda abajo del triángulo son ceros (fíjate bien que no importa como sean las entradas que quedan dentro del triángulo, lo importante es que **debajo de él todas las entradas son ceros**).

La matriz B es **triangular inferior**, porque al construir un triángulo por debajo de la diagonal lo que queda arriba del triángulo son ceros (fíjate bien que no importa como sean las entradas que quedan dentro del triángulo, lo importante es que **arriba de él todas las entradas son ceros**).

Matriz diagonal

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada cuyas entradas no diagonales son todas cero (fíjate bien que no importa como sean las entradas que quedan en la diagonal, lo importante es que tanto arriba de la diagonal como debajo de la misma, las entradas son ceros).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

Matriz identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es la matriz que en la diagonal principal solo tiene números uno y en los demás elementos, ceros. En la siguiente matriz se ilustra la definición.

Matriz cero

Es la matriz cuyos elementos son todos cero, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz cero es tanto triangular superior, como triangular inferior, como diagonal.

Existen otros tipos especiales de matrices, las cuales se darán a conocer en el momento en que se utilicen. Se define a las anteriores debido a que en todo momento las utilizarás por ser las más básicas en álgebra lineal.

2.2. Operaciones con matrices

¿Sabías que...?

Las hojas de cálculo, como las de Excel, son arreglos matriciales que te permiten manipular datos numéricos. Habitualmente se utilizan para realizar bases de datos, informes, gráficas estadísticas y clasificación de datos. Con ellas es posible hacer cálculos complejos con fórmulas y funciones y dibujar distintos tipos de gráficas. Para ello, se utilizan operaciones entre celdas. Cada celda representa una entrada de la matriz.

Particularmente, Excel está compuesto por libros. Un libro es el archivo en que se trabaja y donde se almacenan los datos. Cada libro puede contener aproximadamente 250 hojas o carpetas. Cada hoja contiene aproximadamente 65.000 líneas y 256 columnas ordenadas numérica y alfabéticamente, respectivamente.

La variedad de aplicaciones de las matrices se presenta en tu alrededor, y si bien es cierto que en todo momento las utilizas, también es cierto que con ellas realizas diferentes operaciones, sin darte cuenta.

Por ejemplo, en las situaciones más básicas, al realizar operaciones con los vectores, los cuales son matrices formadas por una columna o un renglón, al realizar la suma o resta de dos vectores columna o renglón, se están realizando operaciones con matrices.

Otras situaciones en las que se utilizan matrices más complejas, sería la comparación de precios. Si se requiere adquirir los útiles escolares y se compara la lista de precios en diferentes papelerías, se estaría haciendo una diferencia de precios en un arreglo rectangular, lo cual es precisamente una resta de matrices.

Si se compran uniformes escolares para 2 niños de kínder y otros 2 niños de primaria, al realizar la suma de los precios, se estaría realizando una suma de matrices, ya que el uniforme se compone de calcetas, playera, short, pantalón. Si son 4 niños y todos van a la misma escuela y sus uniformes tienen el mismo precio, se realizaría el producto del costo de las partes que componen el uniforme por 4 que es la cantidad de niños; a esta operación se le conoce como el producto de una matriz por un escalar.

También se pueden encontrar aplicaciones más avanzadas. Por ejemplo, si estás realizando un estudio de contaminación en la ciudad, puedes realizar una matriz en la cual se indiquen los diferentes contaminantes que te interesa estudiar y sus niveles de

concentración por zona. O puedes tener una matriz por zona y sumarlas para determinar el índice del contaminante en toda la ciudad.

Si vas a analizar el comportamiento de una bacteria en diferentes ambientes, o bien, bajo modificaciones genéticas manipuladas, te conviene realizar una matriz en la cual conserves tus datos. Por ejemplo, el nivel de afección de la bacteria en diferentes organismos vivos de acuerdo con la temperatura del ambiente. O bien, el poder de infección de acuerdo con la manipulación de un gene u otro.

O si imaginas que deseas averiguar cómo producir un combustible a partir de diferentes elementos naturales, puedes realizar un arreglo matricial en el cual pondrás las diferentes cantidades de cada elemento y su efectividad.

Ahora conocerás las operaciones que se realizan con las matrices.

2.2.1. Suma y resta de matrices

En este subtema conocerás la definición de la suma y resta de matrices, así como sus propiedades.

Suma de matrices

Sean A y B dos matrices de $m \times n$; la suma de la matriz A y B es la matriz $A + B$ de $m \times n$; en el gráfico se puede apreciar la manera en que se suman cada uno de los elementos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

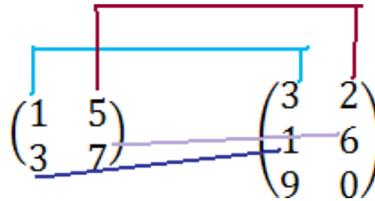
$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto significa, que la matriz $A + B$ de $m \times n$ se obtiene de sumar las componentes correspondientes de las matrices de $m \times n$ de A y B .

Se debe tener en cuenta que la suma entre dos matrices se puede realizar únicamente cuando ambas matrices tienen el mismo número de elementos o bien el mismo tamaño.

Por ejemplo, las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ son incompatibles bajo la suma, puesto que

al intentar realizar la suma, se tendría:



Harían falta dos elementos, los cuales no posee la primera matriz; por lo tanto, no se pueden sumar.

Lo que se puede hacer en estos casos es aumentar en la matriz que sea más pequeña las filas o columnas necesarias para hacer ambas matrices de iguales dimensiones. Todos los elementos que se aumenten deberán ser iguales a cero.

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ más $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ quedará igual a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 5+2 & 4 & 7 \\ 3+1 & 7+6 & 10 & 13 \\ 0+9 & 0+0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

En cambio, las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ sí se pueden sumar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 6+1 \\ 8+6 & 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$$

Resta de matrices

Sean A y B dos matrices de $m \times n$, la diferencia de A y B es una matriz de $m \times n$, $A - B$ dada por

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \quad \vdots \quad a \\
 1 \\
 n \\
 - \\
 b \\
 1 \\
 n \\
 a_{2n} - b_{2n} \\
 \vdots \\
 a_{m1} - b_{m1} \quad a_{m2} - b_{m2} \quad \dots \quad a_{mn} - b_{mn}
 \end{array}$$

Esto significa, que la matriz $A - B$ de $m \times n$ se obtiene de restar las componentes de B , de las respectivas componentes de A .

Al igual que para la suma de matrices, la diferencia se puede dar únicamente cuando las matrices que se están restando tienen el mismo número de elementos o bien que las matrices sean del mismo tamaño. Entonces, las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ no pueden

restarse, ya que son incompatibles debido a que tienen diferente número de filas, en cambio, las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ sí pueden restarse, puesto que tienen el mismo

número de filas y de columnas, si se resta la segunda de la primera, se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2-5 & 6-1 \\ 8-6 & 0-8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como en el caso de la suma, puedes hacer las matrices del mismo tamaño agregando ceros. Reflexiona ¿Cómo quedarían las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ para restarse?

Propiedades de la suma y resta de matrices

Sean A , B y C tres matrices de $m \times n$, entonces se verifican las siguientes propiedades.

1. $A + 0 = A$, $A - 0 = A$

La suma o resta de una matriz con la matriz cero da como resultado la misma matriz, es decir, que la matriz cero es el elemento neutro de la adición y sustracción de matrices.

2. $A + B = B + A$

La suma de matrices es conmutativa.

3. $(A + B) + C = A + (B + C)$

La suma de matrices es asociativa.

4. $A + (-A) = 0$

Existe una matriz opuesta o el inverso aditivo de la matriz.

**Las propiedades de la suma de las matrices son similares a las propiedades de los números reales.*

2.2.2. Producto de un escalar por una matriz

En el tema 2.2. Se presentaron las operaciones con matrices y se mencionó que éstas se utilizan, por ejemplo, si se compran uniformes escolares y se compone de calcetas, playera, short, pantalón. Si son 4 niños y sus uniformes tienen el mismo precio, se realizaría el producto del costo de las partes que componen el uniforme por 4 que es la cantidad de niños.

Si, por ejemplo, sabes que el crecimiento de una cepa de bacterias es directamente proporcional a la temperatura del ambiente, entonces te servirá hacer una multiplicación de la matriz en donde tengas tus datos de crecimiento por bacteria, por un escalar que represente los grados de la temperatura.

Esta operación se le conoce como el producto de una matriz por un escalar. A continuación, se revisará de manera formal:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz $m \times n$, αA está dada por:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, que αA es la matriz que se obtiene al multiplicar cada componente de A por α . Observa el siguiente ejemplo.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; si se multiplica a la matriz por los escalares 2 y $1/5$ se tiene:

$$2A = \begin{pmatrix} 2(3) & 2(1) & 2(-5) \\ 2(0) & 2(7) & 2(2) \\ 2(1) & 2(6) & 2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -10 \\ 0 & 14 & 4 \\ 2 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3) & \frac{1}{5}(1) & \frac{1}{5}(-5) \\ \frac{1}{5}(0) & \frac{1}{5}(7) & \frac{1}{5}(2) \\ \frac{1}{5}(1) & \frac{1}{5}(6) & \frac{1}{5}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

El producto de una matriz por un escalar aporta tres propiedades más, que se vinculan con las propiedades mencionadas en la suma y resta de matrices.

Sean A y B dos matrices y sean α y β dos escalares; entonces se verifican las siguientes propiedades.

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- Propiedad distributiva del producto por un escalar.
- $1A = A$
- El escalar 1 al multiplicarse por una matriz es la misma matriz.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

2.2.3. Producto matricial

La multiplicación o producto matricial se realiza entre dos matrices o entre una matriz y un escalar, al igual que la multiplicación en aritmética. La multiplicación de matrices viene dada por un algoritmo, que permite calcular la multiplicación matricial, el cual es diferente del que se utiliza para multiplicar dos números. La diferencia es que la multiplicación de matrices no cumple con la propiedad conmutativa. A continuación, se conocerá la manera en que se realiza la multiplicación de matrices.

Sea A una matriz de $m \times n$ y sea B una matriz de $n \times p$. El producto de A y B es una matriz $C = A \times B$ de $m \times p$, donde los elementos c de C están determinados de la siguiente manera:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj} \text{ (renglón } i \text{ de A)} \cdot \text{ (renglón } j \text{ de B)}$$

De este modo, cada elemento c de C queda determinado de manera única por el producto de un renglón de A con una columna de B .

Antes de realizar la multiplicación de matrices, se debe comprobar si éstas son compatibles bajo la multiplicación; para esto, el número de columnas de la primera matriz debe de ser igual al número de filas de la segunda matriz, de lo contrario, el producto no se podrá realizar, ya que las matrices serían incompatibles bajo la multiplicación.

Ejemplo del producto de matrices

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula su producto.

A tiene 3 renglones y B tiene 3 columnas, de modo que dicha multiplicación de matrices puede realizarse.

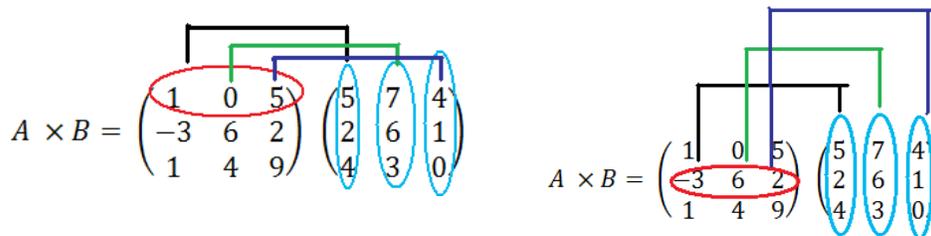
El producto se determina de la siguiente manera:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 5 & 7 & 4 \\ -3 & 6 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

El primer paso para multiplicar dos matrices es tomar la primera fila de la matriz A y la primera columna de la matriz B , con estos dos vectores se realizará un producto escalar y el resultado será el elemento a_{11} de la nueva matriz y se continuará multiplicando la fila i por la columna j y el resultado será el elemento a_{ij} de la nueva matriz.

En el siguiente diagrama se ilustra la forma en que se multiplican dos matrices.



$A \times B =$

$$\begin{array}{r}
 (1)(5) + (0)(2) + (5)(4) \quad (1)(7) + (0)(6) + (5)(3) \quad (1)(4) + (0)(1) + (5)(0) \\
 = ((-3)(5) + (6)(2) + (2)(4) \quad (-3)(7) + (6)(6) + (2)(3) \quad (-3)(4) + (6)(1) + (2)(0)) \\
 (1)(5) + (4)(2) + (9)(4) \quad (1)(7) + (4)(6) + (9)(3) \quad (1)(4) + (4)(1) + (9)(0) \\
 \quad \quad \quad 5 + 0 + 20 \quad 7 + 0 + 15 \quad 4 + 0 + 0 \\
 = (-15 + 12 + 8 \quad -21 + 36 + 6 \quad -12 + 6 + 0) \\
 \quad \quad \quad 5 + 8 + 36 \quad 7 + 24 + 27 \quad 4 + 4 + 0
 \end{array}$$

Entonces, se tiene que la matriz resultante del producto de las matrices A y B está dada por

$$A \times B = \begin{pmatrix} 25 & 22 & 4 \\ 5 & 21 & -6 \\ 49 & 58 & 8 \end{pmatrix}$$

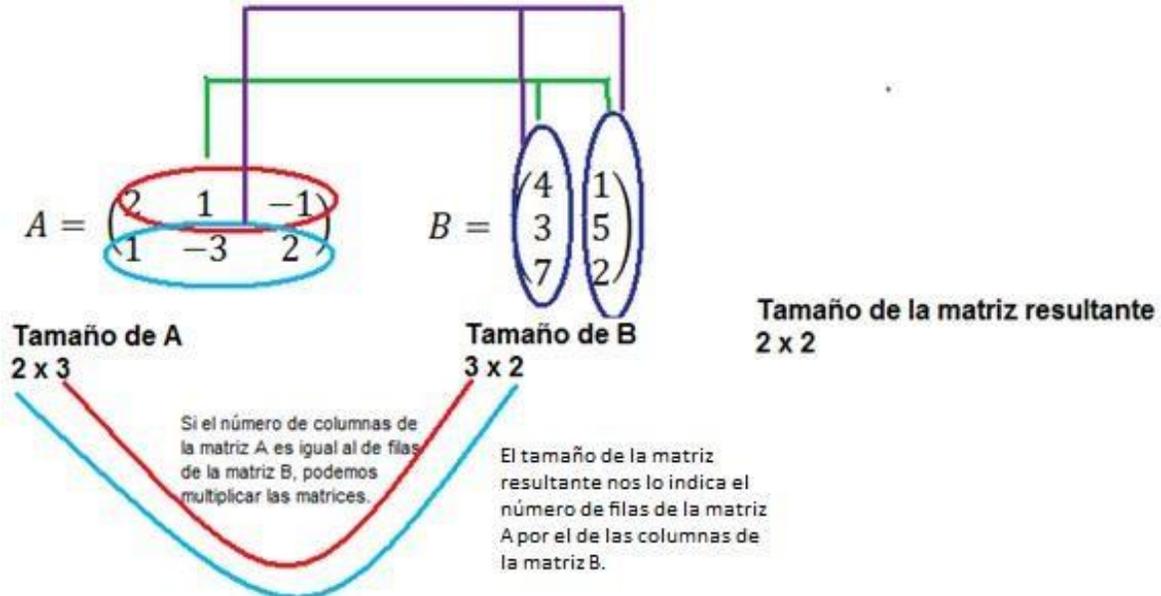
Se debe tener en cuenta que, si el número de filas de la primera matriz no coincide con el número de columnas de la segunda, entonces las matrices no se pueden multiplicar. Por esta misma razón, no es indispensable que las matrices sean cuadradas para que se pueda efectuar su producto.

A continuación, se presenta el producto de dos matrices que no son cuadradas; para ser más precisos, en este ejemplo se realizarán los productos por separado.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ de 2×3 y la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ de 3×2 , calcula su producto.

Debido a que las matrices no son cuadradas, primero se verifica si son o no compatibles bajo la multiplicación. Como la primera matriz es de 2×3 (dos filas, tres columnas) y la segunda es de 3×2 (tres filas, dos columnas), sí se pueden multiplicar porque el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Además, se puede identificar el tamaño de la matriz resultante tomando el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda. De esta manera, el resultado será una matriz cuadrada de 2×2 ; esto se resume mediante el siguiente esquema:



Ahora, se realizará el producto de los elementos que se ilustran en el diagrama anterior:

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = (2)(4) + (1)(3) + (-1)(7) = 8 + 3 - 7 = 4$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = (2)(1) + (1)(5) + (-1)(2) = 2 + 5 - 2 = 5$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = (1)(4) + (-3)(3) + (2)(7) = 4 - 9 + 14 = 9$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)(1) + (-3)(5) + (2)(2) = 1 - 15 + 4 = -10$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$$

Con esto se demuestra que, al multiplicar dos matrices, no es necesaria que éstas sean cuadradas.

Un ejemplo de aplicación de las operaciones de matrices en investigación lo irás construyendo paso a paso en las siguientes secciones. Lo primero que debes hacer es representar los elementos de tu problema en forma matricial. Por ello, estudiarás primero esto.

2.3. Representación matricial

En este tema se verá la representación de los sistemas de ecuaciones lineales por medio de una matriz; comúnmente se encuentran con problemas que se pueden representar mediante un sistema de ecuaciones lineales; por ejemplo, la cantidad de personas que camina por una calle bajo ciertas condiciones, como la hora, con o sin mascotas, comiendo o ejercitándose, etc. O bien, el número de ciertos contaminantes en el ambiente o en el agua, o la cantidad necesaria de ciertos átomos para crear una molécula determinada.

Una vez que un fenómeno, problema o situación sea modelado mediante un sistema de ecuaciones, su representación matricial es demasiado sencilla, tal y como se presenta en los siguientes subtemas.

2.3.1. Matriz principal y matriz ampliada

Matriz principal

Una matriz es principal o de coeficientes si resulta de la representación de un sistema de ecuaciones lineales; es decir, si A es la representación del sistema de ecuaciones, entonces A es una matriz principal o de coeficientes.

Se consideran los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$3x + 6y = 0$$

$$5x + 2y = 0$$

$$2x + y + 7z = 12$$

$$3x + 3y + 6z = -3$$

$$x + 5y + 2z = 0$$

$$5x + 8y = 2$$

$$6y = -1$$

$$9x + 2y = 3$$

Las siguientes matrices son ejemplos de las matrices principales de los sistemas dados.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

A las matrices principales se les conoce con este nombre, debido a que a partir de ellas se encuentra la solución del sistema de ecuaciones del cual proviene.

Las matrices principales son las primeras matrices que se escriben con los coeficientes de las incógnitas de un sistema matricial; esto es, antes de sumarlas, restarlas o multiplicarlas por un escalar o por una matriz, ya que al realizar estas operaciones las matrices se modifican.

Todas las matrices descritas en el ejemplo anterior son matrices principales.

Matriz ampliada

Se le conoce como matriz ampliada o aumentada a la combinación de dos matrices, una que representa a la matriz de los coeficientes de un grupo de ecuaciones y otra que representa a la matriz de constantes de las mismas ecuaciones.

Considerando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x + 3y + z &= 5 \\4x + y + 6z &= 7 \\2x + 7y + z &= 4\end{aligned}$$

Se tienen las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Donde A es una matriz de coeficientes del sistema y B es una matriz de las constantes. Con estas matrices se puede construir la matriz aumentada $(A|B)$, tal y como se muestra a continuación.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 4 & 1 & 6 & | & 7 \\ 2 & 7 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Las matrices aumentadas, forman una parte muy importante dentro del estudio y en la mayoría de los casos son las que más se utilizan, ya que son las únicas que ofrecen un resultado sobre alguna situación planteada mediante un sistema matricial.

A partir de ahora, notarás que las incógnitas de tus ecuaciones no serán x, y y z sino $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

2.3.2. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

En este subtema se trabajarán los sistemas de ecuaciones lineales, para mostrar la manera en que estos se relacionan con las matrices. Suponiendo que se tiene un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, como el que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

De este sistema, se pueden extraer los coeficientes de las variables en cada una de las ecuaciones y con ellos se forma la matriz principal o de coeficientes, de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se puede nombrar a un vector \mathbf{x} que represente a las variables, y escribirlo como:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Y, por último, se escribe un vector \mathbf{b} que represente a las constantes, las cuales son los segundos miembros de cada una de las ecuaciones que pertenecen al sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Y con todos estos elementos, se puede representar al sistema de ecuaciones lineales por medio de matrices, como sigue.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

O bien:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Cuando el sistema de ecuaciones lineales que se está representando es homogéneo, entonces, se sustituye el vector **b** por el vector **0** y el sistema de ecuaciones quedaría de la siguiente manera.

$$Ax = 0$$

O bien:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Generalmente se tomará la matriz de coeficientes y la matriz o vector de constantes al representar sistemas de ecuaciones, ya que son los elementos que se necesitan para construir la matriz aumentada, la cual permitirá obtener o desarrollar algún resultado. Por ejemplo, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 4 \\ 9x_1 - 4x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Se representan los coeficientes por la siguiente matriz de 3 x 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 9 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por la matriz de 3 x 1 a las constantes:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Se forma la matriz aumentada

$$(A|\mathbf{b})$$

O bien:

$$3 \quad 5 \quad -1 \mid 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 4 \\ 9 & -4 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

Ésta es la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales anterior.

2.4. Operaciones elementales de renglón

Las operaciones elementales de renglón las utilizas en tu vida cotidiana, al modificar algunos hechos o acontecimientos que se pueden representar mediante un vector. Esto se ilustra con los siguientes ejemplos:

Si se tiene una lista de compras de alimentos perecederos y compras los mismos productos en las mismas cantidades cada semana, se puede encontrar la cantidad total que se compra al mes, multiplicando el vector que las representa por el número de semanas que restan del mes que se encuentra en curso.

Imagina que estás realizando un experimento en el cual analizas qué sustancias se producen en diferentes reacciones químicas. Puedes hacer un arreglo matricial que exprese los comportamientos de tus sustancias. Supón que debes tener más presente una de las reacciones, entonces puedes intercambiar de lugar las filas de tu matriz y también puedes realizar otras interacciones entre los renglones para determinar si es posible obtener o no otra sustancia.

A continuación, se presenta de manera más específica cuáles son las operaciones elementales de renglón, así como la manera en que éstas se desarrollan. Por otra parte, se conocerán cómo obtener la matriz inversa mediante estas operaciones.

2.4.1. Aplicación de las operaciones elementales de renglón a una matriz

De los cursos de álgebra que estudiaste en la secundaria y en el bachillerato conoces los sistemas de ecuaciones lineales. En ellos estudiaste que multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por un número distinto de cero da una nueva ecuación, la cual es equivalente a la original.

Otra de las cosas que conoces de un sistema de ecuaciones es que, al sumar una ecuación, ya sea del sistema o equivalente a una de las del sistema, con otra del mismo sistema, se obtiene una ecuación que no la modifica y, además, si se intercambian de renglón dos ecuaciones de un mismo sistema, resulta un sistema equivalente al primero, es decir, que las soluciones serían las mismas.

Las operaciones elementales con renglones, aplicadas a la matriz aumentada, que representa un sistema de ecuaciones lineales, son las siguientes:

- Multiplicar o dividir un renglón por un número diferente de cero.
- Sumar un renglón original o su equivalente, con otro renglón.
- Intercambiar dos renglones.

Cada una de las operaciones anteriores aplicadas sobre una matriz aumentada, no modifica la matriz, ya que forma una matriz equivalente a la primera. Por esto mismo, tampoco se altera el sistema de ecuaciones que dicha matriz representa.

El proceso de aplicar las operaciones elementales con renglones para simplificar una matriz aumentada se conoce como reducción por renglones.

Primero se pondrían en práctica las operaciones de renglones, para posteriormente ver cómo esto ayuda a resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se va a desarrollar el siguiente ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 2 & 0 & 7 & | & 3 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$ una matriz aumentada; utiliza las operaciones elementales por renglón y encuentra la matriz identidad equivalente.

Para trabajar con los renglones y las columnas, se utilizará R_i para hacer referencia al renglón i , con esto se puede reducir la matriz de la siguiente manera.

Primero se escribe la matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 2 & 0 & 7 & | & 3 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$$

Para realizar las operaciones entre renglones, lo que conviene es realizar operaciones con los renglones de tal manera que en la diagonal principal queden unos. Como la matriz ya tiene al primer elemento de la diagonal igual a 1, se tiene que convertir a los elementos que se encuentran debajo de él, en ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 2 & 0 & 7 & | & 3 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$$

Paso 1.

$-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ se multiplica al renglón 1, por -2 y se suma el renglón 2; el resultado de estas operaciones se va a colocar en el renglón 2, por lo que el renglón 1 permanecerá igual.

$$\begin{aligned} -2R_1 + R_2 &= -2(1 \ 4 \ 2 \ 5) + (2 \ 0 \ 7 \ 3) = (-2 \ -8 \ -4 \ -10) + (2 \ 0 \ 7 \ 3) \\ &= (0 \ -8 \ 3 \ -7) \end{aligned}$$

Este resultado lo puedes observar en el renglón 2 de la siguiente matriz.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ (0 & -8 & 3 & -7) \\ 1 & 6 & 3 & 9 \end{array}$$

Paso 2.

$-R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ Para que el elemento a_{31} sea igual a cero, se multiplica al renglón 1 por -1 y se le suma el renglón 3, el resultado se va a colocar en el renglón 3, por lo que el renglón 1 pasará tal como está.

$$-R_1 + R_3 = -(1 \ 4 \ 2 \ 5) + (1 \ 6 \ 3 \ 9) = (-1 \ -4 \ -2 \ -5) + (1 \ 6 \ 3 \ 9) = (0 \ 2 \ 1 \ 4)$$

El resultado lo puedes observar en el renglón 3 de la siguiente matriz:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ (0 & -8 & 3 & -7) \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

Paso 3.

$-\frac{3}{8}R_2 \rightarrow R_2$ se multiplica al renglón 2 por -1/8 para tener al 1 en la matriz principal

$$-\frac{3}{8}R_2 \rightarrow R_2 = (0, -8, 3, -7) \left(-\frac{1}{8}\right) = (0, 1, -\frac{3}{8}, \frac{7}{8})$$

El resultado quedaría tal como se muestra en la siguiente matriz:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ (0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8}) \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

Ya se tienen los tres unos en la matriz principal, falta hacer ceros a los demás elementos de la matriz de coeficientes; para ello, se realizan las siguientes operaciones:

Paso 4.

Al renglón 2 lo multiplicas por -4 y le sumas el renglón 1; al resultado lo colocas en el renglón 1.

$$\begin{array}{l}
 -4R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \\
 \begin{array}{ccc|c}
 & 7 & 3 & \\
 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\
 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\
 \hline
 (0 & 2 & 1 & 4)
 \end{array}
 \end{array}$$

Paso 5.

Al renglón 2 lo multiplicas por -2 y le sumas el renglón 3; al resultado lo colocas en el renglón 3. El renglón 2 pasa tal como está.

$$\begin{array}{l}
 -2R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \\
 \begin{array}{ccc|c}
 & 7 & 3 & \\
 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\
 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\
 \hline
 (0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4})
 \end{array}
 \end{array}$$

Como te podrás dar cuenta, las operaciones se realizaron de tal manera que el elemento a_{12} y a_{32} sean iguales a cero, pero el elemento a_{33} de la diagonal principal en lugar de 1 es $7/4$; esto se resuelve fácilmente multiplicado por $4/7$. El resultado se muestra en la siguiente matriz:

Paso 6.

$$\begin{array}{l}
 R_3 \rightarrow \frac{4}{7}R_3 \\
 \begin{array}{ccc|c}
 & 7 & 3 & \\
 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\
 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\
 \hline
 (0 & 0 & 1 & \frac{7}{9})
 \end{array}
 \end{array}$$

Paso 7.

$$-\frac{7}{2}R_3 + R_1 \rightarrow R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{7} \end{array} \right)$$

Paso 8.

$$\frac{3}{8}R_3 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 19/14 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 \end{array} \right)$$

La matriz aumentada que se obtuvo tiene unos en la diagonal principal y ceros en sus demás elementos, excepto en los que corresponden a las constantes. Entonces, se ha llegado a la matriz identidad y se ha conseguido con el uso de las operaciones elementales de renglón.

Ahora se explica cómo las operaciones de renglón realizadas en la matriz asociada al sistema de ecuaciones ayudan en la solución de éste.

Las matrices principales son aquellas que representan un sistema de ecuaciones lineales y que permiten obtener la solución de dicho sistema, de forma muy sencilla. La manera para hacer esto, es la siguiente.

Como se estableció al principio, las operaciones con renglones forman nuevas matrices, las cuales son equivalentes a la matriz principal o bien a la matriz con la cual se comienza a trabajar; de esta manera se tiene la siguiente equivalencia.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 9 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 19/14 \\ 0 & 0 & 1 & 9/7 \end{array} \right)$$

Entonces, la nueva matriz de coeficientes equivalente a la matriz principal es una matriz identidad, denotada en este caso por A' y así, se tiene que

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, la matriz o vector de constantes, que anteriormente era

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ahora es

$$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{14}{9} \\ \frac{7}{7} \end{pmatrix}$$

Y por último, quien no cambia es la matriz o vector de variables \mathbf{x} .

El sistema solución lo puedes escribir tal y como se muestra a continuación:

$$A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$$

O bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{14}{9} \\ \frac{7}{7} \end{pmatrix} \quad \text{---(1)}$$

De esta manera, si se desarrolla el producto escalar de las matrices del primer miembro, se tiene.

$$\begin{aligned} 1 \quad 0 \quad 0 \quad x_1 & \quad (1)(x_1) + (0)(x_2) + (0)(x_3) \\ (0 \quad 1 \quad 0) \cdot (x_2) & = ((0)(x_1) + (1)(x_2) + (0)(x_3)) \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad x_3 & \quad (0)(x_1) + (0)(x_2) + (1)(x_3) \\ & \quad x_1 + 0 + 0 \\ & = (0 + x_2 + 0) \\ & \quad 0 + 0 + x_3 \\ & \quad x_1 \\ & = (x_2) \\ & \quad x_3 \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (1), se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{14}{9} \\ \frac{7}{7} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{19} \\ x_2 &= \frac{14}{9} \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{9}{7}$$

Éstas son las soluciones de la matriz aumentada

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 9 \end{array}$$

Se puede observar que el proceso de operaciones elementales de renglón de una matriz no es complicado, sino laborioso y dependiendo del tamaño de la matriz construida, puede llegar a ser hasta tedioso. Una manera más sencilla de obtener los valores de las variables, es la siguiente:

Teniendo la matriz identidad en el lado izquierdo de la matriz aumentada, se igualan las variables correspondientes a cada posición, tal y como se muestra a continuación.

La matriz reducida por renglones, queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 19/14 \\ 0 & 0 & 1 & 9/7 \end{array}$$

A partir de ella, se pueden encontrar las soluciones, tomando en cuenta el orden de las variables; para esto, se asocia a la primera columna la variable x_1 , a la segunda columna x_2 y la tercera columna x_3 ; de esta manera, las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{19} \\ x_2 &= \frac{14}{9} \\ x_3 &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

Y con esto, se evita utilizar el producto escalar.

2.4.2. Matriz inversa mediante operaciones de renglón

Se diría que la matriz inversa de una matriz cuadrada A_n es la matriz que cumple la siguiente propiedad:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

Sean A y B dos matrices cuadradas; B es la matriz inversa de A si

$$AB = BA = I$$

Es decir, si el producto matricial de A y B da como resultado a la matriz identidad, entonces B es la matriz inversa de A y se denota por A^{-1} ; de esta manera, se puede escribir la ecuación anterior en términos de A como sigue:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

A las matrices que tienen inversa se les llama invertibles. Las matrices cuadradas que no tienen inversa se conocen como matrices singulares. A su vez, también a las matrices invertibles se les conoce como no singulares.

Cabe destacar que el hecho de que una matriz cuadrada sea invertible, no garantiza que todas las matrices cuadradas lo sean, ya que existen matrices que no tienen inversa.

A continuación, se explica el proceso de encontrar la matriz inversa; para esto, se tomará la misma matriz con la cual se trabajó en el subtema anterior.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 5 \\ 2 & 0 & 7 & | & 3 \\ 1 & 6 & 3 & | & 9 \end{pmatrix}$ una matriz aumentada; encuentra su matriz inversa mediante operaciones por renglón.

Para comenzar, únicamente se trabajará con la parte izquierda de la matriz, es decir, con

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

A esta matriz la vas a aumentar con la matriz identidad de 3 x 3, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la matriz inversa, lo que se tiene que hacer es realizar operaciones por renglón, hasta convertir a la matriz de la izquierda en una matriz identidad; la matriz que se obtenga en la parte de la derecha será la matriz inversa que se está buscando.

Se realizarán los cálculos para encontrar la matriz inversa:

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R + R \rightarrow R} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{-8}R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -4R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \\ -2R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} & | & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & | & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} & | & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & | & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{3}{8}R_3 + R_2 \rightarrow R_2 \\ \frac{4}{-}R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_3 \\ \frac{1}{14}R_3 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{7}R_3 \rightarrow R_3 \\ \frac{1}{14}R_3 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

En el lado izquierdo de la matriz aumentada se ha generado la matriz identidad; entonces, el lado derecho representa a la matriz inversa de A, es decir,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Para comprobar que A^{-1} efectivamente es la matriz inversa de B se puede realizar el producto matricial AA^{-1} , o bien $A^{-1}A$.

2.5. Solución de sistemas lineales

En este tema se van a desarrollar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices; se explica el procedimiento para encontrar la solución de un sistema mediante la representación matricial y el empleo de los métodos de Gauss y de Gauss-Jordan; dichos procedimientos facilitan la manera de resolver cualquier sistema de ecuaciones mediante una matriz.

Otra forma para dar solución a un sistema de ecuaciones es utilizando el determinante de una matriz asociada. Se explica este método en la siguiente unidad de forma más extensa.

¿Sabías que...?

Se cuenta que en la lápida de Diofanto, un gran matemático griego, podía leerse el siguiente epitafio:

"...Transeúnte, ésta es la tumba de Diophante: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años. De todo esto, se deduce su edad."

En su forma actual, lo anterior puede representarse a través de una ecuación lineal...
¿Puedes tú saber la edad de Diofanto?

2.5.1. Método de eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss es el método más básico y simple que se puede utilizar para resolver un sistema de ecuaciones lineales; los elementos necesarios para desarrollarlo ya los conoces.

Básicamente, este método consiste en aplicar operaciones de renglón a una matriz hasta convertirla en una matriz triangular superior; a partir de ello, se pueden encontrar

las soluciones del sistema de ecuaciones del cual procede la matriz por un método más simple; este puede ser el de inspección.

Se va a desarrollar un ejemplo para conocer el método de eliminación Gaussiana o de Gauss.

Ejemplo: Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 17 \\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 &= 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 &= -15 \end{aligned}$$

Lo primero que hacemos es construir la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales; esto es, la matriz principal aumentada, la cual es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \\ 6 & -4 & 3 & 5 & 17 \\ 1 & -6 & 3 & 1 & 9 \\ -3 & 2 & 1 & -9 & -15 \end{array} \right)$$

Se va a reducirla mediante operaciones por renglón, hasta obtener una matriz triangular superior, puesto que en esto consiste el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \\ 6 & -4 & 3 & 5 & 17 \\ 1 & -6 & 3 & 1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-6R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \\ 3R_1 + R_4 \rightarrow R_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & -19 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-R_4 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & -19 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{5R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \\ -2R_2 + R_4 \rightarrow R_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & -19 \\ 0 & 0 & 5 & -13 & -13 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{5R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \\ -2R_2 + R_4 \rightarrow R_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -18 & 14 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -13 & -13 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{ccc|c}
 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\
 -\frac{1}{18}R_3 \rightarrow R_3 & 0 & 1 & -4 & 3 & | & -3 \\
 & & & & & & -5R_3 + R_4 \rightarrow R_4
 \end{array} \\
 \longrightarrow \begin{array}{ccc|c}
 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{9} & | & \frac{6}{9} \\
 & (0 & 0 & 5 & -13 & | & -13) \\
 \begin{array}{ccc|c}
 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\
 0 & 1 & -4 & 3 & | & -3 \\
 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{9} & | & \frac{6}{9} \\
 (& 0 & 0 & -\frac{82}{9} & | & -\frac{147}{9})
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc|c}
 & 1 & -1 & 1 & 2 & | & 6 \\
 -\frac{9}{82}R \rightarrow R & 0 & 1 & -4 & 3 & | & -3 \\
 \begin{array}{ccc|c}
 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{9} & | & \frac{6}{9} \\
 \longrightarrow & (0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{147}{82})
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Sea llegado a la forma de Gauss; tal y como se aprecia, es una matriz triangular superior; por último, lo que se tiene que hacer es encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones a partir de la matriz obtenida, para esto, se asocia a cada columna una variable, así, por la fila 4 y columna 5, se tiene que $x_4 = \frac{147}{82}$, además, se tiene por la fila

3 que $x_3 - \frac{7}{9}x_4 = \frac{6}{9}$

Ello implica que

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \frac{6}{9} + \frac{7}{9}x_4 \\
 &= \frac{6}{9} + \frac{7}{9}\left(\frac{147}{82}\right) \\
 &= \frac{169}{82} \\
 x_3 &= \frac{169}{82}
 \end{aligned}$$

De la fila 2 se tiene

$$\begin{aligned}
 x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= -3 \\
 x_2 &= 4x_3 - 3x_4 - 3 \\
 &= 4\left(\frac{169}{82}\right) - 3\left(\frac{147}{82}\right) - 3 \\
 x_2 &= -\frac{11}{82}
 \end{aligned}$$

Y, por último, de la fila 1 se tiene

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\
 x_1 &= 6 + x_2 - x_3 - 2x_4 \\
 &= 6 + \frac{11}{82} - \frac{169}{82} - 2\left(\frac{147}{82}\right)
 \end{aligned}$$

$$x_1 = 6 - \frac{6}{82} - \frac{6}{82} - 2\left(\frac{6}{82}\right)$$
$$x_1 = \frac{18}{82}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema de ecuaciones son:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{18}{82} \\x_2 &= -\frac{11}{169} \\x_3 &= \frac{82}{82} \\x_4 &= \frac{147}{82}\end{aligned}$$

2.5.2. Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss y el de Gauss-Jordan son muy similares; en el proceso de solución de un sistema de ecuaciones lineales es más utilizable el método de Gauss, ya que en éste se hace un 50% menos de operaciones que en el método de Gauss-Jordan. El hecho de que la mayoría de las personas trabajen con este último, se debe a que permite conocer la matriz inversa proveniente de un sistema de ecuaciones lineales. Gauss-Jordan lo has utilizado anteriormente para encontrar la matriz inversa; se desarrollará un ejemplo en el cual visualices y con esto compares este método con el de Gauss y establezcas el de tu preferencia.

Suponiendo que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\2x_1 + 7x_3 &= 3 \\x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 9\end{aligned}$$

Su matriz aumentada asociada es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

Para resolver este sistema por el método de Gauss-Jordan, lo que se debe hacer es encontrar la matriz identidad basados en la matriz A. Esto es, se aplica el método de Gauss y se encuentran los unos de la diagonal principal. Luego se convierten también en ceros los números arriba de la diagonal principal. Recuerda que ya lo habías hecho y se obtuvo la matriz:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ (0 & 1 & 0 & 19/14) \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 \end{array}$$

Dada la cual, se deducen automáticamente los resultados del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{19} \\ x_2 &= \frac{14}{9} \\ x_3 &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Con este método, como recordarás, también es posible encontrar la matriz inversa:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ (2 & 0 & 7 & 3) \\ 1 & 6 & 3 & 9 \end{array}$$

$-R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ Para que el elemento a_{31} sea igual a cero, se multiplica al renglón 1 por -1 y se suma el renglón 3, el resultado lo vas a colocar en el renglón 3 por lo que el renglón 1 pasará tal como está.

$$\begin{aligned} -2R_1 + R_2 &= -2(1 \ 4 \ 2 \ 5) + (2 \ 0 \ 7 \ 3) = (-2 \ -8 \ -4 \ -10) + (2 \ 0 \ 7 \ 3) \\ &= (0 \ -8 \ 3 \ -7) \end{aligned}$$

Este resultado lo puedes observar en el renglón 2 de la siguiente matriz:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ (0 & -8 & 3 & -7) \\ 1 & 6 & 3 & 9 \end{array}$$

$$-R_1 + R_2 = -(1 \ 4 \ 2 \ 5) + (1 \ 6 \ 3 \ 9) = (-1 \ -4 \ -2 \ -5) + (1 \ 6 \ 3 \ 9) = (0 \ 2 \ 1 \ 4)$$

El resultado lo puedes observar en el renglón 3 de la siguiente matriz.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 \\ (0 & -8 & 3 & -7) \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

$-\frac{1}{8}R_2 \rightarrow R_2$ multiplicamos al renglón 2 por $-1/8$ para tener al 1 en la matriz principal

$$-\frac{1}{8}R_2 \rightarrow R_2 = (0, -8, 3, -7) \left(-\frac{1}{8}\right) = (0, 1, \frac{3}{8}, \frac{7}{8})$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & | & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & | & 8 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 2 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & | & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & | & 7 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \xrightarrow[-4R_2 + R_1 \rightarrow R_1]{}
 \begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & | & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & | & 8 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & | & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{7} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \xrightarrow[-2R + R \rightarrow R]{\begin{matrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{matrix}}
 \begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & | & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & | & 8 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & | & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{7} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \xrightarrow[-R + R \rightarrow R]{\begin{matrix} 3 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{matrix}}
 \begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & | & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & | & 8 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & | & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{7} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \xrightarrow[\begin{matrix} 3R + R \rightarrow R \\ 8 & 3 & 2 & 2 \end{matrix}]{\begin{matrix} R \rightarrow R^4 \\ 3 & 7 & 3 \end{matrix}}
 \begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & | & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & | & 8 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & | & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & | & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{7} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Cierre de la unidad

Si se requiere profundizar en el tema de matrices consulta Friedberg, Stephen, et. Al; *Álgebra lineal*; Estados Unidos (2007), Illinois State University. Prentice.

Se te sugiere que desde el inicio revises la evidencia de la Unidad, con la finalidad de que la trabajes paulatinamente conforme vayas avanzando en los temas.

Te recomendamos resolver todos los ejercicios del cuadernillo que corresponden a esta unidad, para adquirir mayor habilidad. El *Cuadernillo de ejercicios* lo podrás encontrar en Material de apoyo del aula virtual.

Para saber más



En las siguientes páginas web:



<https://matrixcalc.org/es/>
https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/matrix-multiplication

Puedes ingresar matrices para multiplicarlas; recuerda que el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.



Si deseas saber más sobre Excel puedes buscar los tutoriales ¡Algunos se pueden consultar de forma gratuita!

Fuentes de consulta



1. Barrera Mora, F. (2014). Álgebra lineal. Grupo Editorial Patria. <https://repositorio.uci.cu/bitstream/123456789/9426/1/%C3%81lgebra%20Lineal%20%28%20PDFDrive%20%29.pdf>
2. Friedberg, Stephen, ET. Al. (2007). *Álgebra lineal*. Estados Unidos: Illinois State University. Prentice.
3. Lay, D. C. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (tercera edición). México: Pearson Educación.
4. Marsden, Jerrold; Tromba, Anthony. (1991). *Cálculo vectorial*. Estados Unidos: Addison-Wesley Iberoamericana.